图灵电子与电气工程丛书

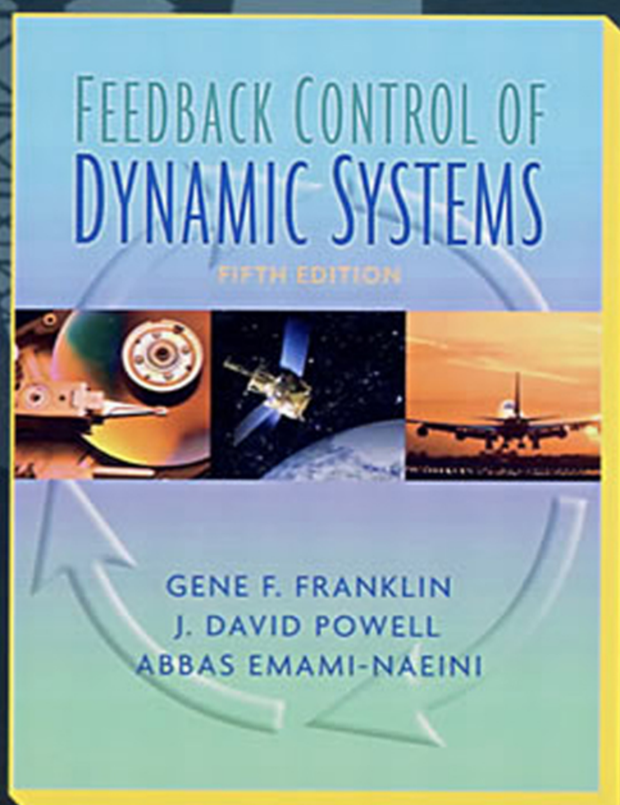
自动控制原理与设计

（第5版）

Feedback Control of Dynamic Systems

Fifth Edition

[美] Gene F. Franklin
J. David Powell
Abbas Emami-Naeini 著
李中华 张雨浓 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵电子与电气工程丛书

自动控制原理与设计

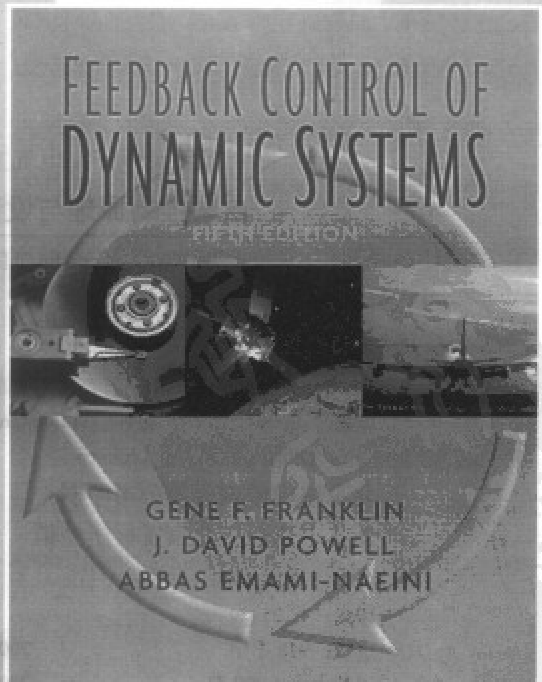
（第5版）

Feedback Control of Dynamic Systems

Fifth Edition

[美] Gene F. Franklin
J. David Powell
Abbas Emami-Naeini 著

李中华 张雨浓 译



人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

自动控制原理与设计：第5版 /（美）富兰克林（Franklin G. F.），（美）鲍威尔（Powell J. D.），（美）那诶尼（Naeini A. E.）著；李中华，张雨浓译. —北京：人民邮电出版社，2007.11
（图灵电子与电气工程丛书）
ISBN 978-7-115-16638-8

Ⅰ. 自… Ⅱ. ①富…②鲍…③那…④李…⑤张… Ⅲ. ①自动控制理论②自动控制系统—系统设计 Ⅳ. TP13 TP273

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第119052号

内 容 提 要

本书是自动控制经典著作，内容紧密围绕自动控制系统的分析与设计理论展开，主要介绍了自动控制的动态模型、动态响应、基本特性，着重介绍了自动控制的几种常规设计技术，还涉及了非线性系统的分析与设计，并穿插了许多自动控制在MATLAB下的仿真实例。

本书可作为高等院校自动化及相关专业的高年级本科生和研究生的教材，还可供有关专业的教师、研究人员及从事自动化工作的工程技术人员参考。

图灵电子与电气工程丛书

自动控制原理与设计（第5版）

◆ 著　［美］Gene F. Franklin，J.David Powell，Abbas Emami-Naeini
　译　李中华　张雨浓
　责任编辑　朱　巍

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号
　邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京铭成印刷有限公司印刷
　新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：700×1000　1/16
　印张：43.25
　字数：948千字　2007年11月第1版
　印数：1–4 000册　2007年11月北京第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2006-3684号

ISBN 978-7-115-16638-8/TN

定价：79.00元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010)67129223

版 权 声 明

谨以此书献给

Gertrude、David、Carole、Valerie、Daisy、
Annika、Davenport、Malahat、Sheila 和 Nima

译 者 序

时至今天，各种自动化装置、机器人、无人工厂、办公自动化设备、农业自动化、家庭自动化等所形成的社会生产力，把人类社会推进到一个崭新的时代——自动化时代。虽然自动化装置的种类繁多并且应用领域十分广泛，但是如何分析和设计自动控制系统的基本概念和基本理论却是不变的。因此，控制工程师们需要对控制系统的特性和分析设计方法有基本的了解。另外，控制系统设计中所采用的许多技术和原理也在其他学科中有着广泛的应用。

本书在帮助读者掌握实际控制系统技术的全景过程中贯穿了由基本概念到具体应用的思想。众所周知，精通控制系统的具体分析和设计需要有一定的悟性。坚实的理论基础只是确保充分理解控制系统，更为重要的是，在实际工作中敏锐地判断系统的运行情况，进而思考改进系统性能的方法，而且要明白如何改进系统设计来得到期望的控制要求。本书的编排和讲解正是沿着这条有效的学习途径进行的，即在对问题有一个很好的理解的基础上，再提出有效的系统设计方案。

本书涵盖了自动控制理论的基础知识，重点强调了基本理论分析、应用和技术实践，具有以下鲜明的特点：

- ☐ 本书整合了自动化专业过去分散的专业课程，将经典自动控制原理、现代控制理论、数字控制技术和非线性系统理论中的基础知识全部囊括其中，知识体系清晰、内容丰富，适应当今社会对宽口径自动化专业学生的培养需求。
- ☐ 每章的开篇都提纲挈领地给出了本章的知识背景和控制要求，也给出了全章的主要内容结构分布，在每章末尾还给出了关键知识点的小结，有助于学生进一步理解所学知识，形成完整的知识体系。
- ☐ 本书在介绍自动控制基础分析和设计方法的同时，还以丰富的设计实例配以详实的设计步骤，让读者能充分体会到每一个设计细节，有利于快速地培养起学生的分析和设计控制系统的能力。
- ☐ 配套网站（http://www.scsolutions.com/feedbackcontrol.html）提供了绘制本书中许多图形的计算机仿真程序集合和学习帮助文件。书中和配套网站提供的MATLAB仿真程序为读者提供了验证、分析和设计自动控制系统的范例，让读者能真实体验控制效果。

本书内容丰富、概念清晰、通俗易懂，是一部不可多得的优秀教材。

本书的第1章、第2章和第4章由陆许明翻译，第3章和第5章由张介翻译，第6

章由谭炎坤翻译，第 7 章由曾庆淡翻译，第 8 章和第 9 章由宋文婧翻译，第 10 章和附录由潘天鹭翻译。全书由李中华负责统稿、张雨浓负责审校。

由于译者水平所限，翻译不妥或错误之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

译 者

前　　言

本书这一版本依然针对控制理论的入门课程，并且保留了之前版本的优点。新版对描述反馈特征的第 4 章做了很大改动，内容安排更合乎逻辑，风格更为简约。本版还新增加了第 9 章非线性系统的内容，这一章把非线性问题零散的知识点集中在一起，组织成一个连贯的章节，并增加了部分新内容，第一次详细介绍这一重要领域。这种组织结构改善了之前把非线性系统内容随意散落在各个章节的情况。这对希望更早介绍这些内容的教师来说是很便利的。

本书的基本架构未变，依然包括利用根轨迹、频率响应和状态变量方程三种途径实现的设计分析，以及为阐明控制理论而精心准备的实例。跟过去一样，为了帮助学生检验学习效果，我们在每章的最后部分提供了复习题，并在书后附有答案。

在介绍设计方法的三个核心章节里，依然希望学生能够掌握基本的手工计算方法，并能快速绘制出根轨迹或者伯德图的草图作为设计指导。鉴于 MATLAB 软件在控制分析与设计中的广泛应用，本书较早介绍了如何使用 MATLAB。而且，鉴于越来越多的控制器在嵌入式计算机中实现，我们在第 4 章介绍了数字控制，并且在大量的反馈系统例子中对模拟控制器和数字控制器的效果进行了比较研究。一如从前，我们给出了一系列 MATLAB 的“m”文件用来输出本书的图形，这些文件可以在如下网页的 publications 栏目下找到：http://www.scsolutions.com/feedbackcontrol.html。

本书将实例研究放在第 10 章，其内容涉及计算机硬盘的读写头控制和用于集成电路制造工艺中快速热处理器的硅片温度控制。

本版内容根据教学规律进行了安排，有助于提高学生对控制理论的兴趣，并为教师应对反馈控制入门课程教学的挑战打下了坚实的基础。

应对挑战

在学习自动控制的过程中，学生所面对的一些挑战是长期存在的，另一些是近几年新出现的；有些挑战存在于他们整个的工科学习过程，有些则是这门相对复杂的课程中所独有的。无论挑战是已存在的还是新生的，普遍的还是特殊的，它们对本书的不断修订起到了非常关键的作用。下面逐一介绍这些挑战，并讨论我们的解决方法。

□ **挑战**　必须掌握设计方法和分析工具

设计是工程尤其是控制系统的核心。学生们发现，有机会解决实际应用问题的设

计课题会让人激动不已。但同时也会发现,由于设计问题陈述不清楚以及解决方案不唯一,设计并不容易。由于设计对学生固有的重要性和激励性,整本书都对设计问题给予了相当的重视,从头开始树立解决设计问题的信心。

在学习了建模和动态响应后,第 4 章将开始介绍设计问题。首先介绍的是反馈的基本思想,描述了它对扰动抑制、跟踪精度、参数变化时的鲁棒性的影响。随后,在根轨迹、频率响应和状态变量反馈技术的一致讨论中继续深入介绍设计方法。所有的论述旨在提供必要的知识,以找到一个在数学上便于理解的优秀反馈控制设计。

全书引用了大量的例子来比较不同设计方法所提供的设计技术的异同优劣。在集中研究实例的第 10 章,将以统一的方式采用所有方法来解决复杂的实际设计问题。

☐ **挑战** 新概念不断引入

控制是一个活跃的研究领域,因此,不断有新的概念、思想和技术涌入。其中一些内容很快就发展到每个控制工程师都必须掌握的程度。本书将同时满足学生掌握传统以及现代知识的双重要求。

在过去的每个版本中,我们都会尽力地平衡根轨迹、频率响应和状态变量设计法之间的学时分配。这一版继续强调对基本技巧的掌握,同时,也重视详细运算的计算机实现方法。考虑数字控制器在目前领域中的重要地位,我们还将提前介绍数据采样和离散控制器。虽然跳过这部分内容对全书的流畅性并无损害,但是我们认为,让学生了解计算机控制的广泛应用程度以及掌握计算机控制基本方法的简易性,是十分重要的。

☐ **挑战** 需要运用大量信息

大量的系统都要应用反馈控制,控制问题的解决方案不断增多,这意味着当今学习自动控制的学生必须掌握许多新的知识。学生们应如何在冗长复杂的理论学习中保持敏锐呢? 如何确定重点和归纳总结? 如何复习考试? 帮助学生解决这些任务是第 4 版的准则,同样在第 5 版中会继续列出。

本书的特色环节如下。

特　点	举　例
每章以总览和概述开始。从整体上说明该章主题在这个学科中的位置,并简要概括该章的内容	第 3 章开始 见第 54 页至 第 55 页
黑体段落显示,提示文章中的重要概念,也用来总结重要的设计程序	反馈的优点,见第 152 页
海报式章节归纳帮助学生复习并区分重点,简要地重申关键概念和结论	第 2 章小结 见第 45 页
设计辅助大纲。为方便查阅,将设计中和全书中用到的关系式集中列出	见参考文献后
复习题,位于每章的末尾,答案附书后,指导学生自学	第 2 章,见第 45 页

□ **挑战**　自动控制的学生来自广泛的学科

控制可应用于工程中可想到的任何领域,因此自动控制具有跨学科的特性。因此,许多学校在各个传统学科中分设了控制导论课程,而另一些学校(例如斯坦福大学)开设了一系列可以供不同学科的学生学习的课程。然而,把实例限制于单个领域内,则牺牲了反馈的广度和影响力,因此覆盖应用的整个范围是必然的趋势。本书体现了自动控制的跨学科特性,为许多最普遍的技术提供素材以方便各学科学生使用。针对在状态转移分析方面有良好背景知识的电子工程学科的学生,我们在第2章介绍了机械运动方程的列写。而针对机械工程学生,我们在第3章回顾了用于控制理论的拉普拉斯变换和动态响应。另外,我们还简要介绍了其他技术。有时,我们忽略其推导过程,而从响应的角度运用易于理解的足够的物理描述,给出物理系统的运动方程。本书介绍的物理系统实例包括计算机磁盘驱动器的读写磁头、卫星跟踪系统、汽车发动机油—气比例调节和飞机的自动导航系统。

本书概要

本书共有10章和7个附录。一些章节的末尾使用▲标出了高级或增强的选学内容。基于上述内容的实例和问题也标注了▲。附录包括了背景资料和参考文献,如拉普拉斯变换表、复变量、矩阵理论以及各章末尾复习题的答案。

第1章介绍了反馈的基本思想以及重要的设计问题。这一章还介绍了从古老的过程控制到飞行控制和电子反馈放大器的控制理论简史。希望这份简史能够阐明该领域的发展过程,介绍对其发展起到重要作用的关键人物,以此激发学生的学习热情。

第2章简要地介绍了动态建模,涉及机械、电子、电机、流体以及热力学装置。这一章可以跳过,其出发点是作为复习要点来帮助学生理清参差不齐的基础知识,或者可完全根据学生的需要来处理。

第3章阐述了用于控制理论的动态响应。尤其对于电气工程专业的学生来说,这一章的大部分内容也已经学过了。极点位置与暂态响应间的关系,以及附加零点和极点对动态响应的影响,对许多学生来说还是新知识。动态系统的稳定性在本章也会涉及。这些都需要认真学习。

第4章介绍了反馈的基本方程和传递函数,以及灵敏度和互补灵敏度方程的定义。利用这些工具,可以通过扰动抑制、跟踪精度以及误差敏感度对开环和闭环控制进行对比。根据跟踪多项式参考信号或者抑制多项式扰动的能力,系统分类可与系统类型的概念一起描述。最后,介绍经典的比例、积分、微分(PID)控制结构,探索控制器参数对系统特性方程的影响。在该章末尾的选学部分还涉及了数字控制、PID整定和时间响应敏感度。

在第4章对反馈进行概述后,本书的核心内容,即基于根轨迹、频率响应和状态变量反馈的设计方法分别在第5章、第6章和第7章进行介绍。

第 8 章更详细地开发了一些在数字计算机中实现反馈控制设计所需的工具。

第 9 章介绍非线性内容，涵盖运动方程的线性化方法、变量增益的零记忆非线性分析、描述方程的频率响应、相平面、李雅普诺夫稳定性定理和循环稳定标准。

在第 10 章里，我们将三种主要的方法整合在几个实例当中，并建立了一个可应用于现实控制设计的框架。

课程结构

本书结构灵活。多数控制专业的大一学生可能已掌握了动态方程和拉普拉斯变换，因此，第 2 章和第 3 章可用作复习。在 10 周的学期中，可以复习第 3 章，学习第 1 章、第 4 章、第 5 章、第 6 章。其中大部分的选学内容可以忽略。在第二个 10 周的学期里，可以顺利完成第 7 章和第 9 章的学习，包括选学的内容在内。若忽略选学的内容，可以选择第 8 章的部分内容进行学习。一个学期能够顺利掌握第 1 章至第 7 章，如有必要也可包含第 2 章、第 3 章的复习内容。如果时间有余，学完这些核心内容后，可以学习第 8 章数字控制的部分内容、第 9 章非线性的部分内容和第 10 章的一些实例研究。

全书也可以实行三段 10 周教学法，分为建模和动态响应（第 2 章、第 3 章）、经典控制理论（第 4 章、第 5 章、第 6 章）和现代控制理论（第 7 章至第 10 章）三个部分授课。

这两种基本的 10 周教学过程都已在斯坦福大学实践过，可应用于高年级的控制专业本科学生和没有学习过控制的航空航天类、机械工程和电子工程类一年级研究生。初级课程复习第 2 章、第 3 章并学习第 4 章至第 6 章。高级课程为研究生设计，复习第 4 章至第 6 章，并学习第 7 章至第 10 章。这些顺序安排，补充了研究生课程在线性系统方面的不足，而且是数字控制、非线性控制、最优控制、飞行器控制和智能产品设计的入门课程。许多的后续课程还包括了大量实验。在学习本课程之前，要求掌握动态系统或者电路分析和拉普拉斯变换的知识。

学习反馈控制课程的前提

本书针对所有工科专业高年级学生。对于第 4 章至第 7 章的核心内容，理解建模和动态响应是必备的。通过之前的物理学、电路和动态响应课程的学习，许多学生已经具有足够的背景知识来学习这门课程。对于需要复习的学生，第 2 章和第 3 章可以弥补这一漏洞。

理解矩阵代数是理解状态空间的基础。尽管通过之前的数学课，所有的学生都有这方面的知识，附录 C 还是列出了它的基本关系，对控制系统特定内容的运算也在第 7 章的开始部分给出。重点是线性动态系统和线性代数的关系。

补充

前述网页载有可以输出本书所有 MATLAB 图形的 m 文件，这些文件可以复制并由学生使用。

致谢

最后，我们向为反馈控制理论发展到今天这样激动人心的程度做出过贡献的学者，特别是给予我们巨大帮助和建议的学生、同事们致谢。尤其应该提到的是，我们在与斯坦福大学控制理论导论教师 A. E. Bryson、R. H. Cannon、D. B. DeBra、S. Rock、S. Boyd、C. Tomlin 和 P. Enge 的讨论过程中受益匪浅。

还要特别地感谢为本书几乎全部的习题提供答案的同学们。

G. F. F.
J. D. P.
A. E.-N.
加州斯坦福大学

目　　录

第 1 章　反馈控制纵览及简单历史回顾

自动控制介绍

动态系统的控制是一个非常普通的概念，它具有很多特性。如果一个系统由人来操作机器，例如开汽车，那么称为**人工控制**(manual control)。如果一个系统仅由机器构成，例如用恒温器调节室内温度，那么就称为**自动控制**(automatic control)。用于抑制各种未知干扰信号、保持输出稳定的系统称为**调节器**(regulator)，而用于跟踪某个参考信号的系统则称为**跟踪**(tracking)系统或**伺服**(servo)系统。控制系统还可以根据计算控制信号所使用的信息进行划分。如果控制器在计算控制信号时没有使用系统输出的测量信号，则称这个系统为**开环控制**(open-loop control)。如果测量了系统输出信号并反馈用于控制运算，则称这个系统是闭环控制或**反馈控制**(feedback control)。除了这些最基本的特性之外，控制系统还有很多重要的特点。例如，在本书中我们主要关注的是可以用**线性**(linear)、**时不变**(time-invariant)方程描述的控制过程，尽管当信号相当大时所有的物理过程都是非线性的，而且如果观察的时间足够长，物理过程的各种特性也会随时间的变化而变化。另外，我们考虑的反馈主要针对输出，但是下面一个常见的事例会表明它存在巨大局限性。在开车的时候，存在应用反馈的一个简单情形：在大雾中开车，人只能看清靠近车前的一小部分路面，而不能看到更远的情况。看前面的路就是一种预测控制的形式，这种预测的信息显然是非常有用的。如果可能，我们就应该充分地利用这种信息，但在本书研究的大部分自动控制系统的例子中，观测未来的运动轨迹或干扰都是不可能的。不管怎么样，控制设计者都应该首先研究具体的控制过程，观察能否用某种传感器预测系统需要跟踪的轨迹或需要抑制的干扰信号。如果可能，控制设计者可以将它作为早期的预测信号，并**前馈**(feed forward)给控制系统。例如对发电装置中水箱的蒸汽压力进行控制。我们可以测量外界对输出功率的需求，然后将信息前馈到水箱控制器，预先增大蒸汽的流动量，从而提高系统响应的速度。

全章概述

在这一章，我们先举一个简单而常见的例子来介绍反馈控制：用恒温器控制家

用火炉。以这个例子为背景，我们将确定控制系统的一般组成结构。在另一个例子——汽车运动控制中，我们推导系统模型的基本静态方程，并给系统模型的各元素赋值，以比较忽略动态响应时开环控制和反馈控制的性能。为了给我们的学习提供相应的背景并让读者对这一领域的发展有简单的了解，1.3 节简单地介绍了控制理论与设计的发展历史。最后，在 1.4 节简要地概括了全书的内容以及组织架构。

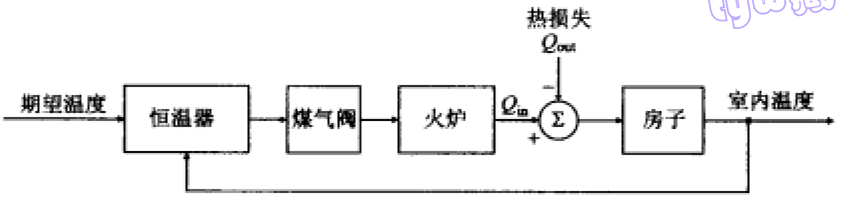
随着数字计算机的功能越来越强大而价格越来越低，计算机技术对控制设计和控制实现产生了深远的影响。有的软件（如 MATLAB）可以用于求解方程，实现与控制设计方法相关的图表算法。有的软件可以用于分析系统响应，例如学习控制的学生可以使用 Simulink® 工具。在建立了过程或控制的线性或非线性模型之后，利用这些辅助软件，我们就可以很容易地计算出系统的响应。在控制实现方面，用于计算控制信号的控制器主要是各种电子单元，因为这些器件有较大的灵活性以及较高的性价比。另外，嵌入式数字处理器的编程能力非常强大，而且其价格不断下降。因此，尽管模拟单元在实现简单方程时比数字逻辑更快速也更便宜，嵌入式数字处理器还是越来越广泛地应用于控制器的实现。在本书中，我们将用相当大的篇幅介绍计算机仿真，以适应计算机技术在控制技术中的应用趋势。

反馈控制在当今生产生活中的应用，可以说比历史上的任何时候都要广泛。例如使用全球定位系统（GPS）的飞机着陆和防撞系统的不断发展，促成了在越来越拥挤的航空区域（airspace）中导航能力发生了极大的变革。对于计算机的磁介质数据存储器件（也就是我们通常所说的硬盘），读/写磁头组件控制的跟踪误差是微米级的，其移动速度可达到 1 微秒/片。在操作其他各种各样的系统时，控制也是必不可少的，比如，从手机到大型喷气式客机，从洗衣机到如小城市般大的炼油厂，等等。事实上，很多工程师都称控制是一门隐藏性极强的技术，因为人们并未注意到它对于很多器件和系统的重要性。但毫无疑问的是，以后工程师们必然会发明越来越多与反馈控制相关的应用，尽管现在很多应用还处于幻想之中。过去 200 年来，人们对控制问题的研究已经给我们带来了庞大的知识体，包括人工控制与自动控制，而后者现在已经发展成为一门关于控制系统设计的学科，它也是本书的主题。

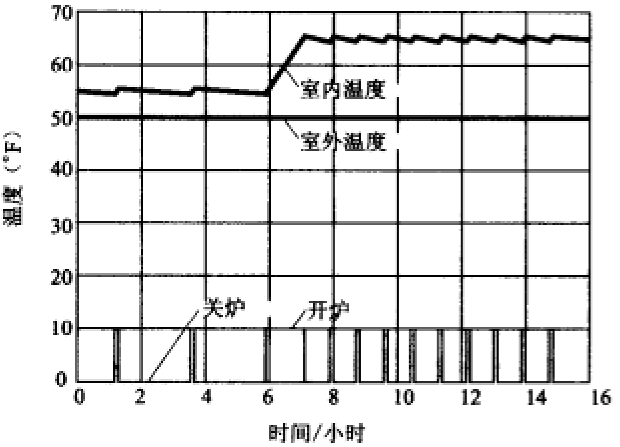
1.1 简单的反馈系统

在反馈系统中，系统通过传感器测量被控变量——例如温度或速度，然后把测量信号反馈到控制器，通过控制器对被控变量产生作用。为了阐明这个原理，下面介绍一个非常普通的例子——用恒温器控制家用火炉。这个系统的各个组成部分以及它们之间的联系如图 1-1 所示。图 1-1 中标出了系统的主要部分，并标明了信号在系统各部分间的流动方向。

根据图 1-1，我们可以定性地分析系统的工作过程。假设在给系统上电时，安装了



(a) 室内温度控制系统的组成部件框图



(b) 室内温度和火炉工作状态图

图 1-1

恒温器的房间的室内温度和室外温度都低于参考温度（也称为设定点）。恒温器将导通，控制器打开火炉煤气阀并点燃燃烧室，从而使热量 Q_{in} 以一定的速率提供给房间，这个速率必须比热量损失 Q_{out} 的速率大。这样，室内温度将会一直升高，直到稍微超过恒温器的设定点。这时候煤气炉被关闭，接着室内温度由于比室外温度高而不断下降。当温度下降到稍微低于设定点时，恒温器再次导通，就这样一直循环通断过程。典型的温度变化示意图以及煤气炉的开关示意图如图 1-1 所示。室外温度是 50℉，恒温器初始设定值为 55℉。早上 6 点，恒温器的设定温度重新设定为 65℉，随后火炉工作使温度升高到这个设定值，之后室温一直围绕设定值上下波动①。要注意房子的隔热性能是比较好的，因此火炉关闭时温度下降的速率低于火炉打开时温度上升的速率。由这个实例我们可以初步认识到基本反馈控制系统的一般组成结构，如图 1-2 所示。

这个反馈系统的中心部件是需要控制输出的**过程**（**process**）。在我们的例子中，过程就是房间，其输出是室内温度，过程的**干扰**（**disturbance**）是由房间向低温的室外流出的热量，这与房间的墙壁和房顶原料有关。（热的外流量还与其他因素相关，例如风速、门的开关等。）过程的设计很明显会对控制的效果产生显著的影响。装有瑟莫潘

① 注意在 6 点以前火炉也是开着的，按它夜间工作的规律动作。

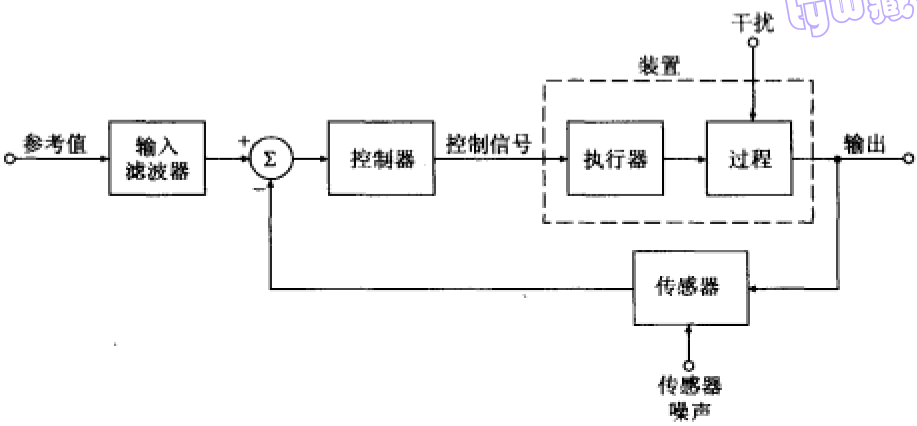


图 1-2　基本反馈系统的组成部件框图

(thermopane)双层隔热窗玻璃的隔热房间,其温度显然要比没有这些特性的房间温度容易控制得多。同样,飞机设计成人为控制的形式也使得其性能大为改进。一般地说,越早把控制问题引入到过程的设计中就越好。**执行器**(**actuator**)是可以改变过程的被控变量的装置。在上述例子中,执行器就是火炉。实际上,炉子通常还有指示灯或者打火部件,有煤气阀,还有根据炉内温度随时开关的增压风机。执行器的这些细节表明,事实上很多反馈系统包含了各种部件,而部件本身可能又属于某种反馈系统。[①] 执行器的主要问题是它能否以合适的速度和范围改变过程的输出。火炉提供给房间的热量必须比房间散失的热量多,并且当要求室温保持在较小的范围内时,火炉能够迅速地做出响应。功耗、速度和可靠性通常都比精确性重要。一般而言,过程和执行器是紧密结合在一起的,控制设计的重点就在于寻找合适的输入或控制信号,并传送到执行器。过程和执行器联合起来就称为**装置**(**plant**),而用于计算控制所需的信号的部件则称为**控制器**(**controller**)。因为电信号处理的灵活性比较好,所以尽管使用基于压缩空气的气动控制器在过程控制领域有较长的历史和重要的地位,但现在一般的控制器处理的都是电信号。随着数字技术的不断发展,由于微处理器的性价比和灵活性的提高,现在越来越多地用数字处理器实现控制器。在图 1-1 中标记为**恒温器**(**thermostat**)的部件,其作用主要是测量室内温度,在图 1-2 中被称为**传感器**(**sensor**),传感器不可避免会含有噪声。因为实际应用中被控变量和测量变量有时不完全相同,所以传感器的选择和安装对控制设计来说都是非常重要的。例如,尽管我们希望把整个房子的温度作为一个整体来进行控制,但恒温器却只安装在某个特定的房间,那里的温度可能和屋内其他房间的温度相同,当然也可能不同。例如,如果恒温器设定为 68℉,

① Jonathan Swift(1733)这样说:"博物学家观察到,一只跳蚤身上有更小的跳蚤以它为寄主;而这些小跳蚤又还有更小的跳蚤去叮咬它们;如此下去,无穷无尽。"

但是被安装在客厅燃烧正旺的火炉旁，这样的话工作在书房的人也许就会感觉到寒冷。①② 另外，除了安装位置，传感器的其他重要特性是测量的精确度、低噪声、高可靠性和良好的线性度。传感器的作用是将物理变量转变为电信号，然后传送给控制器使用。系统一般还包括一个**输入整形滤波器**(**input shaping filter**)，它在系统中的作用是将参考信号转化为电信号，以便后端控制器处理。有些情况下输入整形滤波器可以适当修整输入的参考信号，以改善系统的响应性能。最后，系统中还有一个**比较器**(**comparator**)，用于计算参考信号和传感器输出之间的偏差，并将所测得的系统偏差测量信号传送给控制器。

本书将介绍分析反馈系统及其各组成部件的方法，描述一些最重要的设计技术，工程师可以通过这些技术应用反馈原理来解决控制问题。本书还将研究反馈的特殊优势，虽然它会增加系统的复杂性，但总的说来是利大于弊。然而，尽管上述的温度控制系统很容易理解，但它是非线性的。我们可以看到，火炉只处在两种状态：不是开就是关。为了介绍线性控制，我们再举一个例子。

1.2 反馈的分析

通过对一个常见系统的简化模型的定量分析，很容易证明反馈的作用，下面介绍汽车速度控制系统(见图 1-3)。为了解析地研究这个问题，需要为该系统建立一个数学**模型**(**model**)，用各变量的一组定量关系来建立该模型。在该例子中，忽略了车的动态响应，而只考虑车的稳态行为。(动态特性将在后面章节中作为主要内容之一进行介绍。)另外，假设在系统的速度范围内，可以将系统的各种关系近似为线性的。当汽车以65mile/h(1mile=1609.34m)的速度在水平路面行驶时，我们发现，调速气门每改变 1°的角度(我们的控制变量)，则会引起速度变化 10mile/h。根据对汽车上坡、下坡的观察，我们发现，当坡度改变 1%时，测得速度变化 5mile/h。测速器可以精确到 1mile/h，这可以认为是准确的。利用这些关系，可以绘制出整个装置的**框图**(**block diagram**)(见图 1-4)，图 1-4 以图的形式表现了以上的数学关系。在图 1-4 中，各连线表示信号的流动，每个框都可以看作一个理想放大器，用框内标记的值乘以输入端的信号，然后得出输出信号。为了对两个或更多的信号进行加法运算，我们用信号线流入一个加法器来表示，加法器用叠加符号 $\sum$ 外加一个圆圈表示。在加法器的每个箭头旁边有一个数学符号(+或-)，它表示这个信号是加入总的信号还是从总的信号中减去。在分析中，设定参考速度

① 本书一位作者在重新装修厨房时，刚好把新的烤炉装在了书房恒温器所在墙的另一面。现在，如果在寒冷的天气里做饭开烤炉，他就会在书房受冻，除非重新设定恒温器的温度值。

② 有一个故事讲的是：一个硝化甘油厂的新员工，其工作是人工控制生产过程中某个关键部分的温度。他开始就被告知“保持温度读数低于 300 度。”在一次例行巡查中，检查员感觉到炉子已经加热到危险状况了，却发现那个工人拿着温度计在冷水龙头下试图使其读数降到 300 度。他们赶紧在爆炸发生前逃出了工厂。其寓意是：有时候自动控制优于人工控制。

为 65mile/h,然后比较在有反馈和没有反馈的情况下,1%的坡度对输出速度的影响。

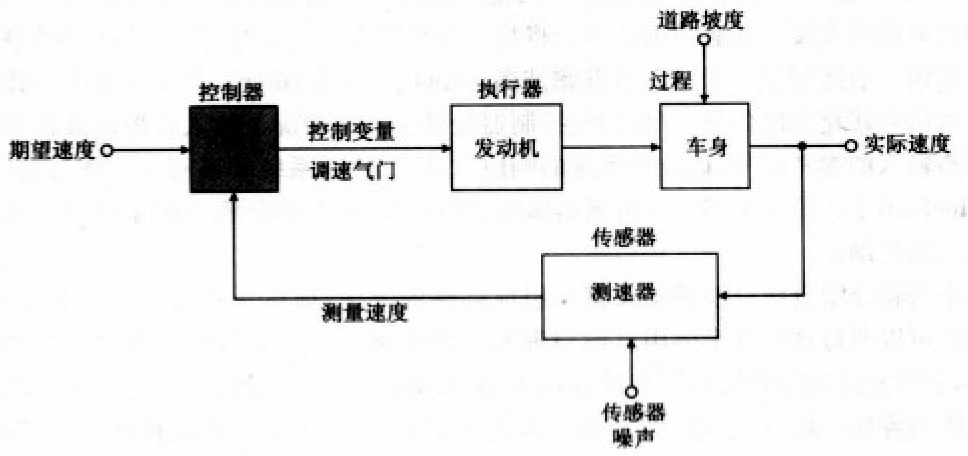


图 1-3　汽车速度控制的组成部件框图

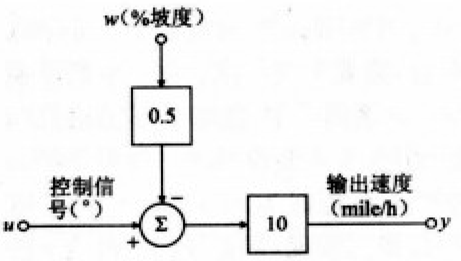


图 1-4　速度控制装置的框图

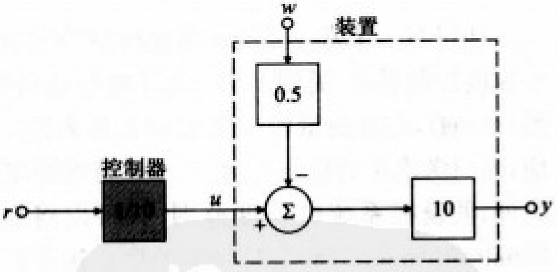


图 1-5　开环速度控制

第一种情况下,如图 1-5 所示,控制器没有利用测速器的读数,而是令 $u=r/10$。这是一个**开环控制系统(open-loop control system)**的应用实例。开环这个术语表明这样一个事实:在框图中信号流过的路径没有闭合的通道或回路。在这个简单例子中,开环输出速度为

$$y_{ol}=10(u-0.5w)=10\left(\frac{r}{10}-0.5w\right)=r-5w$$

其输出速度的误差是

$$e_{ol}=r-y_{ol}=5w$$

而误差百分比为

$$\%\text{error}=500\frac{w}{r} \tag{1-1}$$

如果 $r=65$ 并且路面是水平的,那么 $w=0$,输出速度将会是 65mile/h 而没有误差。然而,如果 $w=1$,即路面坡度为 1%,则输出速度是 60,系统有 5mile/h 的误差,也就是 7.69% 的速度误差。对于 2% 的坡度,速度误差将变成 10mile/h,对应于

15.38%，依此类推。这个例子表明，当 $w=0$ 时系统没有误差，但这一结果决定于控制器的增益刚好是装置增益数 10 的倒数。在实际情况下，装置的增益通常会改变，如果是这样的话，用以上的控制方法显然不能避免系统误差。在开环控制中，如果装置增益有误差，则由此引起的速度误差百分数与装置增益误差百分数是相等的。

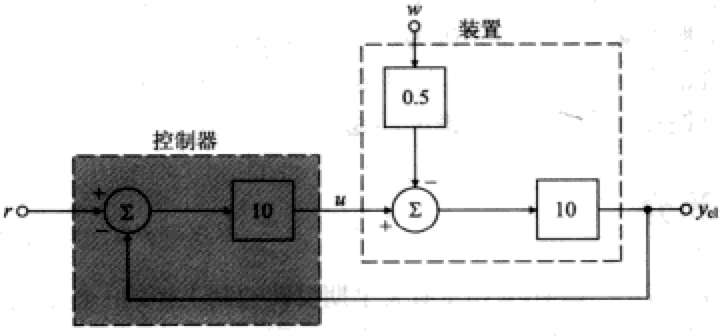


图 1-6　闭环速度控制

图 1-6 的框图采用了反馈的方法，图中控制器的增益被设定为 10。回顾一下，这个例子中的传感器已经被假定为理想传感器，其框图在图中没有画出。这样，系统的方程是

$$y_{cl} = 10u - 5w$$
$$u = 10(r - y_{cl})$$

联立这两个方程，可以得到

$$y_{cl} = 100r - 100y_{cl} - 5w$$
$$101y_{cl} = 100r - 5w$$
$$y_{cl} = \frac{100}{101}r - \frac{5}{101}w$$
$$e_{cl} = \frac{r}{101} + \frac{5w}{101}$$

因此，反馈减小了速度误差对坡度的灵敏度，与开环系统相比小了一个因子 101。需要注意的是，现在汽车行驶在水平路面都会有一个小小的速度误差，因为即使 $w=0$，

$$y_{cl} = \frac{100}{101}r = 0.99r \text{ mile/h}$$

只要环路增益（装置和控制器增益的乘积）很大①，系统误差就会很小。若再次考虑参考速度为 65mile/h，并比较坡度为 1%时的速度，输出速度的百分误差是

$$\%\text{error} = 100\frac{\frac{65\times100}{101} - \left(\frac{65\times100}{101} - \frac{5}{101}\right)}{\frac{65\times100}{101}} = 100\frac{5\times101}{101\times65\times100} = 0.0769\%$$

---

① 为了预防误差过大，实际应用中通常重设参考值，在这个例子中可以设为 $\frac{101}{100}r$，这样系统输出就刚好达到真实期望值。

在本例中，反馈的作用减小了系统对坡度干扰以及装置增益的速度灵敏度，这是因为系统的环路增益为100。遗憾的是，环路增益不能无限制地增大。当考虑了动态响应时，反馈的高环路增益可能会使系统响应变得更差，甚至引起系统不稳定。这个两难问题可以通过下面一个类似的情形得到说明，在这个情形下我们可以很容易地改变系统的反馈增益。例如，如果有人试着把扩音器的增益调得太大，则声音系统必然会发出令人不舒服的刺耳声。这是因为整个反馈环路的增益(从说话者到话筒再通过放大器返回到说话者)太大了。如何获得尽可能高的增益而又不破坏系统的稳定性，这就是大多数反馈控制设计所要考虑的问题。

1.3　历史简介

O. Mayr(1970)写了一本书，介绍了有关早期反馈控制工作的一些有趣的故事，他介绍的主要是古代的机械装置控制。其中最早的两个事例是调节水钟时对流速的控制，以及对酒容器的液位的控制(以使得不管从容器中取了多少杯酒，容器始终保持是满的)。液体流速的控制也可以归结为液位控制，因为在压力相同的情况下，从小孔流出的液体流量将是一样的，这也就是说要保持流速不变则要保持液体相对于流出孔的高度为常量。古代发明的一种液位控制装置在今天仍在使用(例如，在抽水马桶的水箱中就有这种液位控制装置)，我们称之为**球阀**(**float valve**)。当液面下降时，浮球也跟着下降，因此液体流入槽中；随着液面上升，液体流量减小甚至被截断。图1-7说明了球阀的工作原理。要注意的是，在这里传感器和执行器不是分立的器件，而是包含在精心制作的浮球和给料管联合体中。

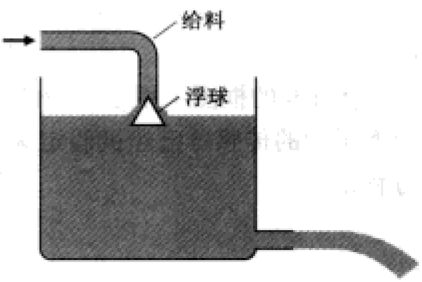


图1-7　液位和流量的早期控制

Mayr描述的事例中还有一个比上例较晚的发明——由Cornelis Drebbel在大约1620年设计，用于控制加热孵卵器中火炉的温度[①](如图1-8所示)。火炉有一个箱子，用于围控火苗，箱子顶部设有通气管并安装了一个烟道挡板。在火箱里面是双层隔板的孵卵箱，隔板间充满水以均衡整个孵卵器的受热。温度传感器是一个玻璃容器，里面装的是酒精和水银，安装在孵卵箱周围的水套中。当火加热箱子和水的时候，酒精体积膨胀，提升杆往上浮，因此降低了通气管上的烟道挡板。如果孵卵箱过冷，则酒精收缩，烟道挡板打开，因此火势变旺，提供更多的热量。期望温度通过调整提升杆的长度来设定，对某个给定的酒精膨胀度设定烟道挡板的开度。

他所记录的控制系统中还有一个比较著名的问题，那就是探求一种方法来控制转动轴的转动速度。很多早期的工作(Fuller，1976)似乎都因为希望自动地控制风力磨

① 法国人在100年前已经应用孵化器来照顾早产婴儿。

面机的磨石速度而展开。在试用过的各种方法中，最有前途的一种方法运用了一个锥摆，又称**飞球式调速器**(**fly-ball governor**)，用于测量磨面机的速度。驱动风车的帆布可以用绳索和滑轮卷起或放开，就像一扇窗帘，以保持固定的速度。然而，飞球式调速器只是在大约 1788 年 James Watt 的实验室把这些原理应用于蒸汽发动机后才闻名于世。图 1-9 所示的是一个早期版本的蒸汽机，图 1-10 和图 1-11 展示了飞球调速器的近距离图片及其各组件的草图。

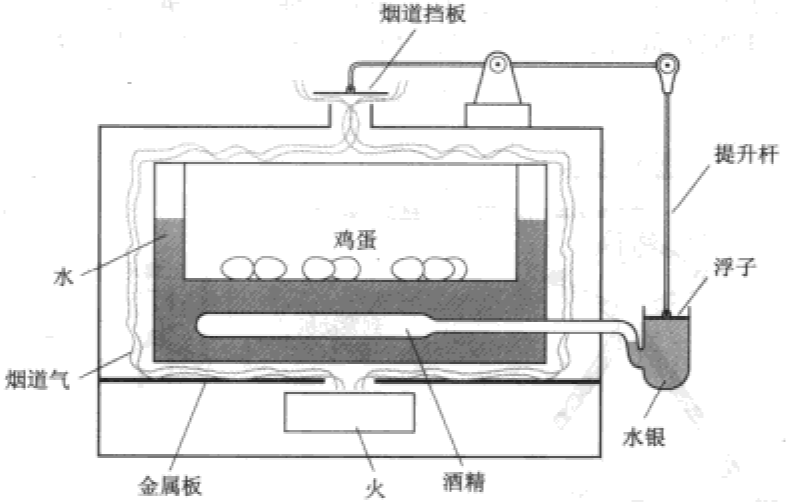


图 1-8　用于孵化鸡蛋的 Drebbel 孵卵器(摘自 Mayr 的书，1970)

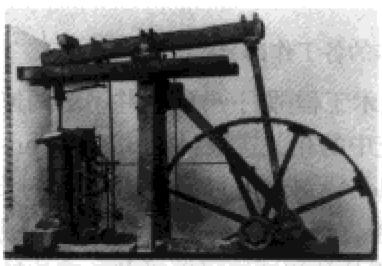


图 1-9　来自 James Watt 工作室的蒸汽机(英国皇家著作权，伦敦科学博物馆)

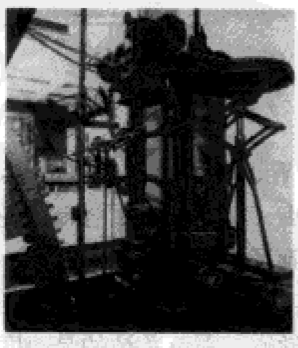


图 1-10　带飞球式调速器的 Watt 蒸汽机(1789—1800)(英国皇家著作权，伦敦科学博物馆)

飞球式调速器(也称离心调速器)的工作描述起来是很简单的。假设发动机工作在平衡状态。两只重球绕着中心轴旋转，整体看起来就像一个圆锥，并且圆锥母线与转动轴的角度已经确定。当突然给发动机施加负载时，发动机的速度降低，调速器的球随之掉下一定角度形成一个小一些的圆锥。这样，球的角度就可以用于自动检测

输出速度。然后，这个动作通过控制杆打开蒸汽室的主阀门（也就是执行器），让更多的蒸汽进入发动机，补偿了大部分因负载而减小的速度。为保持蒸汽阀停留在新的位置，必须使飞球在一个不同的角度继续旋转，这也就意味着带负载时系统的速度并非精确地和原来一样。我们在前面的速度控制例子中就看到过这种作用效果，但例子中反馈控制引起的系统误差非常小。要精确地恢复系统以前的速度，就要求重置系统的期望速度，改变从杠杆到阀门的杆的长度。后来的发明家给系统引进了一些机械装置，用于求解速度误差的积分，然后给系统提供自动重置。在第4章我们将分析这些系统，证明这样的积分器确实能够使反馈系统在恒定干扰的作用下稳态误差达到0。

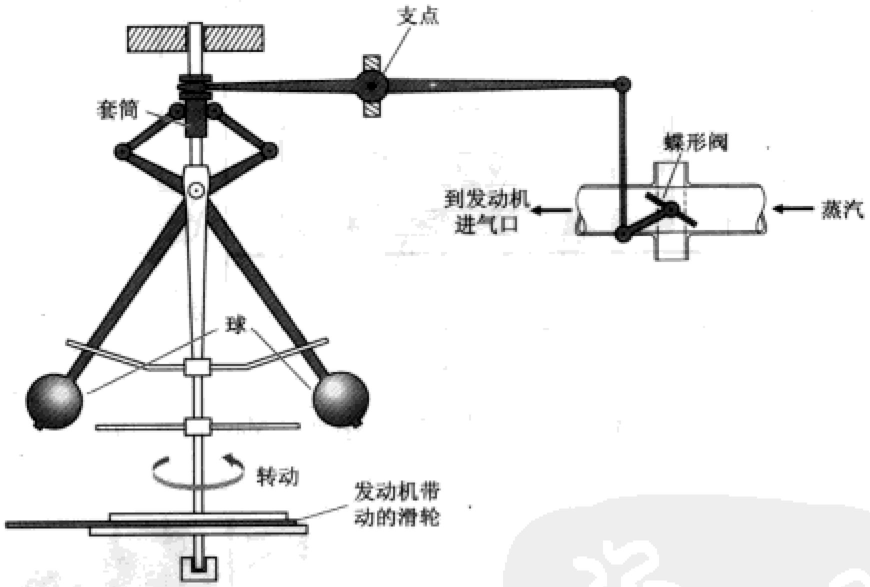


图1-11　飞球式调速器的各工作部分

由于Watt是一名实践科学家，与他之前的技术工程师们一样，他并不对调速器做理论分析。Fuller(1976)追溯了控制理论在早期的研究中的相关进展，从1673年Christian Huygens追溯到了1868年James Clerk Maxwell。Fuller特别看重G. B. Airy所做的贡献。Airy在1826年～1835年任剑桥大学数学和天文学教授，在1835年～1881年是格林威治天文台皇家天文学家。Airy关注的是速度控制，因为如果他的望远镜可以逆着地球旋转的方向转动，那么他就可以长期地观察某个固定的恒星。但应用了离心调速器之后，他发现望远镜的运动非常不稳定——“这个机器（如果可以这样表达）变得相当混乱”（Airy，1840；引自Fuller，1976）。根据Fuller的说法，Airy是讨论反馈控制系统不稳定性的第一人，也是用微分方程分析这种系统的第一人。这些工作标志着反馈控制动力学研究的开端。

对反馈控制稳定性的第一次系统研究应该是在 J. C. Maxwell(1868)[①]的论文《关于调速器》(*On Governors*)给出的。在论文中,Maxwell 推演了调速器的微分方程,在平衡点附近对方程进行线性化,并声明:系统的稳定性决定于某个特定的方程(特征方程)的根是否有负实部。Maxwell 尝试推导多项式系数必须满足的条件,以使方程的根具有负实部。但他仅仅在二阶方程和三阶方程中取得了成功。1877 年亚当斯奖讨论的问题就是确定稳定性判据,这个奖最终被 E. J. Routh 获得。[②] 在他的文章中提出的稳定性判据,至今仍占有重要的地位,控制工程师们仍然在学习如何应用这种简单的技巧。分析特征方程一直都是控制理论的基础,直到后来贝尔实验室的 H. S. Black 发明了电子反馈放大器。

Routh 的文章发表不久,俄国数学家 A. M. Lyapunov(李雅普诺夫)(1892)开始研究运动稳定性的方程。他主要研究运动的非线性微分方程,也包括线性方程的一些结果,这和 Routh 判据是等价的。他的工作是现在控制理论中状态变量法的基础,但是直到大约 1958 年他的成果才被引入控制文献中。

Bellman 和 Kalaba(1964)撰写了一篇有趣的文章,简要地描述了反馈放大器的发展,这篇文章主要是关于 H. W. Bode(1960)的一次谈话。随着电子放大器的应用,第一次世界大战以后的几十年内远距离电话已经成为可能。然而,随着距离的增加,电能的损耗也在增加,除了增大传输线的直径,还需要增加放大器的数量来弥补损失的能量。但是,大量的放大器又引发了严重的失真,因为那时候用于放大器的都是电子管,管子有微小非线性,但相乘的次数多了之后必然会产生严重失真。为了解决这个问题,必须减小失真,Black 提出了反馈放大器。就像我们前面提到的自动速度控制,越是希望减小误差(或是失真),我们就越要应用反馈。从执行器到装置,到传感器,再到执行器的环路增益必须设计得非常大。但随着增益的增大,反馈回路会变得不稳定。这又变成了 Maxwell 和 Routh 的稳定性问题,只是其动力学方程比较复杂(高达 50 阶的微分方程都是很常见的),这为 Routh 判据的使用造成了麻烦。因此,贝尔实验室的通信工程师们开始转向复数域分析,因为他们熟悉频率响应的概念和复变量代数。1932 年,H. Nyquist(奈奎斯特)发表了一篇文章,描述了如何通过环路频率响应图表确定系统的稳定性。根据这一理论,Bode(1945)(伯德)提出了一种设计反馈放大器的方法,这种方法同样在反馈控制的设计中得到了广泛应用。第 6 章将详细讨论奈奎斯特图和伯德图。

随着反馈放大器的发展,反馈控制在工业过程中应用越来越普遍。通常,工业过程不仅非常复杂,而且很多是非线性的,在执行器和传感器之间有相对较长的时间延迟。在这个领域发展起了**比例积分微分(PID)**控制。PID 控制器是由 Callender 等人在 1936 年第一次提出的。这门技术主要依靠大量的实验工作,以及对系统动态特性的简单线性近似,通过一些标准的实验指导现场应用,并最终整定满意的 PID 控制器参数。(PID 控制器在第 4 章介绍。)在这个时期发展起来的还有飞机导航和控制设计技术,尤

---

① Fuller(1976)给出了有关 Maxwell 的贡献的介绍。

② 在剑桥大学,E. J. Routh 在他那一届(1854)中学术上是排第一的,J. C. Maxwell 排第二。1877 年,Maxwell 在亚当斯奖委员会担任职务,委员会选了稳定性问题作为那一年的主题。

其重要的是用于测量飞机飞行高度和飞行速度的传感器的发展。McRuer(1973)记述了这方面控制理论的有趣事例。

第二次世界大战对反馈控制领域的发展起了巨大的推动作用。在美国，工程师和数学家们在麻省理工学院辐射实验室整合了他们的知识，包括 Bode 的反馈放大器理论和过程控制中的 PID 控制以及 N. Wiener(1930)提出的随机过程理论等。其中的成果就是关于伺服机制的一整套设计技术的发展，于是，伺服机制作为控制机制开始被提出来。James 等人(1947)在辐射实验室档案中对这些工作进行了收集和发表。

控制系统设计的另一个主要方法是 1948 年 W. R. Evans(伊凡恩)提出的，他当时的工作是飞机导航和控制。他遇到的问题大多都和不稳定或中性稳定的动态特性有关，这使得频率分析法难以使用，因此他重新回到特征方程的研究方向上来，这是 70 多年前 Maxwell 和 Routh 工作的基础。然而，Evans 还是发现了新的方法和规则，使得人们可以刻画特征方程的根在某个参数改变时的运动轨迹。他的方法既适合于设计，也适合于稳定性分析，我们称为**根轨迹法(root locus)**，至今这种方法在控制设计中仍然非常重要。Evans 的根轨迹法将在第 5 章介绍。

20 世纪 50 年代，包括美国的 R. Bellman 和 R. E. Kalman 以及前苏联的 L. S. Pontryagin 在内的几位科学家，重新回到利用常微分方程模型研究控制系统的方向上来。其中大部分工作都是受人造地球卫星控制需求的推动，这一领域的模型通常可以用常微分方程描述。支持这方面研究继续发展的是数字计算机，计算机能够处理在那之前 10 年几乎不可想象的复杂运算。(现在，任何工科学生都可以利用台式计算机完成这些运算。)大约在这段时期，Lyapunov 的工作被翻译成控制语言，在二战期间由 Wiener 和 Phillips 开创的最优控制，这时被推广为基于变量的微积分的非线性系统的最优轨迹线。1960 年，刚刚成立的自动控制国际联盟就在莫斯科召开的第一次会议上介绍了其中的大部分成果。[①] 这些成果没有使用频率响应以及特征方程的概念，而是以“正常”形式或“状态”形式直接研究常微分方程，并广泛地使用计算机作为辅助。尽管研究常微分方程的基础早在 19 世纪末就已经建立，但我们还是把这种方法称为**现代控制(modern control)**，以区别于用 Bode 的复数变量法和其他方法进行研究的**经典控制(classical control)**。从 20 世纪 70 年代直到今天，自动控制的研究应用一直处于发展之中，并寻求利用每一种技术的最佳特点。

就这样，我们看到了当今世界的这种情形，控制原理被广泛地应用于各种学科，涵盖了工程科学的每一个分支。要做好一名控制工程师，必须知道作为这一领域基础的基本数学理论，在解决面临的问题时还必须能够选择最好的设计方法。随着计算机的广泛应用，工程师必须懂得如何应用自己的知识指导并检验计算机所做的计算。[②]

---

① Bryson 和 Denham 在 1962 年展示了为使用最少的时间达到给定的海拔高度，超音速飞机实际运动轨道应该是朝某一点俯冲。这个与直觉不符的结论后来被持怀疑态度的飞行员在飞行测试中得到证明。之后最优控制得到了很大的推进。

② 如果想知道更多关于控制发展的历史，请查看 IEEE 的 *Control Systems Magazine* 1984 年 11 月和 1996 年 6 月的调查报告。

1.4 全书概述

本书主要介绍单输入单输出控制系统设计的重要技术。第 2 章回顾了建立动态系统模型必须使用的一些技巧。其中包括机械系统模型和机电系统模型。第 2 章还简要介绍了非线性模型的线性化,并将在第 9 章详细讨论。

第 3 章和附录 A 讨论应用拉普拉斯变换进行动态响应分析,以及时间响应与传递函数零极点之间的关系。这一章还讨论了系统稳定性的临界问题,介绍了 Routh 判据。

第 4 章介绍了反馈的基本方程和特点。先给出了反馈对系统各种特性的影响,包括扰动抑制、跟踪精度、系统对参数的灵敏度和动态响应。然后讨论了比例积分微分(PID)控制的思想。这一章还介绍了传递函数的数字实现,以及线性时不变控制器的数字实现,因此我们可以比较数字控制器和模拟控制器的作用效果。

在第 4 章内容的基础上,第 5、6、7 章介绍了在更复杂的动态系统中实现控制目标的技术方法。这些方法包括根轨迹、频率响应,以及状态变量法。各种方法的目的都是一样的,而且在设计中各有优缺点。这几种方法基本上是互补的,控制工程师们必须理解各种方法,以便在设计控制系统时能够得到最好的控制效果。

在第 4 章的基础上,第 8 章更加深入地探讨了用数字计算机实现控制器的想法。这一章将告诉读者如何将在第 5 至第 7 章得到的控制方程离散化,系统采样如何引起迟滞而降低系统的稳定性,还有为了达到良好的控制效果,采样速率应该是系统频率多少倍。分析采样系统需要另一个分析工具—— z 变换法,因此,本章还将介绍 z 变换及其使用方法。

在某种程度上,大多数实际系统都是非线性的。然而,本书中大部分的分析和设计方法又都是基于线性系统的。第 9 章解释了为什么只研究线性系统就可以满足大部分系统的要求,以及怎样设计线性系统才能够很好地控制被控系统中大部分常见的非线性特性。这一章的内容包括饱和非线性、描述函数和抗漂移控制器。

如何将所介绍的设计技术应用到实际的复杂问题中,将在第 10 章讨论。对于一些特殊的案例,我们将应用多种方法对其进行研究。

如今,控制设计师们广泛地使用计算机辅助控制系统设计的软件,相关软件可以通过商业途径获得。而且,学生们可以获得很多控制系统设计软件中的教育版程序。在这方面应用最多的软件是 MathWorks 公司的 MATLAB 和 Simulink。本书中大量使用了 MATLAB 程序,帮助说明解决问题的方法以及解决一些需要计算机辅助解决的问题。书中很多图片都由 MATLAB 生成,生成这些图片的文件可以从以下网址免费获得:**http://www.scsolutions.com/feedbackcontrol.html**。我们希望学生和老师们可以好好利用这些文件,它们可以帮助我们学习怎样使用计算机方法解决控制问题。

当然,本书没有涉及的内容还有很多。比如,没有将设计方法扩展到多变量控制,其系统有多个输入或多个输出,只是在第 10 章关于快速热处理的个案研究中简单地

涉及了它。另外，最优控制也只是在第7章有简单的介绍。

本书也没有详细介绍使用实际硬件对书中的理论进行实验检验和模拟，而这又是检验某个设计是否可行的最好方法。本书关注的是如何为线性受控对象模型分析和设计线性控制器——不是因为我们认为这就是设计的全部，而是因为这是掌握反馈基本思想的最好方法，通常也是获得满意设计的第一步。我们相信这一章的材料可以给大家提供一个理解这门学科的基础，在此基础上大家可以掌握更为复杂更为现实的知识，甚至可以建立自己的设计方法，就像我们前面列举的人一样给我们创造出新的知识。

小结

- ❑ **控制**(control)就是使系统变量追随某个特定值的过程，这个特定值称为**参考值**(reference value)。如果系统设计为跟随变化的参考值，则称之为**跟踪控制**(tracking control)或**伺服机构**(servo)。如果系统设计为不管受到什么干扰都要保持输出恒定，则称之为**调节控制**(regulating control)或**调节器**(regulator)。
- ❑ 根据控制所使用的信息定义了两种不同的控制，根据其系统结构为这两种控制命名。在**开环控制**(open-loop control)中系统不测量输出，所以也就不对控制信号进行修正以使输出符合参考信号。在**闭环控制**(closed-loop control)中系统有传感器测量输出，并利用**反馈**(feedback)的测量值作用于控制变量。
- ❑ 一个简单的反馈系统由以下部分组成：**过程**(process)，其输出是需要控制的对象；**执行器**(actuator)，其输出引起过程的输出变化；**参考信号**(reference)；**输出传感器**(output sensor)，用于测量系统输出；**控制器**(controller)，计算用于指导执行器工作的控制信号。
- ❑ **框图**(block diagram)形象地表现系统结构，简单方便地描述控制系统中信息的流动。标准的框图展现了控制系统中各信号之间的数学关系。
- ❑ 控制的理论和设计技术可以分成两类：**经典控制**(classical control)法运用拉普拉斯变换或傅里叶变换，直到大约1960年这些方法一直是控制设计的主要方法；而**现代控制**(modern control)法基于状态变量形式的常微分方程，在20世纪60年代开始被引进控制领域。现在已经发现两者之间有很多联系，优秀的工程师必须熟悉这两种技术。

复习题

1. 反馈控制系统的主要组成部件有哪些？
2. 传感器的作用是什么？
3. 指出一个好的传感器必须具备的三个重要特性。
4. 执行器的作用是什么？
5. 指出一个好的执行器必须具备的三个重要特性。

6. 控制器的作用是什么？指出控制器的输入和输出。
7. 什么样的物理变量可以用霍尔效应传感器直接测量？
8. 什么样的物理变量可以用测速器测量？
9. 为什么大多数传感器的输出都是电信号，即使被测变量是其他物理量？

习题

1-1 为下面的反馈控制系统画出其组成部件的框图：

(a) 汽车的人工驾驶系统；

(b) Drebbel 孵卵器；

(c) 用浮球和阀门实现的水位控制；

(d) 带飞球式调速器的瓦特蒸汽机。

在每个系统中，指出以下部件的位置，并给出与各信号相对应的单位：

- ☐ 过程
- ☐ 过程期望输出信号
- ☐ 传感器
- ☐ 执行器
- ☐ 执行器输出信号
- ☐ 控制器
- ☐ 控制器输出信号
- ☐ 参考信号
- ☐ 误差信号

要注意的是，在很多情况下同样的物理器件可能用于实现这其中的几种功能。

1-2 了解你家里或办公室的恒温器的物理原理并描述其工作过程。

1-3 一个用于制造纸张的机器如图 1-12 所示。其中有两个参数使用了反馈控制：一个是纤维的稠密度，控制的是从压头箱流到造纸网的厚坯的浓度；另一个是从干燥机出来的最终产品的含水量。成浆池流出造纸原料由白水稀释，白水由造纸网回流得到并受控制阀控制(CV)。系统中有仪表提供稀释后原料浓度的读数。在机器后面的干燥部分有湿度传感器。给下面两个控制系统画出信号图并确定题 1-1 列出的 7 个系统组成部分。

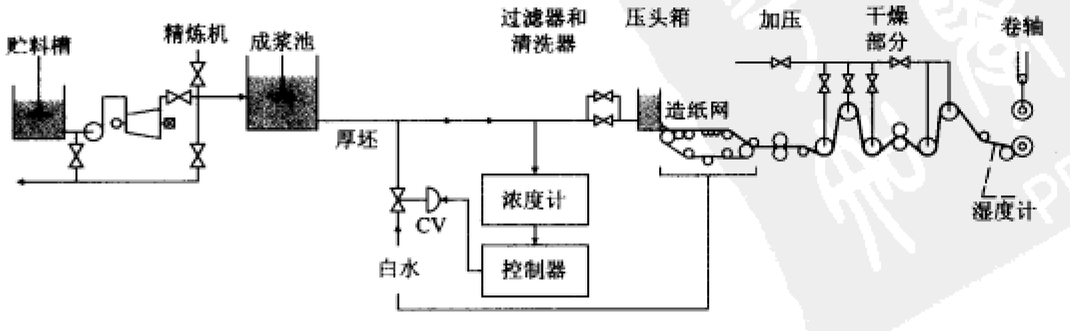


图 1-12 造纸机(选自 Åström，1970，p. 192，复制得到许可)

(a) 浓度控制；

(b) 湿度控制。

1-4　人们身体中的很多变量也处于反馈控制之中。下面列出了几个被控变量，请画图表示出被控过程，测量这些变量的传感器，引起这些变量增大或减小的执行器，实现整个反馈回路的信息通道，以及扰乱这些变量的干扰。关于这个问题你可能需要参考一本百科全书或人体生理学的教科书。

(a) 血压；

(b) 血糖浓度；

(c) 心率；

(d) 眼睛瞄准角；

(e) 眼睛瞳孔直径。

1-5　画出电冰箱或汽车空调系统中温度控制的组成部件图。

1-6　画出电梯位置控制的组成部件图。简要说明你会如何检测电梯的位置。考虑一个制造比较粗糙但测量部分比较优良的系统，你认为其传感器需要怎样的精度？假设你设计的系统用于高楼的电梯，由于电梯绳索拉伸的长度是电梯负载的函数，要求系统能够自动调整保证位置准确。

1-7　反馈系统要求能够测量被控变量。因为电信号可以很容易地进行传送、放大和处理，我们通常希望传感器的输出是与被测变量成比例的电压或电流信号。对于以下物理量各描述一种传感器，以给出与这些物理量成比例的输出。

(a) 温度；

(b) 压力；

(c) 液位；

(d) 沿着管道的液体(或沿着动脉的血液)的流速；

(e) 直线位置；

(f) 转动位置；

(g) 线速度；

(h) 角速度；

(i) 移动加速度；

(j) 转矩。

1-8　题1-7列出的每个变量都可以用于反馈控制。请给出一种执行器，要求能够接收电信号输入，并用于控制上述变量。给出执行器输出信号的单位。

第 2 章　动 态 模 型

动态模型介绍

反馈控制的总体目标就是，不管参考变量的轨迹怎样变化，也不管动态过程受到什么样的外部干扰或者是系统参数如何改变，都要利用反馈原理使动态过程的输出变量精确地跟随我们给出的参考变量。为了达到这个复杂的目标，我们需要完成许多简单、独立的步骤。其中第一个步骤就是获取被控过程的数学描述（称为**动态模型（dynamic model）**）。对于控制工程师来说，"模型"这个词也就相当于一组描述过程的动态行为的微分方程。我们可以根据基础物理学原理获取系统的模型，也可以通过运用器件的原型，测量原型对输入的响应，利用得到的数据建立分析模型。在这一章中我们只关注如何根据物理理论建立模型。另外有些书专门介绍如何用实验的方法确定系统的模型（我们有时候称之为系统辨识），第 3 章将会对这些技术进行简单的介绍。实际上，即使是根据物理原理推导而得到的系统模型，细心的控制系统设计者还是会通过一些具体实验来验证模型的精确度。

在很多情况下，对复杂过程的建模不仅非常困难而且花费巨大，特别是在必须建立过程的测试原型并对其进行测试的时候。但是，作为介绍性的一章，我们关注的将是一些最普通的物理系统，介绍与这些系统建模相关的最基本的原理。这一章还会提及一些更为全面的参考资料以及一些专门研究建模的书籍，以供希望深入学习相关知识的读者参考。

在以后的章节中，我们将深入研究多种分析方法，以便处理系统的运动方程以及它们的解，帮助我们达到设计反馈控制系统的目的。

全章概述

建立动态模型的第一个步骤就是写出系统的运动方程。2.1 节通过详细的探讨和列举相关实例，告诉我们如何列写机械系统的运动方程。此外，这一节还将介绍如何使用 MATLAB 求取简单系统对阶跃输入的时间响应。

电路和电机系统的建模分别在 2.2 节和 2.3 节介绍。如果想知道更多其他的建模实例，读者可以阅读可选内容——2.4 节和 2.5 节。2.4 节扩充了对热和流体系统的建

模讨论，2.5 节则包含了一些更为复杂的机械系统的建模实例。

由建模得到的微分方程通常都是非线性的。对比线性系统，求解非线性系统是一项更具挑战性的工作，同时，通常使用系统的线性模型就已经能够满足分析设计的要求，因此书中前面章节介绍的重点是线性系统。然而，第 2 章也简单涉及了如何对简单的非线性特性进行线性化。对线性化的详细探讨以及对非线性系统的分析，请读者阅读第 9 章。

为了更好地关注如何建立系统的数学模型，对于这一章推导得出的运动方程，我们并没有介绍求解这些方程的计算方法，而是把这些内容推迟到了第 3 章。

2.1　机械系统动力学

求取机械系统的数学模型或**运动方程**(**equation of motion**)，其基石就是牛顿定律，

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a} \tag{2-1}$$

式中：

$\boldsymbol{F}$ 为作用到系统每一个部位的所有力的矢量和，单位为牛顿(N)或英磅(lb，1 lb＝0.45 kg)；

$\boldsymbol{a}$ 为系统每一个部位相对于惯性系(即相对于恒星既不加速也不旋转的参考系)的矢量加速度；通常称为**惯性加速度**(**inertial acceleration**)，单位为 m/s^2 或 ft/s^2 (1 ft＝0.30 m)；

m 为物体的质量，单位为千克(kg)或斯勒格(slug，1 slug＝14.59 kg)。

这里请注意式中的黑体字母，在本书中，我们用黑斜体的字母表示矩阵或向量，或者是向量方程。

在国际单位制中，1 N 的力将引起 1 kg 质量的物体产生 1 m/s^2 的加速度。在英制单位中，1 lb 的力将引起 1 slug 质量的物体产生 1 ft/s^2 的加速度。物体的重量是 mg，其中 g 是重力加速度($=9.81\ m/s^2=32.2\ ft/s^2$)。在英制单位中通常用物体的重量(单位为 lb)来描述物体的质量，这两者是成比例的。这时如果要使用牛顿定律，则先要求出以斯勒格(slug)表示的质量，然后把重量值除以 g 即可。因此，一个物体重 1 lb 则意味着它的质量为 1/32.2 slug。1 slug＝1 $lb\cdot s^2/ft$。在国际单位制中，质量的标准单位是 kg。

应用牛顿定律需要建立一个合适的坐标，方便我们测量物体的运动(位移、速度以及加速度)，并画出自由体受力图来分析物体的受力情况，然后根据式(2.1)写出物体的运动方程。如果选择惯性系作为坐标描述物体的位移，则上述过程会有所简化，因为这样牛顿定律中的加速度就是坐标位移对时间的二阶导数。

例 2.1　一个简单的系统：巡行控制模型

(a) 写出图 2-1 所示汽车的速度和前向运动的运动方程，假设发动机提供的拉力为 u(如图所示)。对推导得出的微分方程实行拉普拉斯变换，并求出输入 u 和输出 v 之间的传递函数。

(b) 若输入初始值为 $u=0$，在 $t=0$ 时刻跳变为常数 $u=500$ N，并一直持续下去，请用 MATLAB 求出汽车的速度响应。假设车的质量 m 为 1000 kg，$b=50$ N・s/m。

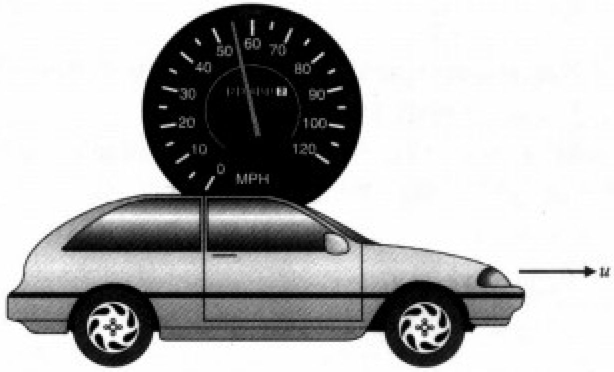


图 2-1　巡行控制模型

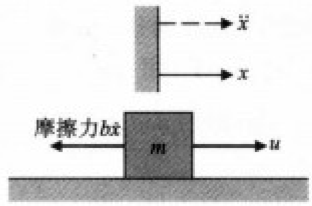


图 2-2　巡行控制的自由体受力图

解：

(a) **运动方程**：为简单起见，我们假设车轮的转动惯量可以忽略不计，并假设阻碍汽车运动的阻力和车子的速度成正比。① 这样，汽车模型可以近似地做些简化，如图 2-2的自由体受力图所示，图中定义了参考坐标，画出了物体受到的外力（用粗实线表示），标明了物体的加速度（用虚线表示）。车的位移 x 表示从图中画出的参考线到物体的距离，并取向右为位移的正方向。因为汽车的位移是在惯性参考系中测量得到的，所以在这样的情况下惯性加速度就是 x 的二阶微分（即 $\boldsymbol{a}=\ddot{x}$）。根据式(2-1)，我们可以得到汽车的运动方程。因为摩擦力的作用方向与汽车运动方向相反，因此将它的方向画成车运动方向的反方向，在式(2-1)中应表现为负作用力。结果如下

$$u - b\dot{x} = m\ddot{x} \tag{2-2}$$

或者

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} = \frac{u}{m} \tag{2-3}$$

在自动巡行控制的情形中，我们关心的是物体运动的速度 $v(=\dot{x})$，因此我们把运动方程写成

$$\dot{v} + \frac{b}{m}v = \frac{u}{m} \tag{2-4}$$

求解这个方程的方法将在第 3 章中进行详细地介绍。在此我们简单地说明，若输入信号的形式为 $u=U_0e^{st}$，我们可以假设上述方程的解有这样的形式 $v=V_0e^{st}$。这样，由于 $\dot{v}=sV_0e^{st}$，则微分方程可以写成

$$\left(s+\frac{b}{m}\right)V_0e^{st} = \frac{1}{m}U_0e^{st} \tag{2-5}$$

把 e^{st} 这一项省略掉，于是得到

$$\frac{V_0}{U_0} = \frac{\frac{1}{m}}{s+\frac{b}{m}} \tag{2-6}$$

① 如果速度用 v 表示，空气摩擦力正比于 v^2。在这个简化模型中，我们已经对它进行了线性近似。

可以做上述操作的原因将在第3章给出，上面的式子通常可写成

$$\frac{V(s)}{U(s)}=\frac{\frac{1}{m}}{s+\frac{b}{m}} \tag{2-7}$$

像式(2-4)的这种表示方式称为**传递函数**(**transfer function**)，传递函数在以后章节中会有更广泛的应用。请注意，事实上我们用 s 代替了式(2-4)中的 d/dt。①

(b) **时间响应**：系统的动力学特性在 MATLAB 中可以用行向量来描述，行向量包含的是描述系统传递函数的分子或分母多项式的系数。这个问题中的传递函数已经在(a)中给出。在这个例子中，分子(用 num 表示)仅仅是一个数字，因为分子 s 的阶数是 0，因此 num $=1/m=1/1000$；分母(用 den 表示)含有 s 项，$s+\frac{b}{m}$，故分母向量为

$$\text{den}=\begin{bmatrix}1 & \frac{b}{m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{50}{1000}\end{bmatrix}$$

在 MATLAB 中阶跃函数用于计算线性系统对单位阶跃输入的时间响应。由于系统是线性的，因此可以把阶跃函数计算得到的结果乘以阶跃输入的值，这样计算出输入为任意幅值的阶跃响应。同样，也可以先把 num 乘以阶跃输入的值再求阶跃响应。

以下指令计算了 500N 阶跃输入的时间响应，并画出了时间响应图。阶跃响应曲线如图 2-3 所示。

```
num= 1/1000;              %   1/m
den= [1   50/1000];       %   s  +  b/m
sys = tf(num*500, den);   % step gives unit step response, so num*500
                              gives u = 500N.
step(sys);                % plots the step response
```

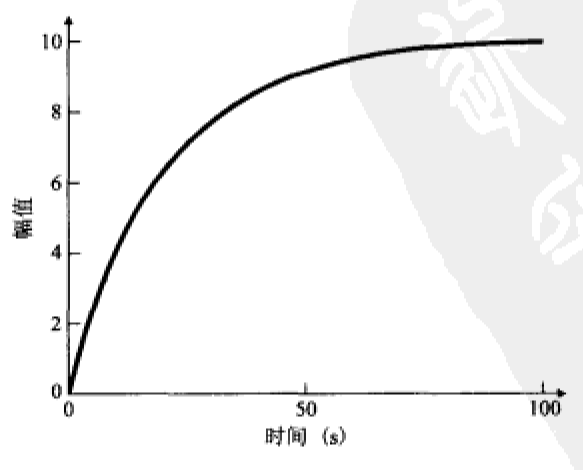


图 2-3　汽车速度对阶跃输入 u 的响应

① 用算子来表示微分是在大约 1820 年由 Cauchy 在拉普拉斯变换的基础上获得的，而拉普拉斯变换大约在 1780 年提出。第 3 章我们将介绍如何应用拉普拉斯变换推导传递函数。参考资料：Gardner and Barnes，1942。

牛顿定律也可应用于多个物体的情形。在这种情况下画出每个物体的自由体受力图非常重要，还要在图中表示出各物体所受的外力以及系统中物体之间相互作用的内力。

例 2.2 一个双物体系统：悬架模型

图 2-4 是一个汽车悬架系统。假设竖直方向上每个轮子承受四分之一车重量，请写出汽车和轮子运动的运动方程。由汽车一个轮子的悬架组成的系统通常被称为四分之一车模型。假设这个模型中车的质量是 1580 kg，包括了四个轮子，其中每个轮子的质量是 20 kg。在一个轮子的正上方放置一个已知质量的物体（如一个人），然后测量车身偏移的距离，我们发现 $k_s=130\ 000$ N/m。测量车轮对同样质量物体的偏移距离，我们得到 $k_w\cong1\ 000\ 000$ N/m。利用 3.3 节的结论、图 3-16b和定性的观察发现，当这个人跳跃时汽车的响应符合 $\zeta=0.7$ 的曲线，由此得出 $b=$ 9800 N · s/m。

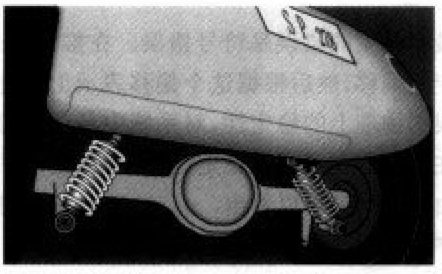


图 2-4 汽车悬架

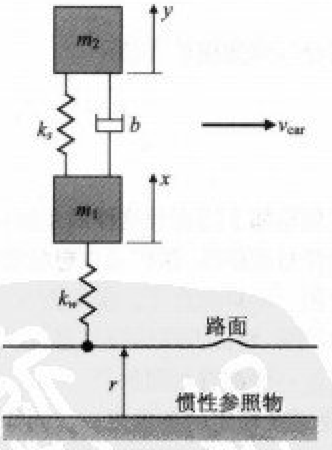


图 2-5 四分之一车模型

解：系统可以近似为图 2-5 所示的简化系统。两个物体的坐标（x 和 y，参考方向如图所示），表示的是物体偏离平衡位置的距离。平衡位置是指弹簧因受到物体重力的作用偏离自然状态，并重新达到稳定后物体的位置。减震器在原理图中用阻尼器符号表示，其摩擦常数为 b。假设减震器产生的力的大小正比于两个物体相对位移的变化率，即 $b(\dot{y}-\dot{x})$。物体的重力也可以在自由体受力图中表示，但是，它的作用仅仅是使 x 和 y 产生恒定的偏移。通过定义 x 和 y 为物体偏离平衡位置的距离，我们就不需要再考虑重力的作用。

车悬架作用于两个物体的力正比于物体之间的相对位移，比例系数为常数 k_s。图 2-6画出了各个物体的自由体受力图。注意两物体之间的弹簧对两个物体的作用力大小是相同的，但方向相反，对于阻尼器也是同样的情况。物体 m_2 的正位移 y 将引起弹簧对 m_2 的作用力，方向如图所示；同时也有一个

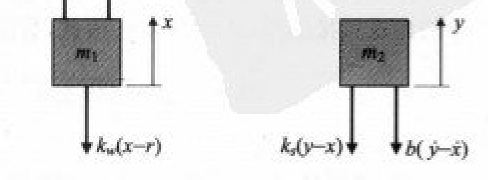


图 2-6 悬架系统的自由体受力图

力作用于 m_1，方向如图所示。然而，m_1 的正位移 x 将引起弹簧 k_s 对 m_1 产生作用力，方向和图2-6所示的受力方向相反，这由弹簧力中 x 项前面的负号表示。

位置比较低的弹簧 k_w 表示轮胎的可压缩性，由于它没有足够的阻尼（决定于速度的力），因此在模型中没有包含阻尼器。这个弹簧产生的力正比于轮胎被压缩后物体的位移，其中有一部分力作为平衡力，用于支持 m_1 和 m_2 克服重力。如果定义 x 为偏离平衡位置的距离，那么只有在以下两种情形下弹簧会产生力：一是路面不平坦（r 改变，平衡状态其值为 0），二是车轮弹起（x 改变）。如果这个简化的车行驶在不平坦的路上，则导致 $r(t)$ 的值不是恒定的。

如前所述，地球的引力对每个物体都产生恒定的作用力，然而，这个作用力已经被忽略了，因为弹簧产生了大小相等、方向相反的力。在竖直弹簧系统中，如果满足以下两个条件则重力通常可以忽略：(1)位置坐标定义为偏离仅有重力作用时的平衡状态的距离，(2)在分析中，弹簧力为弹簧受到扰动后对平衡状态时的力的变化量。

对每个物体应用式(2-1)，注意某些力作用在每个物体的负方向，由此得到

$$b(\dot{y}-\dot{x})+k_s(y-x)-k_w(x-r)=m_1\ddot{x} \tag{2-8}$$

$$-k_s(y-x)-b(\dot{y}-\dot{x})=m_2\ddot{y} \tag{2-9}$$

进行简单变换后得到

$$\ddot{x}+\frac{b}{m_1}(\dot{x}-\dot{y})+\frac{k_s}{m_1}(x-y)+\frac{k_w}{m_1}x=\frac{k_w}{m_1}r \tag{2-10}$$

$$\ddot{y}+\frac{b}{m_2}(\dot{y}-\dot{x})+\frac{k_s}{m_2}(y-x)=0 \tag{2-11}$$

在列写如上述方程这样的系统方程时，我们最容易犯的错误是符号错误。在推导的过程中，为保持符号正确性，我们可以想象物体发生了一定的偏移，然后根据这个偏移表示出由此产生的力的作用。一旦获得了系统的方程，我们就可以根据物理上的稳定性，对系统中各项的符号进行快速地检测，验证方程的符号是否正确。我们将在 3.7 节学习系统稳定性，一个稳定的系统其相同的变量一般都有相同的符号。对于上述系统，由式(2-10)可以看出，$\ddot{x}$、$\dot{x}$ 和 x 项的符号都为正，这是系统稳定的条件之一。同样，在式(2-11)中 $\ddot{y}$、$\dot{y}$ 和 y 项的符号都是正的。

我们运用前面介绍的方法，求出系统的传递函数。用 s 代替微分方程中的 d/dt 得到

$$s^2X(s)+s\frac{b}{m_1}(X(s)-Y(s))+\frac{k_s}{m_1}(X(s)-Y(s))+\frac{k_w}{m_1}X(s)=\frac{k_w}{m_1}R(s)$$

$$s^2Y(s)+s\frac{b}{m_2}(Y(s)-X(s))+\frac{k_s}{m_2}(Y(s)-X(s))=0$$

进行相关的代数运算后，得到传递函数

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{k_w b}{m_1m_2}\left(s+\frac{k_s}{b}\right)}{s^4+\left(\frac{b}{m_1}+\frac{b}{m_2}\right)s^3+\left(\frac{k_s}{m_1}+\frac{k_s}{m_2}+\frac{k_w}{m_1}\right)s^2+\left(\frac{k_w b}{m_1m_2}\right)s+\frac{k_w k_s}{m_1m_2}} \tag{2-12}$$

为了得到数值表示式，我们用全车质量 1580 kg 的四分之一，即 $m_2=375$ kg，代入式子。轮子的质量直接测得 $m_1=20$ kg。因此，数值表示的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1.31e06(s+13.3)}{s^4+(516.1)s^3+(5.685e04)s^2+(1.307e06)s+1.733e07} \tag{2-13}$$

在一维旋转系统中应用牛顿定律时，需要把式(2-1)修正为

$$M=I\alpha \tag{2-14}$$

式中，

M 为对物体质心的所有外力矩的和，单位为 N·m 或 lb·ft；

I 为对物体质心的惯性矩，单位为 kg·m² 或 slug·ft²；

α 为物体的角加速度，单位为 rad/s²。

例 2.3　旋转运动：人造卫星姿态控制模型

人造卫星（如图 2-7 所示）通常需要进行姿态控制以使得天线、传感器以及太阳能电池板保持正确的方向。天线通常指向地球某个特定的位置，而太阳能电池板则必须面向太阳以获取最大的功率。为了逐步掌握三轴姿态控制系统，我们有必要先研究单轴控制。列写这个系统的单轴运动方程。

解：图 2-8 描述了这种状况，其中系统的运动仅仅是环绕垂直纸面的轴转动。描述卫星方向的角度 θ 必须在惯性参考系中测量，也就是一个没有角加速度的参考系。控制力来自喷射流对质心产生的力矩 $F_c d$。卫星还可能受到小的干扰力矩 M_D，这主要由太阳能电池板受到不对称的太阳压强而造成。应用方程(2-14)得到运动方程：

$$F_c d + M_D = I\ddot{\theta} \tag{2-15}$$

这个系统的输出量 θ 由所有输入转矩的二重积分产生，因此这种类型的系统通常称为**二重积分装置（double-integrator plant）**。和式(2-7)的推导类似，我们得出传递函数如下

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{I}\frac{1}{s^2} \tag{2-16}$$

式中，$u = F_c d + M_D$。对于以上形式的系统，我们通常称之为 $\boldsymbol{\frac{1}{s^2}}$ **装置（$\boldsymbol{\frac{1}{s^2}}$ plant）**。



图 2-7　通信卫星（Space Systems/Loral 提供）

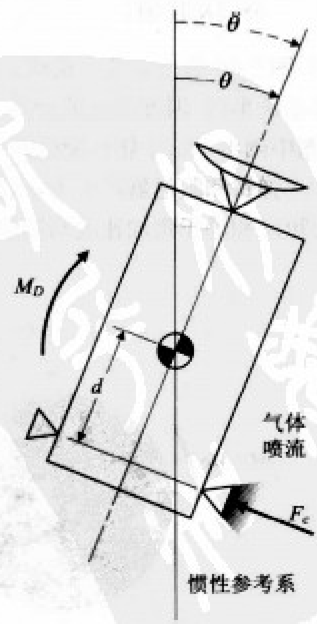


图 2-8　卫星控制原理图

在很多情况下，系统在实际当中可能会有一定的柔性，例如图2-9所示的硬盘驱动读/写磁头，系统的柔性可能会对控制系统的设计过程带来某些问题。如果在传感器和执行器的位置间有一定的柔性，则会对设计过程造成特殊的困难。因此，我们通常需要在建立模型的时候包含这个柔性，即使系统看起来是相当刚性的。

例 2.4　柔性：硬盘驱动器的灵活读/写

假设在图2-9中的读磁头和驱动电机之间有一定的柔性，求出关于读磁头的运动和作用到基座的力矩的运动方程。

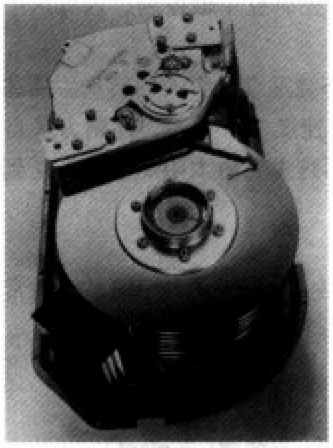


图 2-9　硬盘读写机构（Hewlett-Packard 公司提供图片）

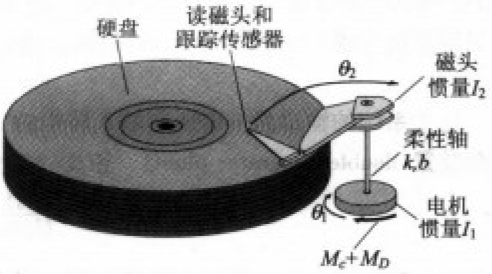


图 2-10　硬盘读写磁头模型的原理图

解：图2-10给出了这个机构主要部分的动态模型原理图。这个模型在动态特性上与图2-5的谐振系统类似，因此系统的运动方程也与式(2-10)和式(2-11)类似。图2-11是系统的自由体受力图，图中画出了每个物体所受的力矩。关于物体所受力矩的讨论和例2.2相同，只是在前一个例子中由弹簧和阻尼器产生力，而在本例中是力矩作用在每个转动惯量上。由式(2-14)可知，所有外力矩之和等于角加速度与转动惯量之积，化简得

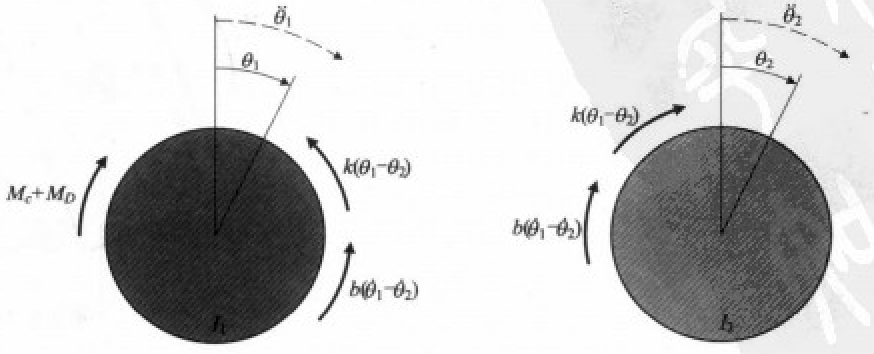


图 2-11　硬盘读写磁头自由体受力图

$$I_1\ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = M_c + M_D \tag{2-17}$$

$$I_2\ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \tag{2-18}$$

为简单起见，忽略干扰力矩 M_D 和阻尼系数 b，我们得到从施加的力矩到读操作的运动的传递函数

$$\frac{\Theta_2(s)}{M_c(s)} = \frac{k}{I_1 I_2 s^2\left(s^2 + \frac{k}{I_1} + \frac{k}{I_2}\right)} \tag{2-19}$$

我们还可以求出受到力矩直接作用的转动惯量的运动(θ_1)，在同样的简化条件下，其传递函数为

$$\frac{\Theta_1(s)}{M_c(s)} = \frac{I_2 s^2 + k}{I_1 I_2 s^2\left(s^2 + \frac{k}{I_1} + \frac{k}{I_2}\right)} \tag{2-20}$$

在很多情况下，传感器和执行器总是安装在一个柔性体中的相同位置或不同位置，这时候上面两种情形可以视为典型。我们把式(2-19)描述的传感器和执行器之间的情形称为“非并置”情形，而式(2-20)描述的则称为“并置”情形。在第5章你会发现控制一个传感器与执行器之间有柔性的系统(非并置情形)远比控制传感器与执行器严格地联合在一起的系统(并置情形)要困难得多。

有一类特殊的系统，旋转体的一点在惯性参考系中是固定的，例如钟摆，这时候如果应用式(2-14)，则 M 是对固定点的所有力矩之和，I 是物体对固定点的转动惯量。

例 2.5 旋转运动：钟摆

(a) 写出图 2-12 所示单摆的运动方程，假设单摆的质量集中在摆的末端。

(b) 当输入 T_c 为 1 N·m 的阶跃输入时，用 MATLAB 确定 θ 的时间关系曲线图，假设 $l=1$ m，$m=0.5$ kg，$g=9.81$ m/s^2。

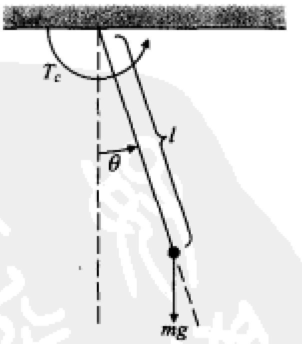


图 2-12 单摆

解：

(a) **运动方程**：单摆对支点的转动惯量为 $I=ml^2$。对支点的力矩之和包括由重力产生的力矩和外部施加的力矩 T_c。根据式(2-14)，运动方程为

$$T_c - mgl\sin\theta = I\ddot{\theta} \tag{2-21}$$

通常写成以下形式：

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{T_c}{ml^2} \tag{2-22}$$

由于式中含有 $\sin\theta$ 项，因此上述方程是非线性的。第9章有对非线性方程的比较全面的讨论。在本例中，如果单摆的运动幅度足够小，则有 $\sin\theta \cong \theta$，这样就可以将式(2-22)线性化为

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{T_c}{ml^2} \tag{2-23}$$

如果没有外加力矩，则式(2-23)表示谐波振荡，固有频率[①]为

① 落地式大摆钟的钟摆周期期望为精确的 2 s，那么摆长应为多长？

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{2-24}$$

和推导式(2-7)类似，得出系统传递函数如下

$$\frac{\Theta(s)}{T_c(s)} = \frac{\frac{1}{ml^2}}{s^2 + \frac{g}{l}} \tag{2-25}$$

(b) **时间关系曲线图**：在 MATLAB 中用一组包含传递函数分母和分子多项式系数的行向量来描述系统的动态特性。在本例中，分子(用 num 表示)只是一个数字，因为它只含有 s 的 0 次项，因此

$$\text{num} = \frac{1}{ml^2} = \frac{1}{(0.5)(1)^2} = [2]$$

分母(用 den 表示)含有 s 的非 0 次项为($s^2+\frac{g}{l}$)，其行向量有三个元素：

$$\text{den} = [1\quad 0\quad \tfrac{g}{l}] = [1\quad 0\quad 9.81]$$

系统的时间响应由 MATLAB 的阶跃响应函数 step 获得。MATLAB 指令如下：

```
t = 0:0.02:10;          % vector of times for output, 0 to 10 at 0.02 increments
num = 2;
den = [1   0   9.81];
sys = tf(num,den);      % defines the system by its numerator and denominator
y = step(sys,t);        % computes step responses at times given by t
plot(t, 57.3*y)         % converts radians to degrees and plots step response
```

得出时间关系曲线图如图 2-13 所示。

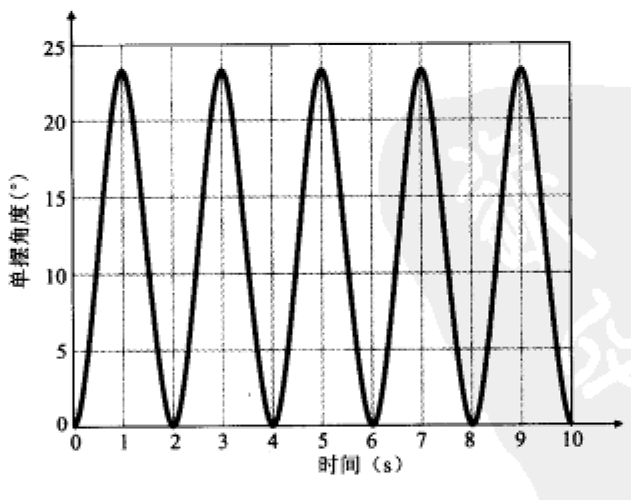


图 2-13　单摆在单位阶跃力矩作用下的响应

就像上面的最后一个例子(例 2.5)，我们得到的运动方程通常都是非线性的。解这样的方程要比解线性方程困难得多，并且与由线性模型推导得来的各种运动形式相比，由非线性模型推导出来的各种运动更难分类。因此，对模型进行线性化然后运用

线性分析方法是很有效的。通常线性模型和线性分析仅仅用于控制系统的设计阶段(事实上控制的作用通常可以使系统保持在线性范围)。如果基于线性分析的控制系统具有了期望的性能,那么还可以对系统进行更进一步的分析或精确的数值仿真,在模型中包含所有的非线性特性以便验证系统性能。第 9 章对这些观点会有更详细的讨论。

2.1.1 总结:推导刚体的运动方程

推导刚体运动方程所需的物理知识完全由牛顿运动定律给出,具体方法如下。

(1) 分配变量如 x 和 θ,变量必须能够而且有效地描述物体的任意位置。

(2) 画出每个元件的自由体受力图。表示出作用在每个物体上的所有力并画出它们的参考方向。还要表示出每个物体的质心对惯性参考系的加速度。

(3) 应用牛顿定律,根据具体情形选择平移[式(2-1)]和/或旋转[式(2-14)]形式。

(4) 联立各方程,消去内部作用力。

(5) 独立方程的个数和未知量的个数应该相等。

应用式(2-1)时,如果适当地选取参考方向,可能会使联立方程消去内部作用力的过程得到简化。在 2.5 节例 2.18 的复杂动态系统中,我们会看到更清楚的例子。一般来说,我们可以尝试交替方向,然后估计消去内部作用力的过程所需的运算量。在不同参考方向的基础上应用牛顿定律得到的方程组可能会相差甚远,但在进行相关处理后,你通常会发现最后的方程都是等价的。

2.2 电路模型

在控制系统中常常用到电路,因为电信号的操作与处理相对比较容易。虽然控制器越来越多地用数字逻辑实现,但很多功能仍然使用模拟电路。模拟电路比数字电路的速度快,对于大多数简单的控制器来说,用模拟电路实现会比数字电路便宜。另外,机电控制的功率放大器、数字控制的消锯齿预滤波器等都必须是模拟电路。

电路就是包括电压源、电流源和其他电子元件(如电阻、电容、电感等)的互连网络。在电路中,一种重要的结构单元是运算放大器(op amp)[①],这也是一种复杂的反馈系统。一些重要的反馈系统设计方法就是由设计高增益、宽频带反馈放大器的设计者提出的,主要在 1925~1940 年的贝尔实验室。电气、电子元器件同样在电动机械能量转换设备中扮演重要角色,例如电动机、发电机和电传感器。作为简单的介绍,我们不可能全面引申出电的物理原理,也不可能对所有重要的分析方法进行全面的回顾。我们将定义一些变量,通过典型的元件和电路来介绍与这些变量相关的关系,并介绍一

① Oliver Heaviside 引入数学算子 p 来表示求导运算,这样 $pv = dv/dt$。拉普拉斯变换也采用了这一思想,使用了复变量 s。Ragazzini 等人(1947)证明了一个理想的高增益电子放大器可以实现关于拉普拉斯变换中变量 s 的任意“运算”,因此,将这些放大器称为运算放大器,通常简称 op-amp。

些用于求解所得方程的最为有效的方法。

线性电路元件的符号以及它们的电流电压关系见图 2-14。无源电路由电阻、电容、电感的互连网络组成。在电子学中，我们还加入了有源器件，包括二极管、晶体管和放大器。

电路的基本方程——基尔霍夫定律如下。

基尔霍夫电流定律（KCL）：流出一个节点的电流的代数和等于流入这个节点的电流的代数和。

基尔霍夫电压定律（KVL）：在电路中环绕一个闭合回路一周的所有电压的代数和为零。

对于含有众多元器件的复杂电路，列写方程的时候必须要细心而且有条理。在众多方法之中，我们选择比较常用而且有效的方法——**节点分析法（node analysis）**进行介绍。先选择一个节点作为参考点，并假设其他节点的电位都是不知道的。理论上参考节点的选择是任意的，但在实际电路中公共端或接地端通常是标准的选择。然后，应用电流定律（KCL）对每个节点列写关于未知量的方程。通过图 2-14 中的元件等式，在方程中消去我们不关心的未知量，只留下选择的未知量。如果电路中含有电压源，我们必须对这个电压源使用电压定律（KVL）。例 2.6 介绍了节点分析法的应用。

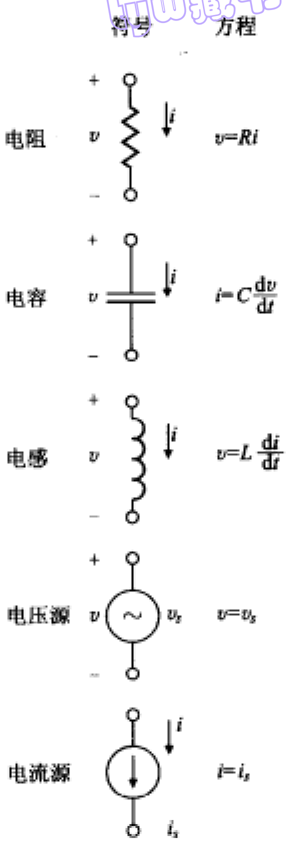


图 2-14　电路元件

例 2.6　T 型电桥方程

确定图 2-15 所示电路的微分方程。

解：我们选择节点 4 作为参考节点，节点 1，2，3 的电位 v_1，v_2 和 v_3 都是未知的。首先我们得出简化的 KVL 关系

$$v_1 = v_i \tag{2-26}$$

对节点 2 应用 KCL，得

$$-\frac{v_1-v_2}{R_1}+\frac{v_2-v_3}{R_2}+C_1\frac{dv_2}{dt}=0 \tag{2-27}$$

对节点 3 应用 KCL，得

$$\frac{v_3-v_2}{R_2}+C_2\frac{d(v_3-v_1)}{dt}=0 \tag{2-28}$$

以上三个方程描述了这个电路。

基尔霍夫定律还可以运用在含有**运算放大器（operational amplifier）**的电路中。运算放大器的简化电路如图 2-16a 所示，其原理图符号见图 2-16b。如果放大器的正输入端在原理图符号中没有表示出来，则假设已经接地，即 $v_+=0$，这时用图 2-16c 的简化

符号表示。在控制电路的应用中，通常假设运算放大器是理想的，即 $R_i=\infty, R_0=0, A=\infty$。因此理想运算放大器的方程相当简单，即

$$i_+ = i_- = 0 \tag{2-29}$$

$$v_+ - v_- = 0 \tag{2-30}$$

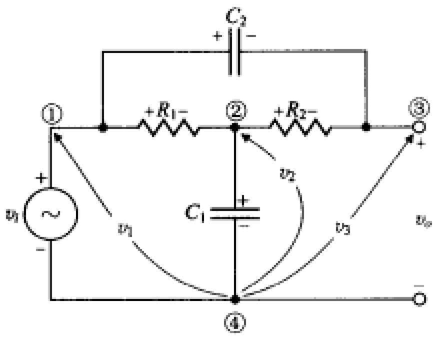
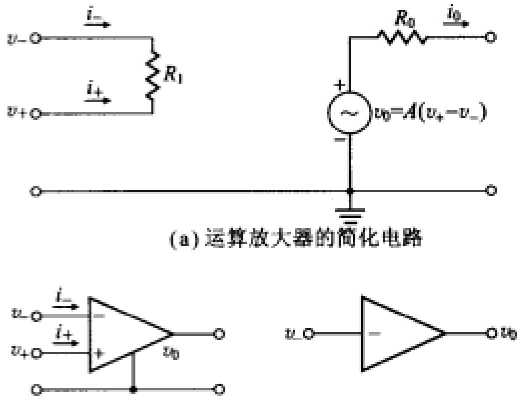


图 2-15　T 型电桥



(a) 运算放大器的简化电路

(b) 运算放大器的原理图符号　(c) $v_+=0$时的简化符号

图　2-16

放大器的增益通常假设为非常高，以致其输出电压 v_{out} =满足以上方程的任意值。当然，实际的放大器只是近似地满足这些方程，除非需要精确地描述运算放大器，否则我们都假设所有的运算放大器都是理想的。本章末尾的几个问题会给出更为实际的模型。

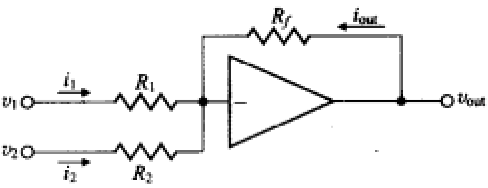


图 2-17　加法运算放大器

例 2.7　加法运算放大器

求出图 2-17 所示电路的方程和传递函数。

解：式(2-30)要求 $v_-=0$，因此电流 $i_1=\frac{v_1}{R_1}$，$i_2=\frac{v_2}{R_2}$，$i_{out}=\frac{v_{out}}{R_f}$。为满足式(2-29)，则 $i_1+i_2+i_{out}=0$，由此得出 $\frac{v_1}{R_1}+\frac{v_2}{R_2}+\frac{v_{out}}{R_f}=0$，于是

$$v_{out} = -\left[\frac{R_f}{R_1}v_1 + \frac{R_f}{R_2}v_2\right] \tag{2-31}$$

由上式我们知道电路的输出是对输入电压的反向加权和。因此这个电路称为**加法器**(**summer**)。

另一个在控制技术中比较重要的电路是积分运算放大器。

例 2.8　积分器

求图 2-18 所示电路的传递函数。

解：在这个例子中方程是微分方程，由方程(2-29)和(2-30)得到

$$i_{in} + i_{out} = 0 \tag{2-32}$$

因此

$$\frac{v_{in}}{R_{in}} + C\frac{dv_{out}}{dt} = 0 \tag{2-33}$$

方程(2-33)可以写成积分的形式

$$v_{out} = -\frac{1}{R_{in}C}\int_0^t v_{in}(\tau)d\tau + v_{out}(0) \tag{2-34}$$

在方程(2-33)中应用运算符号 $d/dt = s$,得到传递函数(假设初始状态为0)为

$$V_{out}(s) = -\frac{1}{s}\frac{V_{in}(s)}{R_{in}C} \tag{2-35}$$

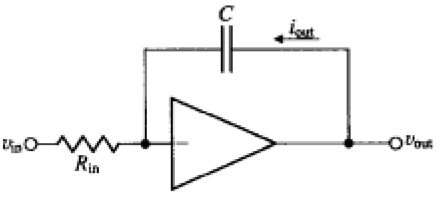


图 2-18 运放积分器

显然,理想运算放大器在电路中执行的是积分运算,所以这个电路被简称为**积分器(integrator)**。

2.3 电机系统模型

要理解大多数电机执行器和传感器的工作过程,首先要知道电路和磁场相互作用的两种方式。如果 i 安的电流流过长 l 米的导线,并与磁场成直角放置在磁通密度为 B 特斯拉(tesla)的磁场中,那么导线会受到力的作用,力的方向与 i 和 B 形成的平面成直角,大小为

$$F = Bli \tag{2-36}$$

这个方程就是电能向机械功转化的基础,因此被称为**电动机的定律(law of motors)**。

例 2.9 扬声器建模

图 2-19 所示的是一个用于产生声音的扬声器的典型结构。永磁体在两极间的圆柱形间隙中建立辐射场。缠绕在卷轴上的导线由于受到力的作用,引起音圈移动,由此产生声音。[①] 空气的作用效果可以认为锥面有等效的质量 M 和粘滞摩擦系数 b。假设磁场是均匀的,B 等于 0.5T,绕线有 20 匝,直径 2 cm。写出这个器件的运动方程。

解:电流与磁场成直角,要求解的力与 i 和 B 形成的平面成直角,这样可以应用方程(2-36)。在本例中磁通密度 $B=0.5$ T,导线长度是

$$l = 20 \times \frac{2\pi}{100} = 1.26$$

因此,力的大小为

$$F = 0.5 \times 1.26 \times i = 0.63i$$

机械学方程也就是牛顿定律,对质量 M 和摩擦系数 b,系统方程为

$$M\ddot{x} + b\dot{x} = 0.63i \tag{2-37}$$

① 在计算机硬盘数据存取器的读/写磁头中常常使用类似的音圈电动机作为执行器。

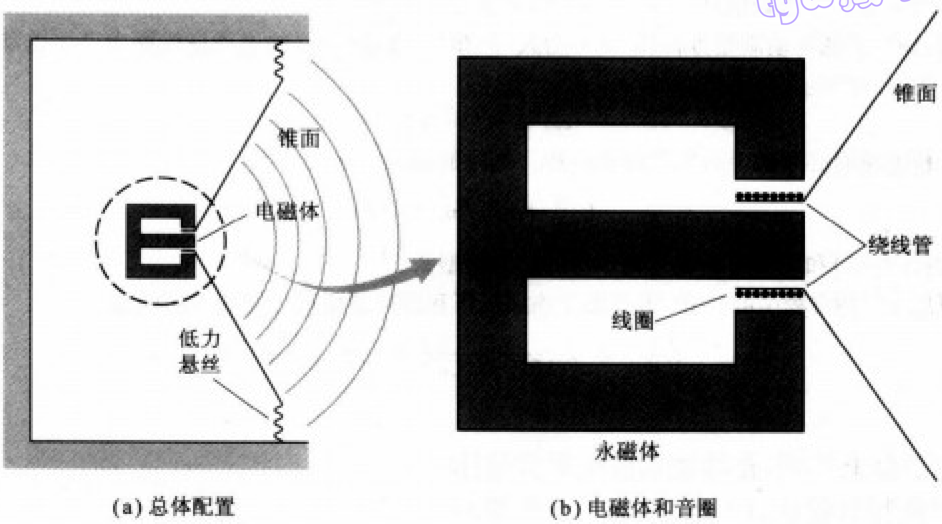


图 2-19 扬声器的几何构造

上述二阶微分方程描述了扬声器锥面的运动，输入电流 i 驱动整个系统。用 s 代替式(2-37)中的 d/dt，很容易得出系统的传递函数

$$\frac{X(s)}{I(s)}=\frac{0.63/M}{s(s+b/M)} \tag{2-38}$$

另一个重要的电机关系是机械运动对电动势的影响。如果长为 l 米的导线在磁通密度为 B 特的磁场中移动，速度大小为 v 米/秒，方向与磁场成直角，则在导线中会产生一定的电动势，其大小为

$$e(t)=Blv \tag{2-39}$$

这个表达式被称为**发电机的定律(law of generators)**。

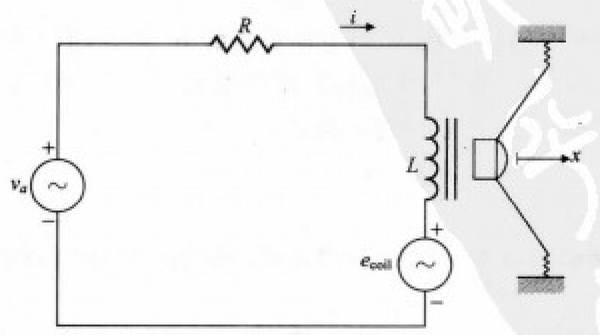


图 2-20 电路驱动的扬声器

例 2.10 扬声器电路

对于图 2-19 的扬声器，图 2-20 的电路驱动扬声器工作，求出联系输入电压 v_a 和锥面输出位

移 x 的微分方程。假设电路有效电阻是 R，电感为 L。

解：扬声器的运动满足方程(2-37)，由式(2-39)可知，扬声器的运动在线圈中产生电动势，运动速度为 $\dot{x}$。产生的电动势为

$$e_{coil} = Bl\dot{x} = 0.63\dot{x} \tag{2-40}$$

分析电路时必须加上这个感应电动势。电路的运动方程是

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v_a - 0.63\dot{x} \tag{2-41}$$

方程(2-37)和(2-41)组成了扬声器的动态模型。

再用 s 代替方程中的 d/dt，得到关于施加电压和扬声器位移之间的传递函数为

$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{0.63}{s[(Ms+b)(Ls+R)+(0.63)^2]} \tag{2-42}$$

基于以上原理，在控制系统中常常使用的一种执行器就是直流电机，用于产生旋转运动。直流电机的基本组成见图2-21。除了外壳和支座，不旋转的部分(定子)含有磁体，给转子提供磁场。磁体可以是电磁体，在小型电机中也可以是永磁体。电刷连接旋转着的电流换向器，使电流一直在导线线圈中适合于产生最大的转矩。如果电流的方向反转，则转矩的方向也反转。

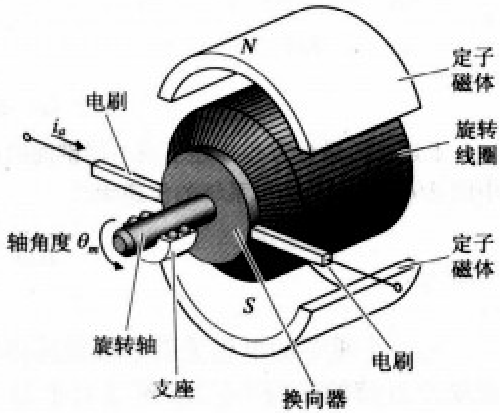


图2-21　直流电机简图

电动机方程给出了作用在转子上的转矩 T，与电枢电流 i_a 有关，另外是电枢产生的反电动势，与转轴的转动速度 $\dot{\theta}_m$ 有关，[①]即

$$T = K_t i_a \tag{2-43}$$

$$e = K_e \dot{\theta}_m \tag{2-44}$$

在一般的单位制中，转矩常数 K_t 与电动势常数 K_e 相等，但有些情况下转矩常数采用其他单位，例如盎司英寸/安培，电动势的单位也可能是 V/1000r/m。这时候工程师必须做必要的转换以保证上述方程的正确性。

例2.11　直流电机建模

电路如图2-22a所示，求出图中直流电机的方程。假设转子的转动惯量为 J_m，粘滞摩擦系数为 b。

解：转子的自由体受力图如图2-22b所示，图中定义了转子转动的正方向，并画出了作用在转子上的两个转矩，T 和 $b\dot{\theta}_m$。根据牛顿定律有

$$J_m\ddot{\theta}_m + b\dot{\theta}_m = K_t i_a \tag{2-45}$$

① 因为产生的电动势与施加在电枢上的电压是相反的，所以称之为**反电动势**(**back emf**)。

分析整个电路，包括反电动势，得到电方程

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - K_e \dot{\theta}_m \tag{2-46}$$

用 s 代替方程(2-45)和(2-46)中的 d/dt，得到电动机的传递函数为

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_t}{s[(J_m s + b)(L_a s + R_a) + K_t K_e]} \tag{2-47}$$

在大多数情况下，对机械运动而言电枢电感的相关影响可以忽略，于是在方程(2-46)中的相关项可以忽略。因此，我们联立方程(2-45)和(2-46)，得出

$$J_m \ddot{\theta}_m + \left(b + \frac{K_t K_e}{R_a}\right)\dot{\theta}_m = \frac{K_t}{R_a} v_a \tag{2-48}$$

由式(2-48)可以知道，在本例中反电动势的影响和摩擦力的影响是没有差别的，系统传递函数是

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\frac{K_t}{R_a}}{J_m s^2 + \left(b + \frac{K_t K_e}{R_a}\right)s} \tag{2-49}$$

$$= \frac{K}{s(\tau s + 1)} \tag{2-50}$$

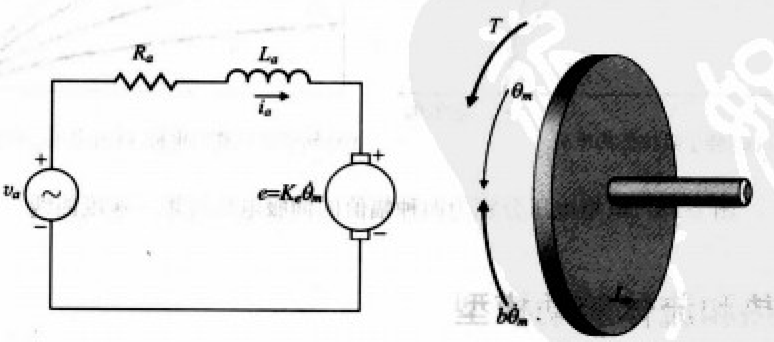
其中，

$$K = \frac{K_t}{bR_a + K_t K_e} \tag{2-51}$$

$$\tau = \frac{R_a J_m}{bR_a + K_t K_e} \tag{2-52}$$

有些情况下，设计需要的可能是从电动机输入到输出速度($\omega = \dot{\theta}_m$)之间的传递函数。这时候，传递函数变为

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = s\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \tag{2-53}$$



(a) 电枢电路　　(b) 转子的自由体受力图

图 2-22　直流电机

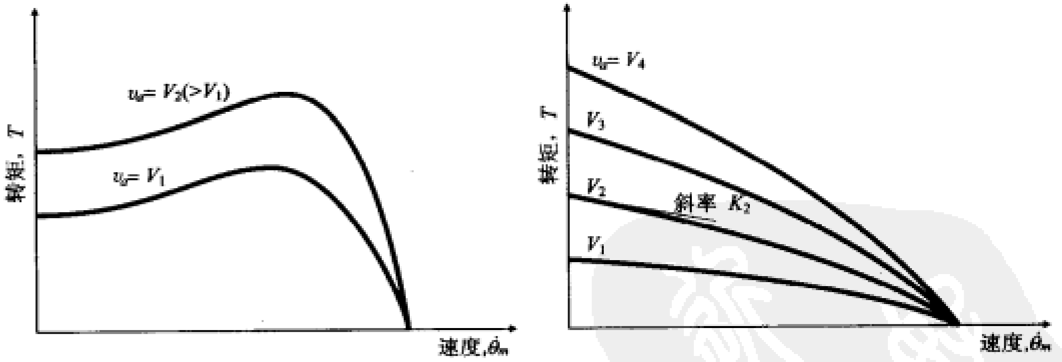
另一个用于电能和机械能转化的器件是 N. Tesla 发明的交流感应电机。对交流电机的基本分析比直流电机要复杂得多。图 2-23 给出了在频率固定、幅值改变的正弦电压作用下，电机转速对转矩的一组实验曲线图。虽然图中的数据都是针对某个恒定

的发动机速度，但是可以利用这些数据求出一些电机常数，给出电动机的模型。在分析一个含有交流电机的控制问题时（见图2-23），我们对中间电压并接近0速度处的曲线作线性近似，得到以下表达式

$$T = K_1 v_a - K_2 \dot{\theta}_m \tag{2-54}$$

常数 K_1表示在0速度时转矩变化量与电压变化量的比率，它和0速度时曲线的间距成正比。常数 K_2表示在0速度时，中间电压处转矩变化量与速度变化量的比率，因此，它是曲线在0速度附近的斜率，如图中 V_2上的直线。对于电路部分，电枢电阻 R_a和电枢电感 L_a的值同样通过实验确定。只要我们获得了 K_1，K_2，R_a和 L_a的值，分析的过程就类似于例2.11直流电机的分析。如果电感也可以忽略，那么我们可以用 K_1和 K_2分别代替式(2-48)中的 K_t/R_a和 K_tK_e/R_a。

除了这里提到的直流电机和交流电机，控制系统中还可能用到无刷直流电机（Reliance Motion Control 公司，1980）和步进电机（Kuo，1972）。这些电机的模型在上面提到的文章中有推导，原理上和本节所讨论的电机并没什么区别。一般地说，在实验基础上的分析，给出的是转矩关于电压和速度的函数，类似于图2-23给出的交流电机转矩—速度曲线。根据这些曲线我们可以求出如方程(2-54)的线性公式，应用于系统的机械分析部分，并求出包括电阻和电感的等效电路，应用于电路分析部分。



(a) 转子阻抗低的电机　(b) 转子阻抗高的电机，峰值电压 v_a分别取四种不同值

图2-23　电枢电压分别为四种幅值的伺服电机转矩—速度曲线

▲2.4　热和流体流动模型

热力学、热传递和流体动力学，每一个都可以作为一本书的课题。为了得出事物的动态模型用于指导控制系统的设计，物理学的一个重要工作是表示出变量之间的相互作用。实验可以帮助我们确定参数的实际值，为控制系统设计完善动态模型。

2.4.1　热流

实际应用中有些控制系统会涉及调节系统某部分的温度。温度控制系统的动态

模型包括热能的流动和储存。热能流过物体，其速度正比于物体两端的温差，即

$$q=\frac{1}{R}(T_1-T_2) \tag{2-55}$$

式中，

q＝热能流速，单位为焦耳/秒(J/s)，或英制热量单位/秒(BTU/s)；

R＝热阻，单位为℃/J·s或℉/BTU·s；

T＝温度，单位为℃和℉。

热能流入一个物体对物体温度产生的影响有如下关系：

$$\dot{T}=\frac{1}{C}q \tag{2-56}$$

式中，C是热容量。特别地，热能可能有几条路径流入或流出物体，这时式(2-56)中的q表示遵循式(2-55)的热流总量。

例 2.12 热流方程

一个房间除了两个面其他所有面都是热绝缘的($1/R=0$)，如图 2-24 所示。试求出确定房间温度的微分方程。

解：根据式(2-55)和式(2-56)得到

$$\dot{T}_I=\frac{1}{C_I}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(T_O-T_I)$$

其中

C_I＝房内空气的热容量；

T_O＝室外温度；

T_I＝室内温度；

R_2＝为房间顶篷的热阻；

R_1＝房间墙壁的热阻。

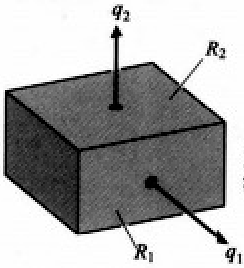


图 2-24 房间温度的动态模型

一般地说，材料的特性会以表格的形式给出以下几项：

(1) 一定量c_v的材料的比热，应用下式可以转化为热容量

$$C=mc_v \tag{2-57}$$

式中m表示物体的质量。

(2) 热传导率[①] k，其与热阻R的关系如下

$$\frac{1}{R}=\frac{kA}{l}$$

式中A是物体的横截面积，l是热流路径的长度。

除了热传递引起的热流动，热能的流动还可能出现在当温度较高的物体流入温度较低的物体的情况下，反之亦然，如同方程(2-55)描述的。这时候，

① 对于房子的热绝缘性，热阻通常以R值给出。R-11表示一个物体对热流动的阻值等效于11 in.的实心木的热阻值。

$$q = wc_v(T_1 - T_2) \tag{2-58}$$

其中 w 表示温度为 T_1 的液体流入温度为 T_2 的储液槽的质量流速。如果需要关于温度控制系统的动态模型的更全面的探讨，请看 Cannon(1967)或有关热传递的教科书。

例 2.13　换热器建模的方程

换热器如图 2-25 所示。热蒸汽通过顶部的可控阀门进入换热室，冷却的蒸汽从底部流出。冷水以恒定的流速通过管道流入换热室，并在室内环绕以便从蒸汽中获取能量。试用微分方程表示流出水温的测量值对蒸汽入口控制阀打开面积 A_s 的动态特性。测量流出水温的传感器安装在管道出口的下游，测量的温度滞后出口温度 t_d 秒。

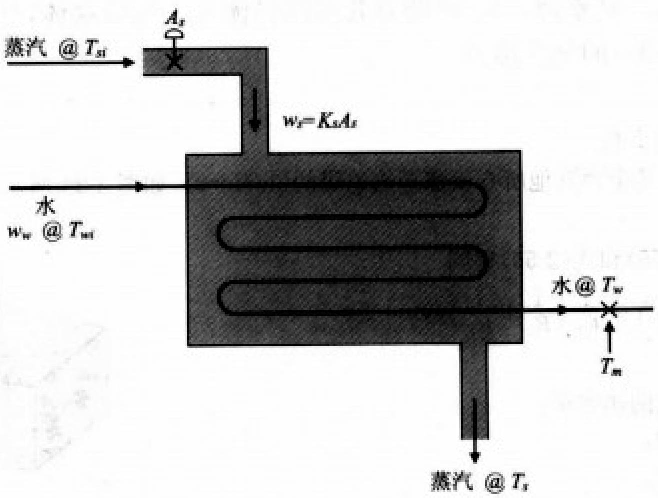


图 2-25　换热器

解：管道中的水的温度将沿着管道连续地变化，因为热量一直由蒸汽流向水。蒸汽的温度也随着蒸汽流过换热室中的管道网络而被降低。因为由蒸汽到水的实际热流量正比于两种流体各自温度的差值，因此由以上分析我们得到关于这一过程的一个精确模型。对很多控制系统而言，没有必要把模型建立得特别精确，因为反馈可以校正模型中相当大部分的误差。所以，我们可以用流出蒸汽和水的温度 T_s 和 T_w 分别代替换热室中随空间变化的分布温度。我们还假设，由蒸汽流向水的热能流速正比于这些温度的差，如式(2-55)给出的关系。根据式(2-58)，热能由气流入口处流入换热室，其流速大小决定于蒸汽流速和蒸汽的温度，

$$q_{in} = w_s c_v (T_{si} - T_s)$$

其中

$w_s = K_s A_s$，蒸汽的质量流速；

A_s =蒸汽入口阀门的打开面积；

K_s =入口阀门的流速参数；

c_v =蒸汽比热；

T_{si} =流入蒸汽的温度；

T_s =流出蒸汽的温度。

流入换热室的净热流量就是由热蒸汽流入换热室的热流量与流出水获得的热能流量之差。由式(2-56)可知，这个净流量决定了蒸汽的温度变化，

$$C_s\dot{T}_s = A_s K_s c_{v}(T_s - T_s) - \frac{1}{R}(T_s - T_w) \tag{2-59}$$

其中，

$C_s = m_s c_v$，表示在换热室中质量为 m_s 的蒸汽热容量；

R=在整个换热器中热流动的平均热阻。

同样地，描述水温变化的微分方程为

$$C_w\dot{T}_w = w_w c_{vw}(T_{wi} - T_w) + \frac{1}{R}(T_s - T_w) \tag{2-60}$$

其中，

w_w =水的质量流量；

c_{vw} =水的比热；

T_{wi} =流入水的温度；

T_w =流出水的温度。

为完善整个动态模型，温度测量值与输出温度值之间的时间延迟由下式给出

$$T_m(t) = T_w(t - t_d)$$

式中 T_m 为下游水温的测量值，t_d 为时间延迟。同样，测量蒸汽的温度 T_s 时可能也有延迟，这个也可以按同样的方法建模。

方程(2-59)是非线性的，因为量 T_s 乘了一个控制输入量 A_s。方程可以在 T_{s0}（T_s 的某个特定值）附近进行线性化，这样为了近似非线性项，我们可以把 $T_s - T_s$ 看作是常量，并定义为 ΔT_s。为了消去式(2-60)中的 T_{wi} 项，我们可以测量各温度偏离 T_{wi} 的度数，并用偏移量来表示这个温度值。这样我们得到以下方程

$$C_s\dot{T}_s = -\frac{1}{R}T_s + \frac{1}{R}T_w + K_s c_v \Delta T_s A_s$$

$$C_w\dot{T}_w = -\left(\frac{1}{R} + w_w c_{vw}\right)T_w + \frac{1}{R}T_s$$

$$T_m = T_w(t - t_d)$$

虽然时间延迟项也是非线性的，我们将会在第 3 章学习到 $T_m = e^{-st_d}T_w$。因此，换热器的传递函数为

$$\frac{T_m(s)}{A_s(s)} = \frac{Ke^{-st_d}}{(\tau_1 s+1)(\tau_2+1)} \tag{2-61}$$

2.4.2 不可压缩流体的流动

流体的流动在控制系统中是很常见的部分。例如液压执行器在控制系统中得到广泛应用，因为它能够在低惯性和低重量的情况下提供比较大的作用力。它们常常用于移动飞机的空气动力操纵面，调节火箭喷嘴方向，移动各种移土设备（如推土设备、农用拖拉机、扫雪机等）的连接部分，还用于移动机械手。

支配流体流动的物理关系有连续性关系、力平衡关系和阻力关系。连续性关系，

简单地说就是质量守恒，即

$$\dot{m} = w_{in} - w_{out} \tag{2-62}$$

式中，

m 为系统指定部分的流体质量；

w_{in} 为流入系统指定部分的流体质量流速；

w_{out} 为流出系统指定部分的流体质量流速。

例 2.14　描述水箱液位的方程

确定描述图 2-26 所示水槽水位的微分方程。

解：应用方程(2-62)得到

$$\dot{h} = \frac{1}{A\rho}(w_{in} - w_{out}) \tag{2-63}$$

其中，

A ＝水槽的横截面积；

ρ ＝水的密度；

$h = m/A\rho$ 为水位高度；

m ＝水槽中水的质量。



图 2-26　水槽例子

在机械系统中，力平衡就如式(2-1)所描述的。有时候系统含有流体的作用，某些力是因为流体作用在活塞上产生的。这种情况下流体产生的力为

$$f = pA \tag{2-64}$$

式中，

f ＝力；

p ＝流体压强；

A ＝流体作用面积。

例 2.15　液压活塞建模

如图 2-27 所示活塞执行机构，试用微分方程描述其运动，已知有力 F_D 作用在活塞上，膛内压强为 p。

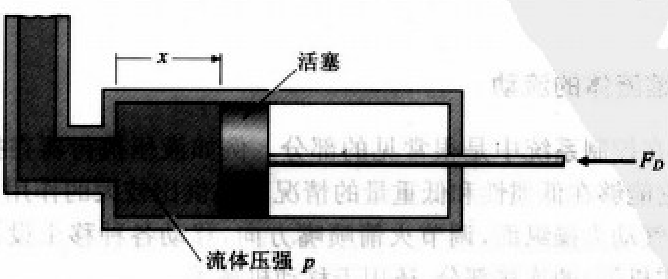


图 2-27　液压活塞执行器

解：直接应用方程(2-1)和(2-64)，其中作用力包括流体压力和外部施加的压力。方程为

$$M\ddot{x}=Ap-F_D$$

式中，

A =活塞面积；

p =膛内压强；

M=活塞质量；

x =活塞位移。

在很多流体流动的问题中，流体的运动会因过程中的窄通道或摩擦力而受到阻碍。流体受到阻力影响的一般形式如下：

$$w=\frac{1}{R}(p_1-p_2)^{1/\alpha} \tag{2-65}$$

其中，

w=质量流速；

p_1, p_2=正在流动的一段流体两端受到的压强；

R, α=常数，其值决定于限流器的类型。

或者，在液压系统中更常用下式

$$Q=\frac{1}{\rho R}(p_1-p_2)^{1/\alpha} \tag{2-66}$$

其中，

$Q=\dfrac{w}{\rho}$，体积流速；

ρ =流体密度。

常数 α 取值在 1 和 2 之间。在以高流速(雷诺数 $Re>10^5$)流过管子或短的窄通道或喷嘴时，α 值通常为接近 2 的数。对于以相当低的速度流过长管道或流过多孔塞，其中流体流动保持层片状($Re\leqslant 1000$)，则 $\alpha=1$。如果流速处于上面两个极端值的中间，则 α 可以取中间值。雷诺数表明了在流体流动中惯性力和粘滞力之间的相对重要性，它和材料的运动速度、密度和限流器大小成正比，和粘性成反比。如果雷诺数小，则粘滞力占主导地位，流体的流动是分层的；如果雷诺数大，则惯性力占主导地位，流体的流动是湍流的。

请注意 $\alpha=2$ 表示流速正比于压强差的平方根，这就导致了非线性的微分方程。在控制系统分析设计的初始阶段，我们先把这些方程进行线性化，以便应用本书介绍的各种设计方法。线性化包括选择一个工作点，然后在该工作点把非线性项展开成微小摄动的形式。

例 2.16 对水槽水位和流出量的线性化

求出描述图 2-26 中水槽水位的非线性微分方程。假设出口处的限流器相对较短，因此 $\alpha=2$。在工作点 h_0 附近对你得到的方程进行线性化。

解：根据式(2-65)，得到液体流出水槽的流速关于水槽水位高度的方程为：

$$w_{out}=\frac{1}{R}(p_1-p_a)^{1/2} \tag{2-67}$$

式中，

$p_1=\rho gh+p_a$，流体静压强；

p_a＝限流器周围环境压强。

将式(2-67)代入式(2-63)得到水位高度的非线性微分方程：

$$\dot{h}=\frac{1}{A\rho}\left(w_{in}-\frac{1}{R}\sqrt{p_1-p_a}\right) \tag{2-68}$$

对上式进行线性化，先选择工作点 $p_O=\rho gh_O+p_a$，把 $p_1=p_O+\Delta p$ 代入方程(2-67)。然后我们展开其中的非线性项，根据以下关系式

$$(1+\epsilon)^\beta\cong 1+\beta\epsilon \tag{2-69}$$

其中 $\epsilon\ll 1$。这样方程(2-67)可以写成

$$\begin{aligned} w_{out}&=\frac{\sqrt{p_O-p_a}}{R}\left(1+\frac{\Delta p}{p_O-p_a}\right)^{1/2}\\ &\cong\frac{\sqrt{p_O-p_a}}{R}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p_O-p_a}\right) \end{aligned} \tag{2-70}$$

只要 $\Delta p\ll p_O-p_a$，也就是说，只要系统压强偏离所选择的工作点足够小，这样式(2-70)中的线性化近似就是合法的。

联立方程(2-63)和(2-70)得到以下水槽水位运动的线性方程：

$$\Delta\dot{h}=\frac{1}{A\rho}\left[w_{in}-\frac{\sqrt{p_O-p_a}}{R}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p_O-p_a}\right)\right]$$

因为 $\Delta p=\rho g\Delta h$，上述方程简化为

$$\Delta\dot{h}=-\frac{g}{2AR\sqrt{p_O-p_a}}\Delta h+\frac{w_{in}}{A\rho}-\frac{\sqrt{p_O-p_a}}{\rho AR} \tag{2-71}$$

这是对 Δh 的线性微分方程。工作点并不是平衡点，因为工作点需要控制某个输入来维持。换句话说，如果系统在工作点（$\Delta h=0$）但没有输入（$w_{in}=0$），那么系统将会离开原工作点，因为 $\Delta\dot{h}\neq 0$。所以如果没有水流入水槽，则水槽将会流干，离开其参考点。为了定义一个工作点刚好是平衡点，我们需要有一个标称流速，

$$\frac{w_{in_0}}{A\rho}=\frac{\sqrt{p_O-p_a}}{\rho AR}$$

然后定义线性的输入流速为偏离该标称值的偏移量。

液压执行器同样遵守我们在水槽分析中用到的基本关系：连续性[方程(2-62)]、力平衡[方程(2-64)]，以及流动阻力[方程(2-65)]。虽然这里的推导过程假设流体是完全不可压缩的，但事实上，液压机液体具有一定的可压缩性，这主要是由于混入了空气。这个特点导致液压执行器有一定的谐振，因为流体的可压缩性产生像刚性弹簧一样的效果。这种谐振特性限制了执行器的响应速度。

例 2.17　液压执行器建模

(a) 图 2-28 所示的液压执行器，求出操纵面的移动 θ 和阀门的输入位移 x 之间的非线性微

分方程。

(b) 设 y=常数，在有和没有施加负载——即当 $F\neq0$ 和当 $F=0$ 时，分别求出系统运动方程的线性近似，假设 θ 的移动很小。

解：

(a) **运动方程**：当阀门在 $x=0$ 处，两个通道都关闭，没有引发任何运动。当 $x>0$ 时，如图2-28所示，油沿顺时针流动，活塞受力向左运动；当 $x<0$ 时，流体沿逆时针流动，以高压强 p_s 提供的油从左边进入大活塞阀室，迫使活塞向右运动。这也引起油从最右边的通道流出阀室，而不是左边的通道。

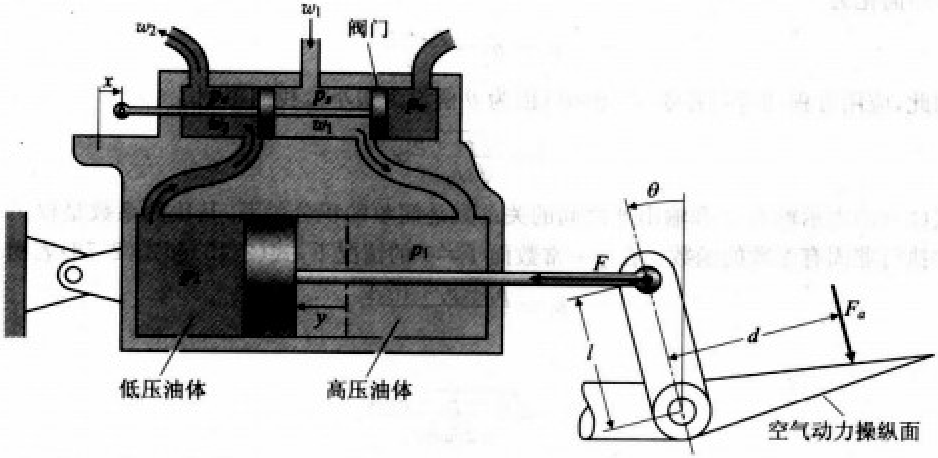


图 2-28　带阀门的液压执行器

我们假设液体流过阀门上的孔的速度正比于 x，即

$$Q_1=\frac{1}{\rho R_1}(p_s-p_1)^{1/2}x \tag{2-72}$$

同样地，

$$Q_2=\frac{1}{\rho R_2}(p_2-p_e)^{1/2}x \tag{2-73}$$

由连续性关系得到

$$A\dot{y}=Q_1=Q_2 \tag{2-74}$$

式中 A 为活塞面积。

根据作用的活塞上的力平衡得到

$$A(p_1-p_2)-F=m\ddot{y} \tag{2-75}$$

其中，

m=活塞和连接杆的质量；

F=作用在活塞杆操纵面连接点的力。

另外，根据操纵面的力矩平衡，应用方程(2-14)得到

$$I\ddot{\theta}=Fl\cos\theta-F_a d \tag{2-76}$$

式中，

I=操纵面和连接铰链的转动惯量；

F_a =施加的空气动力载荷。

要求解这上述5个方程组成的方程组，我们还需要下面的关于 θ 和 y 的运动学关系：

$$y = l\sin\theta \tag{2-77}$$

液压执行器的构造通常要使阀门的两个通道的作用等效，因此，$R_1=R_2$，这样我们由式(2-72)～式(2-73)得到

$$p_s - p_1 = p_2 - p_e \tag{2-78}$$

以上关系式就是系统运动的完整的非线性微分方程，是很难求解的。

(b) **线性化以及化简**：在 y=常数($\dot{y}=0$)的情况下，如果没有施加负载($F=0$)，则式(2-75)和式(2-78)简化为

$$p_1 = p_2 = \frac{p_s + p_e}{2} \tag{2-79}$$

因此，应用方程(2-74)并令 $\sin\theta=\theta$ (因为 θ 假设为很小)，我们得到

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{p_s - p_e}}{\sqrt{2}A\rho Rl}x \tag{2-80}$$

式(2-80)表示输入 x 和输出 θ 之间的关系只是简单的积分关系，其比例系数是仅关于供给压力和执行器固有参数的函数。在 y=常数而 $F\neq0$ 的情况下，式(2-75)和式(2-78)表明

$$p_1 = \frac{p_s + p_e + F/A}{2}$$

以及

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{p_s - p_e - F/A}}{\sqrt{2}A\rho Rl}x \tag{2-81}$$

这个结果同样表明输入 x 和输出 θ 之间的关系只是简单的积分关系，但其比例系数现在还决定于施加的负载 F。

只要命令值 x 产生的移动 θ 有足够小的 $\ddot{\theta}$ 值，则方程(2-80)和方程(2-81)给出的近似是有效的，而且不再需要其他的线性动态关系。然而，只要命令值 x 产生的加速度使得惯性力($m\ddot{y}$ 及对 $I\ddot{\theta}$ 的反作用)对(p_s-p_e)而言是相当大的，则上述近似就不再有效。这时候我们必须把这些力合并到方程当中，这样得到的关于 x 和 θ 的关系要比由方程(2-80)和方程(2-81)描述的积分关系复杂得多。一般地，在控制系统设计初期，我们通常假设液压执行器服从方程(2-80)和方程(2-81)的简单关系。

▲2.5　复杂机械系统

2.5.1　平移和旋转系统

在一些情况下，机械系统包含平移部分和旋转部分。和2.1节所介绍的步骤一样，分析步骤包括：画自由体受力图，建立坐标和正方向，确定所有作用力和作用力矩，以及应用方程(2-1)和/或方程(2-14)。

例 2.18　旋转和平移运动:悬挂吊车

图 2-29 所示为悬挂吊车,试写出其运动方程,原理图见图 2-30。在 $\theta=0$ 附近对方程进行线性化,这对悬挂吊车而言一般都是有效的。另外在 $\theta=\pi$ 附近也对方程进行线性化,这表示了图 2-31 所示的倒立摆情形。

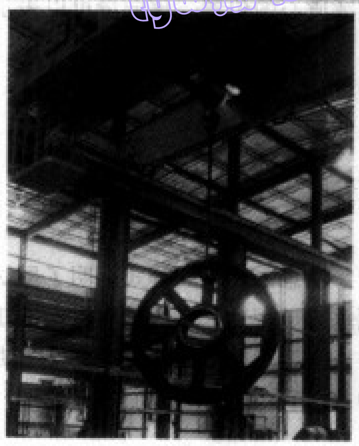


图 2-29　悬挂有负载的吊车(Harnischfeger Corporation, Milwaukee, Wisconsin 提供图片)

解:图 2-30 所示的是悬挂吊车的原理图,其自由体受力图见图 2-32。对摆锤的分析中,所受外力用实线表示,其质心的惯性加速度用虚线表示。因为摆锤的支点在惯性参考系中并不固定,所以摆锤的转动及其质心的移动都必须要考虑。还要确定惯性加速度,因为式(2-1)给出的向量 a 是在惯性参考系中的值。摆锤质心的惯性加速度是图 2-32b 中虚箭头表示的三个向量的矢量和。物体的加速度的合成属于**运动学(kinematics)**的内容,通常在学习牛顿定律之前需要先学习这些内容。本例中运动学分析的结果就如图 2-32b 所示。沿摆锤方向的加速度分量为 $l\dot{\theta}^2$,称为向心加速度。任何物体只要其速度改变方向就会有向心加速度。加速度的 x 分量是由吊运车的加速度通过支点对摆锤推动而产生,该分量的方向和大小总是和吊运车的加速度相同。$l\ddot{\theta}$ 分量则是由摆锤的角加速度引起,总是垂直于摆锤。

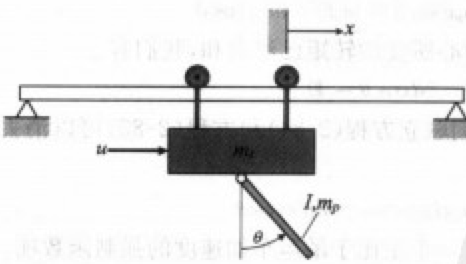


图 2-30　悬挂负载的吊车原理图

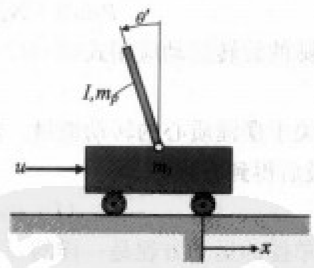
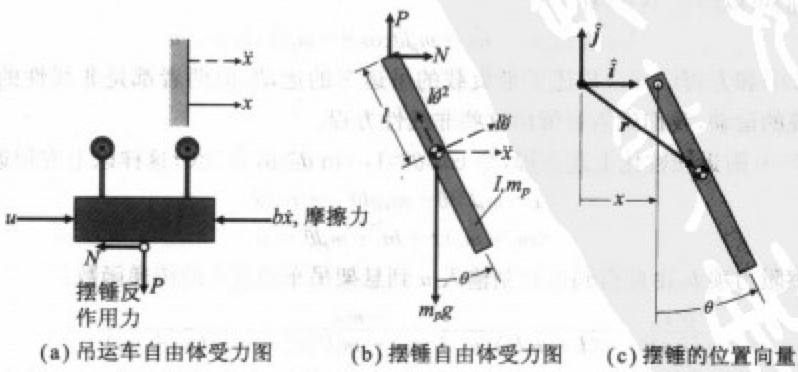


图 2-31　倒立摆



(a) 吊运车自由体受力图　(b) 摆锤自由体受力图　(c) 摆锤的位置向量

图 2-32　悬挂吊车

以上结论可以通过以下方法证实:先把摆锤的质心用一个在惯性参考系中的向量表示,然后对这个向量取二阶微分得到惯性加速度。图 2-32c 画出了 $\hat{i}$ 和 $\hat{j}$ 轴,两者惯性固定,向量 $\boldsymbol{r}$ 表示

摆锤质心的位置。该向量可以表示成

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{i}} + l(\hat{\boldsymbol{i}}\sin\theta - \hat{\boldsymbol{j}}\cos\theta)$$

$\boldsymbol{r}$ 的一阶导数是

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\hat{\boldsymbol{i}} + l\dot{\theta}(\hat{\boldsymbol{i}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{j}}\sin\theta)$$

同样，$\boldsymbol{r}$ 的二阶导数是

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\hat{\boldsymbol{i}} + l\ddot{\theta}(\hat{\boldsymbol{i}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{j}}\sin\theta) - l\dot{\theta}^2(\hat{\boldsymbol{i}}\sin\theta - \hat{\boldsymbol{j}}\cos\theta)$$

注意上述 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 的等式证明了图 2-32b 的各加速度分量。$l\dot{\theta}^2$ 项沿着摆锤方向并指向旋转轴，$l\ddot{\theta}$ 项垂直于摆锤并指向旋转方向的正方向。

知道了两个物体的所有力和加速度，我们现在可以应用方程(2-1)。对吊运车，在图 2-32a 中，我们看到它的移动只限制在 x 方向，因此，在这个方向上应用方程(2-1)得到

$$m_t\ddot{x} + b\dot{x} = u - N \tag{2-82}$$

其中 N 表示摆锤对吊运车施加的反作用力，大小未知。理论上，方程(2-1)可以应用在图 2-32b 所示摆锤的竖直方向和水平方向，方程(2-14)可以应用于旋转运动，这样得到三个方程，其中有三个未知数：N、P 和 θ。由这三条方程可以消去反作用力 N 和 P，最终得到一条描述摆锤运动的方程——就是仅关于 θ 的方程。例如，由方程(2-1)，对摆锤的运动在 x 方向上有

$$N = m_p\ddot{x} + m_p l\ddot{\theta}\cos\theta - m_p l\dot{\theta}^2\sin\theta \tag{2-83}$$

为了避免烦琐的代数方程，我们在垂直于摆锤的方向上应用方程(2-1)，得到

$$P\sin\theta + N\cos\theta - m_p g\sin\theta = m_p l\ddot{\theta} + m_p\ddot{x}\cos\theta \tag{2-84}$$

对摆锤的旋转运动应用式(2-14)，其中质心所受的转矩已经求和，我们有

$$-Pl\sin\theta - Nl\cos\theta = I\ddot{\theta} \tag{2-85}$$

式中 I 是关于摆锤质心的转动惯量。现在我们联立方程(2-84)和方程(2-85)可以消去反作用力 N 和 P，最后得到方程

$$(I + m_p l^2)\ddot{\theta} + m_p gl\sin\theta = -m_p l\ddot{x}\cos\theta \tag{2-86}$$

这和单摆的运动方程是一样的，只是多了一个正比于吊运车加速度的强制函数项。

方程(2-82)已经描述了吊运车的运动，但它含有未知的反作用力 N。联立方程(2-83)和方程(2-82)，我们可以消去 N 得到

$$(m_t + m_p)\ddot{x} + b\dot{x} + m_p l\ddot{\theta}\cos\theta - m_p l\dot{\theta}^2\sin\theta = u \tag{2-87}$$

方程(2-86)和方程(2-87)描述了带负载的吊运车的运动，但两者都是非线性的。如果要精确地计算系统的运动，我们就需要解出这些非线性方程。

为了在 $\theta=0$ 附近线性化上述方程，令 $\cos\theta\cong 1$，$\sin\theta\cong\theta$，$\dot{\theta}^2\cong 0$，这样以上方程近似为

$$\begin{aligned}(I + m_p l^2)\ddot{\theta} + m_p gl\theta &= -m_p l\ddot{x} \\ (m_t + m_p)\ddot{x} + b\dot{x} + m_p l\ddot{\theta} &= u\end{aligned} \tag{2-88}$$

忽略摩擦阻力项 b，由此得到由控制输入 u 到悬架吊车角度 θ 的传递函数：

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{-m_p l}{((I + m_p l^2)(m_t + m_p) - m_p^2 l^2)s^2 + m_p gl(m_t + m_p)} \tag{2-89}$$

对于图 2-31 所示的倒立摆，$\theta\cong\pi$，假设 $\theta=\pi+\theta'$，其中 θ' 表示从竖直向上的方向偏离的角

度。在这种情况下，方程(2-86)和方程(2-87)中 $\cos\theta \cong -1$，$\sin\theta \cong -\theta'$，方程(2-88)变成①

$$(I+m_p l^2)\ddot{\theta}' - m_p g l\theta' = m_p l\ddot{x}$$

$$(m_t+m_p)\ddot{x} + b\dot{x} - m_p l\ddot{\theta}' = u \tag{2-90}$$

例 2.2 提到过，若一个系统是稳定的，则其各变量必然有相同的符号，这样方程(2-88)的悬挂吊车模型是稳定的。然而，上面方程(2-90)中 θ 和 $\ddot{\theta}$ 的符号是相反的，这表明这个系统是不稳定的，这是倒立摆的一个特点。

同样地，若忽略摩擦力，系统传递函数为

$$\frac{\theta'(s)}{U(s)} = \frac{m_p l}{((I+m_p l^2) - m_p^2 l^2)s^2 - m_p g l(m_t+m_p)} \tag{2-91}$$

2.5.2 分布参数系统

前面所述的所有例子都只包含一个或多个刚体，虽然其中有一些通过弹簧与其他部分相连，但实际的结构(例如人造卫星的太阳能电池板、飞机的翼，或机械臂)通常是可以弯曲的，如图 2-33a 的柔性杆所示。描述这个柔性杆运动的方程是一个四阶的偏微分方程，因为沿着柔性杆连续分布有大量的小单元，各小单元与其他单元间的联系又带有小量的柔性。这种类型的系统我们称为**分布参数系统(distributed parameter system)**。这一章介绍的动态分析方法并不足以分析这种系统，不过一些更高层次的书(Thomson，1998)给出了以下结论

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{2-92}$$

式中

E ＝杨氏模量；

I ＝杆的面积转动惯量；

ρ ＝杆密度；

w＝沿着杆在长 x 处杆的挠度。

在设计控制系统时，精确地求解方程(2-92)会使任务显得过于繁重，但它对于我们设计控制系统时估算弯曲程度的影响还是相当重要的。

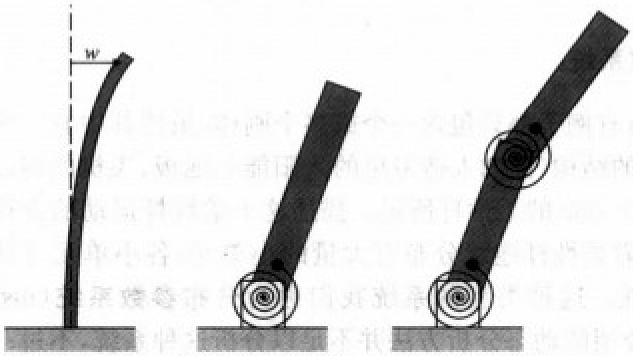
图 2-33b 的连续杆有无限个振动波形，每个波形都有不同的频率。一般地，最低频的波形具有最大的幅值，在对杆做近似的时候就最重要。图 2-33c 的简化模型可以用于复现一阶弯曲形式的基本运动和频率，对控制器的设计也基本能够满足。如果预期在控制系统运行中频率高于一阶弯曲形式的频率，我们可能需要建立如图 2-33d 所示的杆模型，它可以近似前两阶的弯曲形式和频率。同样，如果确实需要，我们还可以建立更精确、更复杂的高阶模型(Thomson，1998；Schmitz，1985)。如果把一个连续的

① 通常在描述倒立摆的运动时把顺时针方向定义为正方向。如果按照这种方法定义，则方程(2-90)中的 θ' 或 $\ddot{\theta}'$ 项的符号必须要相反。

弯曲物体近似为两个或多个刚体用弹簧连接，则得到的模型我们有时候称为**集总参数模型(lumped parameter model)**。



(a) 斯坦福大学研究用的柔性机械臂



(b) 连续柔性杆的模型　(c) 一阶弯曲形式的简单模型　(d) 一阶和二阶弯曲形式的模型

图 2-33　(E. Schmitz 提供图片)

小结

对被控系统的数学建模是分析和设计控制系统的第一步。在这一章中我们推导了一些典型系统的模型。每一类系统的重要方程已经归结在表 2-1 中。

表 2-1　动态模型的主要方程

系　统	重要定律或关系	相关方程	方程编号
机　械	平移运动(牛顿定律)	$F=ma$	(2-1)
	旋转运动	$M=I\alpha$	(2-14)
	非刚性体运动	$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F$	(2-10)
电　路	运算放大器		(2-29),(2-30)
机　电	电动机定律	$F=Bli$	(2-36)
	发电机定律	$e(t)=Blv$	(2-39)
	转子转矩	$T=K_t i_a$	(2-43)
反电动势	转子旋转产生电动势	$e=K_e\dot{\theta}_m$	(2-44)

（续）

系　　统	重要定律或关系	相关方程	方程编号
热流动	热能流动	$q=\frac{1}{R}(T_1-T_2)$	(2-55)
	温度关于热能流动的方程	$\dot{T}=\frac{1}{C}q$	(2-56)
	比　　热	$C=mc_v$	(2-57)
流体流动	连续性关系（质量守恒）	$\dot{m}=w_{in}-w_{out}$	(2-62)
	流体对活塞的作用力	$f=pA$	(2-64)
	阻力对流体流动的影响	$w=\frac{1}{R}(p_1-p_2)^{1/\alpha}$	(2-65)

复习题

1. “自由体受力图”是什么？
2. 牛顿定律的两种形式是什么？
3. 对需要控制的结构过程（如机械臂），并置控制和非并置控制的概念是什么？
4. 描述基尔霍夫电流定律。
5. 描述基尔霍夫电压定律。
6. “运算放大器”的命名时间、原因和作者？
7. 运算放大器的零输入电流的主要优势是什么？
8. 为什么说电动机的电枢电阻 R_a 要具有小电阻值？
9. 电机的电气常数的定义和单位是什么？
10. 电机的转矩常数的定义和单位是什么？
11. 为什么我们要把装置的物理模型（通常是非线性的）近似为线性模型？

▲12. 给出与下列事件有关的关系：
　(a) 热能流过一个物体；
　(b) 物体中的热量存储。

▲13. 给出支配流体流动的三个物理关系的方程。

习题

2.1 节习题：机械系统动力学

2-1　写出图 2-34 所示的机械系统的微分方程。

2-2　一细杆重 2 kg，长为 l，悬挂在支点上构成一个单摆，试写出单摆的运动方程。要使单摆的运动周期为 2 s，则细杆必须为多长？（细杆对某一端的转动惯量 I 为 $\frac{1}{3}ml^2$，假设 θ 足够小，$\sin\theta\cong\theta$。）

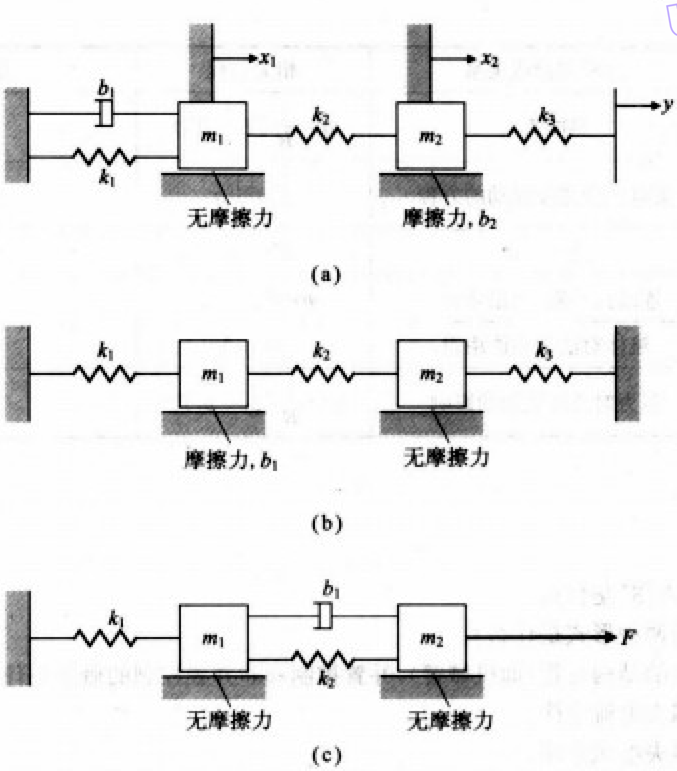


图 2-34 机械系统

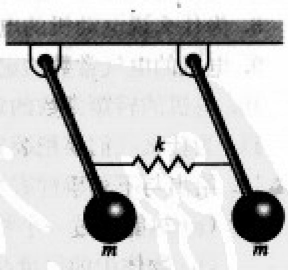


图 2-35 双摆

2-3 写出图 2-35 所示的双摆系统的运动方程。假设摆偏移的角度足够小，保证弹簧总是处于水平。摆杆的质量可以忽略，长度为 l，弹簧连接在轻杆从上往下 3/4 的位置处。

2-4 一质量为 M 的物体通过弹簧悬挂在一固定点上，弹簧的倔强系数为 k，试写出物体的运动方程。请认真定义物体的零位移点。

2-5 对例 2.2 讨论的汽车悬架，请用 MATLAB 画出当汽车撞上一个"单位凸椽"(即 r 为阶跃信号)后汽车和轮子的位置。假设 $m_1=10$ kg，$m_2=350$ kg，$K_w=500\ 000$ N/m，$K_s=10\ 000$ N/m。如果你是车上的乘客，求出合适的 b 值使你会满意乘坐这样的车。

2-6 汽车制造商希望制造一些更有效的悬架系统。最简单的改变是使减震器有可变的阻尼系数 $b(u_1)$。还可以做一个器件平行于各弹簧安装在车上，该器件能够提供和所有弹簧的合力相等的力 u_2，方向与轮轴和车身的相对运动方向相反。

(a) 修正例 2.2 的运动方程以包含这些控制输入。

(b) 得到的系统是线性的吗？

(c) 可以用产生力 u_2 的器件完全代替弹簧和减震器吗？这是不是一个好方法？

2-7 修改例 2.1 中巡行控制系统的运动方程式(2-4)，使系统含有以下控制规律，即令

$$u = K(v_r - v) \tag{2-93}$$

其中，

$$v_r \text{ 为参考速度；} \tag{2-94}$$

$$K \text{ 为常数。} \tag{2-95}$$

这是比例控制规律，把参考速度 v_r 和实际速度 v 的差值作为控制信号控制发动机加速或减速。修改系统运动方程，以 v_r 为输入，v 为输出，并求出传递函数。假设 $m=1000$ kg，$b=50$ N·s/m，用 MATLAB 求出当 v_r 发生阶跃变化时系统的响应。请用尝试的方法，找出一个你认为会使系统尽快而且令人满意地收敛到参考速度的 K 值。

2-8 在很多机械定位系统中，系统各部分之间的连接会有一定的柔性。例如图 2-7 的太阳能电池板之间是有一定的柔性的。图 2-36 描述的就是这种情形，外力 u 作用在质量为 M 的物体上，另外还有质量为 m 的物体连接到该物体。两者之间的连接处通常建模为弹簧系数 k 和阻尼系数 b，虽然实际系统要比这种情形复杂得多。

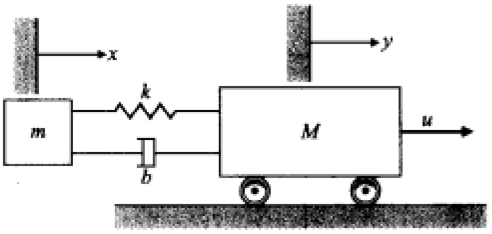


图 2-36 柔性系统的原理图

(a) 写出这个系统的运动方程。

(b) 求出输入 u 到输出 y 之间的传递函数。

2.2 节习题：电路模型

2-9 对运算放大器实际模型的一阶描述由以下方程给出，如图 2-37 所示：

$$V_{out} = \frac{10^7}{s+1}[V_+ - V_-] \qquad i_+ = i_- = 0$$

应用上述模型求出图示简单放大电路的传递函数。

2-10 运算放大器的连接如图 2-38 所示，如果运算放大器是理想的，请证明 $V_{out}=V_{in}$。如果放大器是非理想的，假设其传递函数同题 2-9，求出这个电路的传递函数。

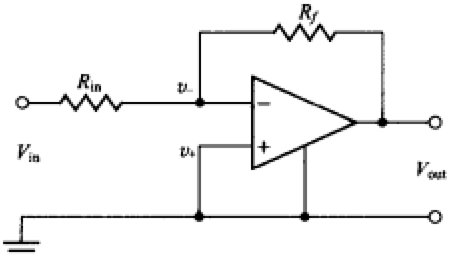


图 2-37 题 2-9 电路

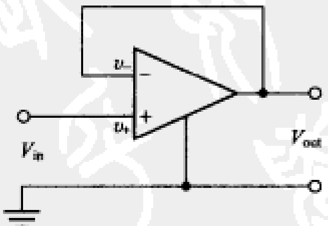


图 2-38 题 2-10 电路

2-11 请证明图 2-39 所示的运算放大器连接方式是不稳定的，其中放大器是题 2-9 的非理想放大器。

2-12 电机功率放大器的一种常用连接方式如图 2-40 所示。目的是让电机电流跟随输入电压，这个电路称为电流放大器。假设传感器电阻 R_s 与反馈电阻相 R 比非常小，求出从 V_{in} 到 I_a 的传递函数。若 $R_f=\infty$，再写出其传递函数。

2-13 如图 2-41 所示的运算放大器连接方法，输出分别反馈到放大器的正输入端和负输入

端。如果图中的运放是题 2-9 中的非理想运放，请用负反馈率 $N=\dfrac{R_{in}}{R_{in}+R_f}$ 表示出正反馈率 $P=\dfrac{r}{r+R}$ 所能取的最大值，注意使电路保持稳定。

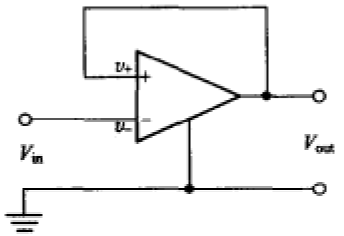


图 2-39　题 2-11 电路

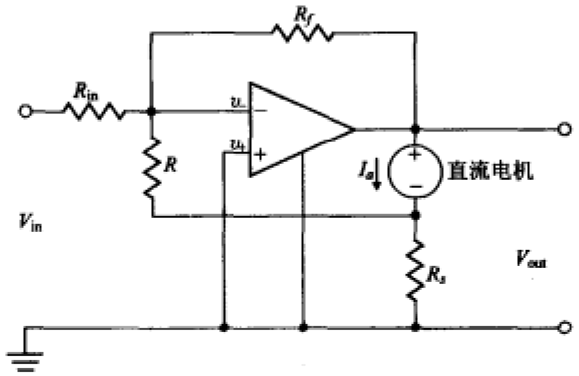
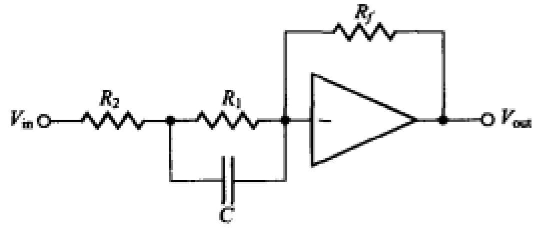
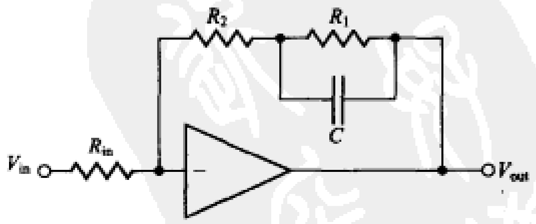


图 2-40　题 2-12 运算放大器电路

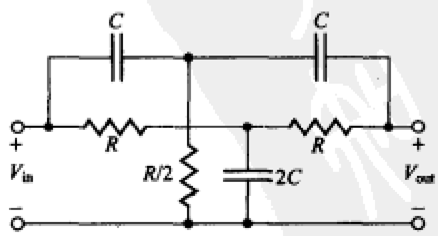
2-14　写出图 2-42 各电路的动态方程以及传递函数。



(a) 超前



(b) 滞后



(c) 陷波电路

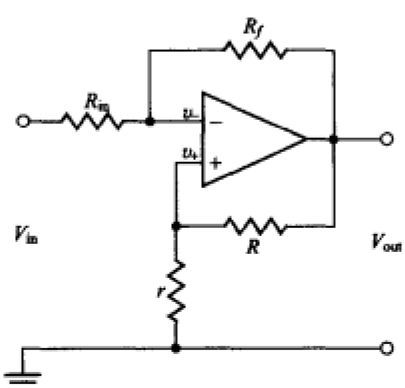


图 2-41　题 2-13 运算放大器电路

图　2-42

(a) 超前电路；

(b) 滞后电路；

(c) 陷波电路。

2-15 图 2-43 介绍了一种非常灵活的电路结构，我们称之为双二阶电路，因为它的传递函数可以化为两个二阶或一个四阶多项式的倒数。通过选择 R_a，R_b，R_c 和 R_d 的不同值，电路可以实现低通、带通、高通或带阻（陷波）滤波器的功能。

(a) 证明如果 $R_a=R, R_b=R_c=R_d=\infty$，则从 V_{in} 到 V_{out} 的传递函数可以写成以下低通滤波器的形式

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{A}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+2\zeta\frac{s}{\omega_n}+1} \tag{2-96}$$

其中 $A=\frac{R}{R_1}, \omega_n=\frac{1}{RC}, \zeta=\frac{R}{2R_2}$。

(b) 若 $A=1, \omega_n=1, \zeta=0.1$、0.5 和 1.0，用 MATLAB 的 step 命令计算图 2-43 双二阶电路的阶跃响应，并在同一张图上把响应曲线画出来。

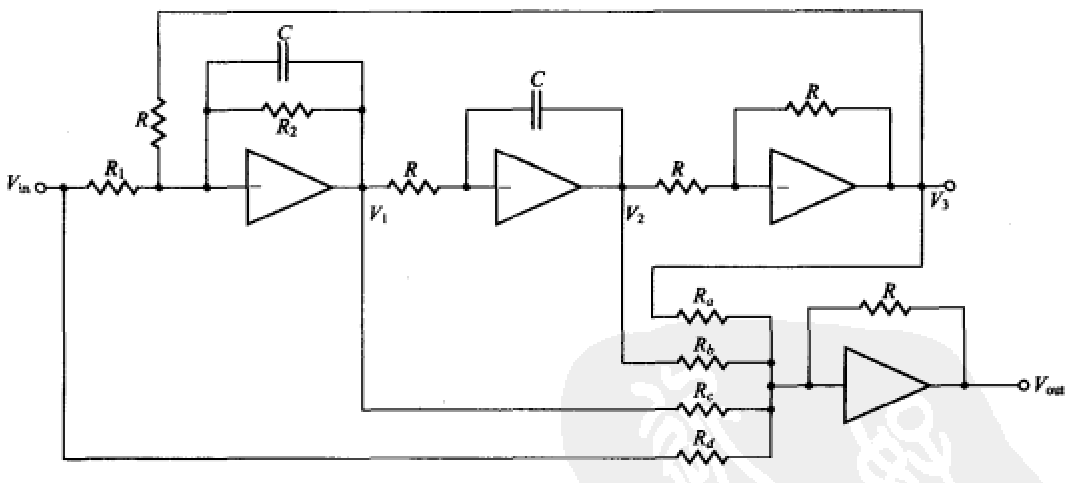


图 2-43 双二阶运算放大器电路

2-16 若 $R_a=R, R_d=R_1, R_b=R_c=\infty$，求出图 2-43 双二阶电路的描述方程和传递函数。

2.3 节习题：电机系统模型

2-17 电机转矩常数就是转矩对电流的比值，单位通常为盎司英寸/安培。（盎司英寸的量纲是力×距离，1 盎司等于 1/16 英镑。）电机电动势常数就是反电动势对转速的比值，单位通常是伏特/1000 rpm（转每分钟）。在国际单位制中，一个电动机的这两个常数相同。

(a) 证明化为米千克秒单位制（国际单位制）后盎司英寸/安培与伏特/1000 rpm 成正比。

(b) 某个电机在转速为 1000 rpm 时反电动势为 25 V。其转矩常数是多少（单位取盎司英寸/安培）？

(c) 如果单位是牛米/安培，则(b)小题的转矩常数是多少？

2-18 图 2-44 所示的电机系统表示的是一个电容传声器的简化模型。系统由连接在电路中

的平行板极电容器构成。电容极板 a 严格地固定在传声器外框。声波经过话筒时对极板 b 施加力 $f_s(t)$，极板 b 的质量为 M，通过一组弹簧和阻尼器连接在外框上。这样，电容 C 为两极板距离 x 的函数，如下：

$$C(x)=\frac{\varepsilon A}{x}$$

其中，

ε =极板间介质的介电常数；

A=极板表面面积。

极板电荷 q 和两极板电压 e 有如下关系

$$q=C(x)e$$

电场在可移动极板上产生与极板运动方向相反的力 f_e，如下：

$$f_e=\frac{q^2}{2\varepsilon A}$$

(a) 写出描述系统工作的微分方程。(保留非线性的形式即可)

(b) 可以得到线性模型吗?

(c) 系统的输出是什么?

2-19　在电机位置控制中一个非常经典的问题是电机驱动有一种主要震动方式的负载。这个问题出现在计算机硬盘读写磁头控制、轴到轴磁带驱动，以及其他很多实际应用中。图 2-45 画出了原理图。电机有电动势常数 K_e、转矩常数 K_t、电枢电感 L_a，以及电枢电阻 R_a；转子有转动惯量 J_1 和粘滞摩擦系数 B；负载有转动惯量 J_2；转子和负载通过一个转轴连接，其弹簧系数为 k，等效阻尼系数为 b，写出系统的运动方程。

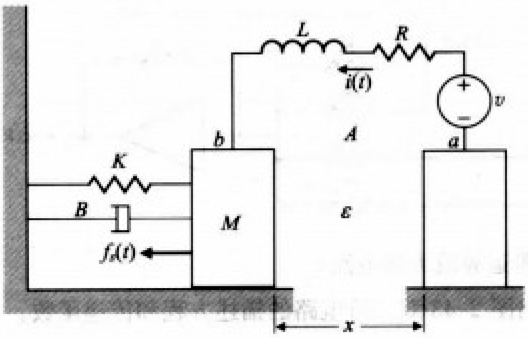


图 2-44　电容传声器的简化模型

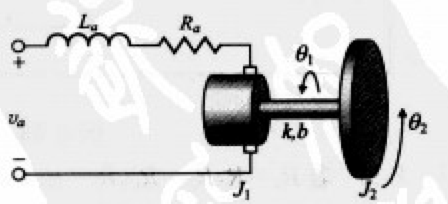


图 2-45　带柔性负载的电机

▲2.4 节习题：热和流体流动模型

2-20　图 2-46 所示的是精确调节桌面水平的方法，通过两个执行机构的热膨胀来调节两个角落的高低以使桌面保持水平。各参数如下。

T_{act} =执行机构的温度；

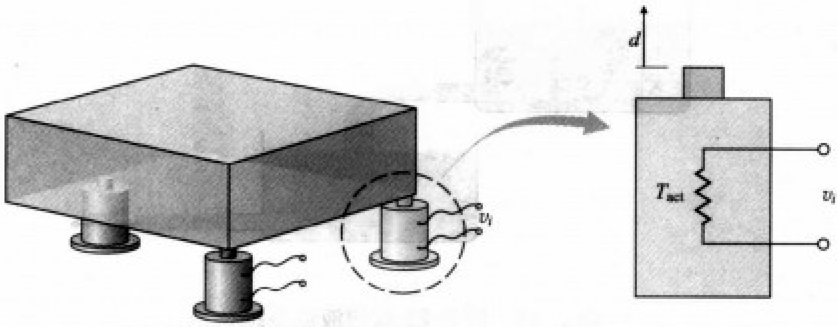
T_{amb} =周围空气温度；

R_f =执行机构和空气之间的热流参数；

C =执行机构的热容；

R =发热器热阻。

假设(1)执行机构的作用效果为纯电阻，(2)流入执行机构的热量与输入电功率成正比，(3)由热膨胀引起的移位 d 与 T_{act} 和 T_{amb} 之差成正比。求出联系执行机构高度 d 和施加电压 v_i 的微分方程。



(a) 由执行机构精确保持桌面水平　　(b) 执行机构的侧图

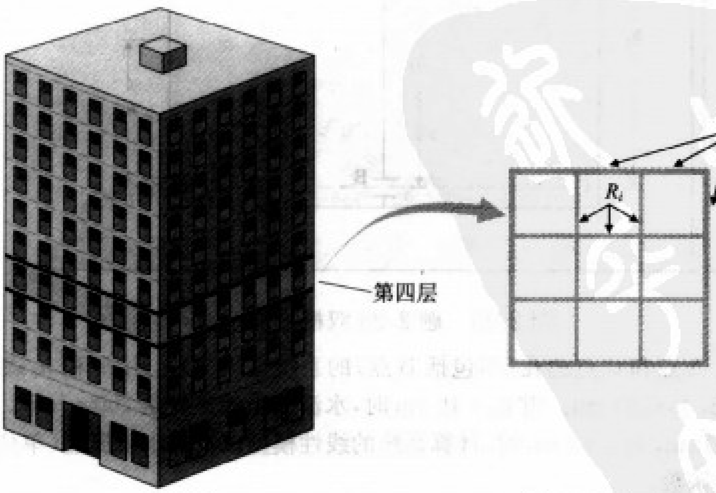
图 2-46

2-21 在一高层的楼房里由一个空调在第四层给每个房间提供冷气，如图 2-47a 所示。楼层的平面图如图 2-47b 所示。冷空气的流入使每间房间的热能以流速 q 散失，请写出一组描述每间房间温度变化的微分方程，其中

T_o =楼外温度；

R_o =热能流过外墙的热阻；

R_i =热能流过房内墙壁的热阻。



(a) 高层楼房　　(b) 第四层的楼层平面图

图 2-47 楼房空调设施

假设(1)所有的房间都是正方形的，(2)没有热能通过天花板或地板流动，(3)每间房的温度在整间房内都是均匀的。利用对称性使系统方程的数量减少到 3。

2-22　图 2-48 的双槽液流系统，求出联系流入第一个水槽的液体流量和流出第二个水槽的流量的微分方程。

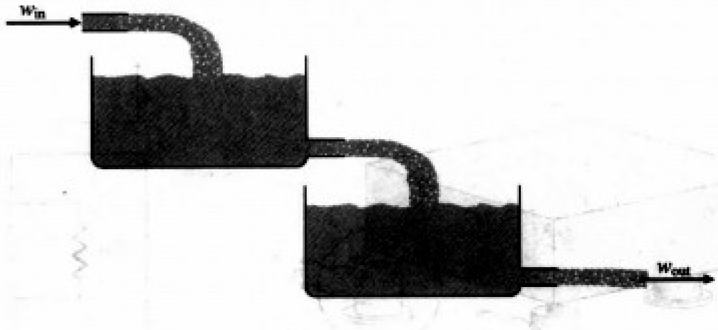


图 2-48　题 2-22 双槽液流系统

2-23　一个实验室实验用的双槽水流系统如图 2-49 所示。假设 A、B、C 点的孔大小相等，水流过这些孔时满足方程(2-67)。

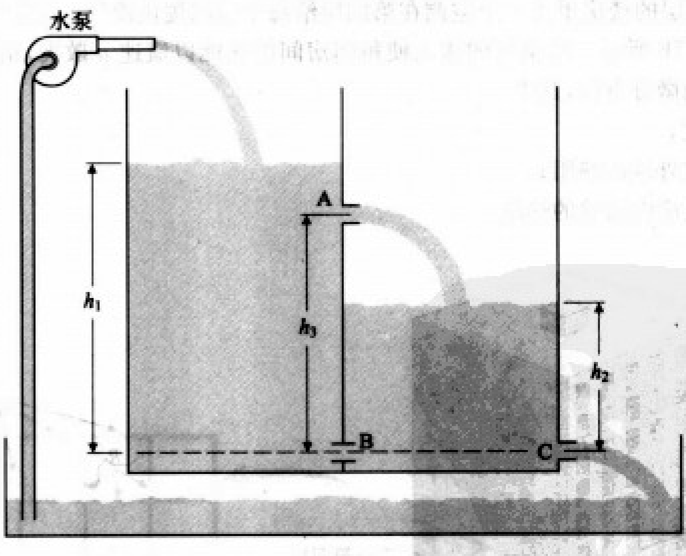


图 2-49　题 2-23 双槽液流系统

(a) 写出包括 A 点和 C 点的孔(不包括 B 点)的系统运动方程，用 h_1 和 h_2 表示。假设 $h_3=20$ cm，$h_1>20$ cm，$h_2<20$ cm。当 $h_2=10$ cm 时，水流流出的速度是 200 g/min。

(b) 当 $h_1=30$ cm，$h_2=10$ cm 时，计算系统的线性模型以及从水泵流速(单位取立方厘米每分钟)到 h_2 的传递函数。

(c) 假设孔 A 关闭而孔 B 打开，重做(a)和(b)小题。

2-24　加热一个房间的方程由方程(2-55)和方程(2-56)给出，在特殊情况下可以写成关于时间(单位为小时)的形式：

$$C\frac{dT_h}{dt}=Ku-\frac{T_h-T_o}{R}$$

其中，

(a) C 是房子的热容量，BTU/°F；

(b) T_h 为房子温度，°F；

(c) T_o 是房子外面的温度，°F；

(d) K 是炉子的加热速率，=90 000 BTU/h；

(e) R 为热阻，°F/BTU/h；

(f) u 表示炉子开关，如果炉子开则等于 1，关则等于 0。

经过测量得到，当室外温度为 32 °F，室内温度为 60 °F时，炉子使室温在 6 min(0.1 h)内升高 2 °F。当炉子关闭后，房间温度 40 min 下降 2 °F。请问这间房的 C 值和 R 值各是多少？

▲2.5 节习题：复杂机械系统

2-25 假设图 2-30 所示的悬挂吊车由电机提供驱动力，电机安装在驾驶室中，吊车的一个轮子直接连接在电机的电枢轴上。电机常数是 K_e 和 K_t，驱动电机的电路有电阻 R_a，电感可忽略。轮子半径是 r。写出联系施加到电机上的电压与驾驶室位置，以及联系施加电压与负载角度的运动方程。

第3章　动态响应

系统响应

在第2章中我们已经看到了如何获得系统的动态模型，在控制系统设计时，有必要对设计是否很好地满足设计要求做出评价，而这可以通过求解系统模型的特征方程来实现。

通常有两种方法来求解动态方程，其中比较快的一种方法是运用线性分析技术的近似分析法，由得到的近似结果，我们能更深刻地理解系统为何表现出某些特性，以及如何修正系统以使系统性能向期望的要求接近。与之相对地，要得到系统精确的动态响应则要求助于计算机参与的求解非线性运动方程的数值分析法。本章中我们主要关注线性分析法，而计算机工具则用于获得线性系统的时间响应。

我们可以在三个领域中研究系统的动态响应：**s 平面**（**s-plane**）、**频率响应**（**frequency response**）和**状态空间**（**state space**）（由状态变量描述来分析），一名训练有素的工程师应当对这些方法都相当熟悉。我们将在第5章至第7章中分别深入学习这些内容，但是，在具体地学习这些方法之前，在本章中我们要介绍学习这些分析方法所必需的数学基础。

全章概述

在3.1节以及附录A中介绍的拉普拉斯变换可以把微分方程转化为易于操作的代数形式，除此之外，作为对数学工具的补充，我们还有图形的方法来使系统形象化，同时表现出系统各部分之间的数学相关性。这些图形中就有框图（这已经在第1章中介绍过），其有关计算将在3.2节中涉及，由框图可以得到系统的传递函数。

一旦系统的传递函数确定之后，也就可以确定系统的零点和极点，它们可以告诉我们很多系统的特性，比如3.1节中的频率响应。3.3节到3.5节将关注零点与极点，以及运用它们来使系统性能达到期望要求的方法。3.6节将介绍幅值与时间变换。在引入反馈之后，系统可能会变得不稳定，为了研究反馈的影响，我们将在3.7节考查稳定性的定义以及劳斯判据，这一判据通过检验系统特征方程的系数可以确定系统的稳定性。3.8节中将介绍由实验得到的系统动态响应的数据来建立系统模型的方法。最

后，另一种系统的可视化图形表示，即信号流图也将在 3.8 节中介绍，通过它就可以确定复杂系统的传递函数。

3.1 拉普拉斯变换回顾

线性时不变系统的以下两个性质是分析大多数系统的基础：

(1) 线性系统响应满足**叠加原理**(**principle of superposition**)；

(2) 线性时不变系统的响应可以表示为输入与系统单位脉冲响应的卷积。

下面我们很快就会对叠加原理、卷积和脉冲响应做出定义。

由第二条性质(如我们将要介绍的)，我们很快就可以推出线性时不变系统对指数形式输入的响应也是指数形式的，这一结论也就是我们可以使用傅里叶变换和拉普拉斯变换来分析线性时不变系统的理论基础。

3.1.1 卷积响应

叠加原理指出，如果系统的输入可以表示为一系列信号之和，那么其响应也可以表示为各个信号单独作用于系统的响应之和。叠加原理的数学表达为：考虑一个系统的输入为 u，输出为 y，更进一步地，在系统处于原始状态下，加上输入 $u_1(t)$ 得到输出 $y_1(t)$，等系统消除输入影响后，加上第二个输入 $u_2(t)$，观察输出为 $y_2(t)$，同样，如果我们使输入为 $u(t)=\alpha_1 u_1(t)+\alpha_2 u_2(t)$，运用叠加原理就可以得出输出为 $y(t)=\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)$，当然要注意叠加原理仅仅适用于线性系统。

例 3.1 叠加原理

本例将叠加原理应用于可以用一阶线性微分方程描述的系统

$$\dot{y}+ky=u$$

解：

令 $u=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2$，并假设输出 $y=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2$，则 $\dot{y}=\alpha_1 \dot{y}_1+\alpha_2 \dot{y}_2$，将它们代入系统方程中，可以得到

$$\alpha_1 \dot{y}_1+\alpha_2 \dot{y}_2+k(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2$$

变形为

$$\alpha_1(\dot{y}_1+ky_1-u_1)+\alpha_2(\dot{y}_2+ky_2-u_2)=0 \tag{3-1}$$

如果 y_1 是输入为 u_1 时的解，而且 y_2 是输入为 u_2 时的解，那么方程(3-1)就是成立的，其响应恰好就是各输入的单独响应之和，叠加原理也就成立。

运用叠加原理，我们就可以求出系统在各种基本信号输入下的响应，也可以求出系统在一般信号下的响应。我们可以先把一般的输入分解为简单的基本信号，然后由叠加原理得到一般信号的响应也就是分解得到的各基本信号的响应之和。为了让这一过程得以进行，我们的基本信号就必须充分“丰富”以使比较合理的信号都能够分解

为基本信号,同时基本信号的响应也应该是比较容易得到的。在通常情况下,线性系统分析所用的基本信号是脉冲信号和指数函数信号。

脉冲这一概念来自于动力学。假设我们要研究一个棒球被球棒敲击后的运动情况,由于棒球会变形,而球棒会变弯,这样这一碰撞过程便会变得相当复杂,尽管如此为了计算棒球碰撞后的运动轨迹,我们可以将碰撞过程理想化为球速在极短时间内发生变化的过程。我们假定球受到一个**脉冲**(**impulse**)的作用,一个持续时间很短的强烈的作用过程。物理学家 Paul Dirac 认为这个作用力可以用数学意义上的脉冲函数 $\delta(t)$ 来描述,该函数具有下面的性质:当函数 $f(t)$ 在 $t=\tau$ 点连续时有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) \tag{3-2}$$

也就是说,这个脉冲过程非常短,但强度非常大,因此 f 在 δ 发生的区域以外就没有值存在。由于积分是一个求和过程的极限,这样式(3-2)也就表示可以将函数 f 表示为一系列脉冲之和,如果用 u 代表函数 f,那么式(3-2)就可以将输入 $u(t)$ 表示为一系列强度为 $u(t-\tau)$ 的脉冲之和,为了得到任意输入信号的响应,叠加原理告诉我们只需求得系统单位脉冲响应,对于一般的线性系统,可将其响应表示成 $h(t,\tau)$,也就是 τ 时刻输入脉冲而在 t 时刻得到的响应,整个系统的响应可表示成强度为 u 的脉冲响应之和

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t,\tau)\mathrm{d}\tau$$

这就是**叠加积分**(**superposition integral**),如果这个系统是不但是线性的,而且还是时不变系统,那么其脉冲响应就可表示成 $h(t-\tau)$,因为在 τ 时刻加入输入,在 t 时刻所获得的响应只取决于输入和我们观察响应时刻之间的时间间隔。因此时不变系统也称为移不变系统。对于时不变系统,叠加积分有如下特殊形式

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

或者

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3-3}$$

式(3-3)称为**卷积积分**(**convolution integral**),这个积分经常会用到,因此通常就用 $y=u*h$ 来表示式(3-3)。

例 3.2 卷积

我们用一个简单的例子来说明卷积,考虑下面的微分方程所描述系统的脉冲响应

$$\dot{y} + ky = u = \delta(t)$$

已知脉冲信号输入之前,系统的初始条件为 $y(0)=0$,由于 $\delta(t)$ 只在 $t=0$ 附近才有影响,因此可以对该方程在 $0^-\sim 0^+$ 之间进行积分,得到

$$\int_{0^-}^{0^+} \dot{y}\mathrm{d}t + k\int_{0^-}^{0^+} y\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t$$

我们知道 $\dot{y}$ 的积分为 y,但 y 在很小区域内的积分为零,而脉冲在该范围内的积分为 1,因此

$$y(0^+) - y(0^-) = 1$$

由于系统在输入脉冲之前处于原始状态,有 $y(0^-)=0$,因此脉冲输入的结果是 $y(0^+)=1$,

而在 $t>0$ 时我们可以得到微分方程

$$\dot{y}+ky=0, y(0^+)=1$$

若我们设方程的解为 $y=Ae^{st}$，那么 $\dot{y}=Ase^{st}$，则前面的微分方程变为：

$$Ase^{st}+kAe^{st}=0$$

$$s+k=0$$

$$s=-k$$

由于 $y(0^+)=1$，也就有 $A=1$，因此，$t>0$ 时该脉冲响应的解为 $y(t)=h(t)=e^{-kt}$，考虑到 $t<0$ 时 $h(t)=0$，于是我们定义**单位阶跃函数**(**unit-step function**)：

$$1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\1, & t\geqslant 0\end{cases}$$

由此定义可得一阶系统脉冲响应可以写为

$$h(t)=e^{-kt}1(t)$$

对于一般输入信号的响应，可以用脉冲响应与输入的卷积来表示：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k\tau}1(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{\infty}e^{-k\tau}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

3.1.2 传递函数与频率响应

直接应用卷积可得到，e^{st} 形式的输入的输出为 $H(s)e^{st}$，注意到输入和输出都是指数形式的时间函数，差别仅在于输出的幅值 $H(s)$，$H(s)$ 就是系统的传递函数，常数 s 可以是复数，表示为 $s=\sigma+j\omega$，这时输入与输出就都是复数。若我们令式(3-3)中的 $u(t)=e^{st}$，那么：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{s(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{st}e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau e^{st}=H(s)e^{st} \quad (3\text{-}4)$$

其中[①]

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau \quad (3\text{-}5)$$

要求系统的传递函数，我们并不需要计算式(3-5)中的积分，相反，可先假设一个与式(3-4)形式相同的解，然后将其代入系统微分方程，求得系统传递函数 $H(s)$。

系统的传递函数可以正式定义为：系统从输入 $U(s)$ 到输出 $Y(s)$（即从输入到输出）之间的传输增益 $H(s)$ 定义为系统的传递函数(**transfer function**)，它是输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之间的比值

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=H(s) \quad (3\text{-}6)$$

其关键假设条件是系统的所有初始条件都为零，如果系统的输入 $u(t)$ 为单位脉冲 $\delta(t)$，那么输出 $y(t)$ 就是单位脉冲响应，输入 $u(t)$ 的拉普拉斯变换为 1，那么输出 $y(t)$ 的拉普拉斯变换就是 $H(s)$，这是由于

---

① 注意，在全部时间内，输入指数形式的信号，而式(3-5)表示其输出。若系统是因果系统，那么 $t<0$ 时 $h(t)=0$，则该积分可化为 $H(s)=\int_{0}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau$。

$$Y(s) = H(s) \tag{3-7}$$

也就是说：

系统的传递函数 $H(s)$ 也就是系统单位脉冲响应的拉普拉斯变换。

这样如果我们想确定一个线性时不变系统，只需要加上单位脉冲，那么所得的响应也就是系统的传递函数的一种表现形式(拉普拉斯反变换形式)。

例 3.3　传递函数

计算例 3.2 中系统的传递函数，并求输入 $u(t)=e^{st}$ 下的输出 y。

解：例 3.2 中系统的特征方程为

$$\dot{y}(t) + ky(t) = u(t) = e^{st} \tag{3-8}$$

假设我们可以将 $y(t)$ 记为 $H(s)\ e^{st}$，这样就有 $\dot{y}=sH(s)e^{st}$，则式(3-8)可简化为

$$sH(s)e^{st} + kH(s)e^{st} = e^{st} \tag{3-9}$$

求解传递函数 $H(s)$，得到

$$H(s) = \frac{1}{s+k}$$

将上式代回到式(3-4)中得输出为

$$y = \frac{e^{st}}{s+k}$$

线性时不变系统的指数信号响应常常用于求系统的**频率响应(frequency response)**或正弦信号响应。首先，我们将正弦信号表示为两个指数表达式之和(欧拉公式)：

$$A\cos(\omega t) = \frac{A}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

如果我们令基本响应式(3-4)中 $s=j\omega$，那么输入 $u(t)=e^{j\omega t}$ 下的响应为 $y(t)=H(j\omega)e^{j\omega t}$，同样，输入 $u(t)=e^{-j\omega t}$ 下的响应为 $H(-j\omega)e^{-j\omega t}$，根据叠加原理，该余弦信号的响应为这两个指数信号的独立响应之和

$$y(t) = \frac{A}{2}[H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}] \tag{3-10}$$

传递函数 $H(j\omega)$ 为复数时可表示成极坐标形式或振幅—相位形式，$H(j\omega)=M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$，或者简单的 $H=M(\omega)e^{j\varphi}$，这样替换之后，式(3-10)变为

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{2}M(e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}) \\ &= AM\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{3-11}$$

其中：

$$M = |H(j\omega)|,\quad \varphi = \angle H(j\omega)$$

这就意味着如果系统的传递函数为 $H(s)$，输入是幅值为 A 的正弦信号，那么其输出是相同频率而幅值为 AM 的正弦信号，且存在 ϕ 的角度偏差。

例 3.4　频率响应

求例 3.2 中的系统在正弦信号输入 $u=A\cos(\omega t)$ 下的系统响应。

(a) 求系统的频率响应，并画出 $k=1$ 时的系统响应图；

(b) 确定系统在 $k=1$ 时对正弦信号输入 $u(t)=\sin(10t)$ 的全响应。

解：

(a) 在例 3.3 中我们已求得系统的传递函数，为求频率响应，我们令 $s=\mathrm{j}\omega$，这样就有

$$H(s)=\frac{1}{s+k}\Rightarrow H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+k}$$

由此可得

$$M=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+k^2}} \text{ 和 } \varphi=-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

因此，正弦输入信号的系统响应为

$$y(t)=AM\cos(\omega t+\varphi) \tag{3-12}$$

M 通常称为**振幅比**(**amplitude ratio**)，而 φ 指**相位**(**phase**)，它们都是输入频率 ω 的函数。

以下的 MATLAB 程序用于计算 $k=1$ 时的振幅比和相位，如图 3-1 所示，logspace 命令可用来设置频率范围（对数刻度），bode 命令用来计算频率响应，这种描述频率响应的方法（在对数坐标上）由 H. W. Bode 提出，因此该频率法被称为“伯德图”①（可见 6.1 节）。

```
k = 1;
num = 1;                       % form numerator
den = [1 k];                   % form denominator
sysH = tf(numH,denH);          % define system by its numerator and denominator
w = logspace(-2,2);            % set frequency w to 50 values from 10^-2 to 10^+2
[mag,phase] = bode(sysH,w);    % compute frequency response
loglog(w,mag);                 % log-log plot of magnitude
semilogx(w,phase);             % semi log plot of phase
```

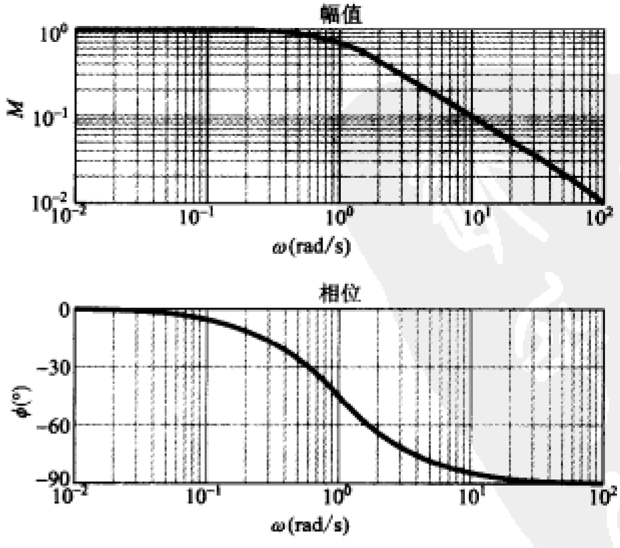


图 3-1 $K=1$ 时的频率响应

① 注意在 MATLAB 中%用来标示注释。

(b) 确定 $t=0$ 时刻输入 $u(t)=\sin(10t)1(t)$ 的系统响应，由拉普拉斯变换表(附录A表A-2)可得

$$\mathcal{L}\{u(t)\}=\mathcal{L}\{\sin(10t)\}=\frac{10}{s^2+100}$$

其中$\mathcal{L}$表示拉普拉斯变换，系统的输出用部分分式展开(见3.1.5节)为

$$Y(s)=H(s)U(s)=\frac{1}{s+1}\frac{10}{s^2+100}=\frac{\alpha_1}{s+1}+\frac{\alpha_0}{s+\mathrm{j}10}+\frac{\alpha_0^*}{s-\mathrm{j}10}=\frac{\frac{10}{101}}{s+1}+\frac{\frac{\mathrm{j}}{2(1-\mathrm{j}10)}}{s+\mathrm{j}10}+\frac{\frac{-\mathrm{j}}{2(1+\mathrm{j}10)}}{s-\mathrm{j}10}$$

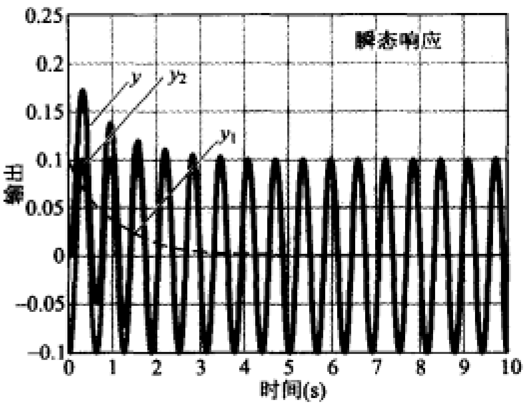
系统输出的反拉普拉斯变换为(参见附录A)

$$y(t)=\frac{10}{101}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{\sqrt{101}}\sin(10t+\varphi)=y_1(t)+y_2(t)$$

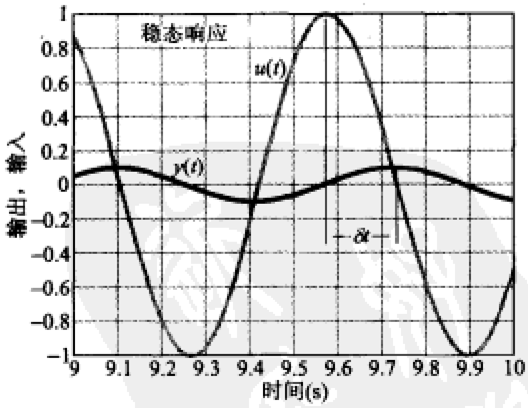
其中

$$\varphi=\tan^{-1}(-10)=-84.2^\circ$$

其中 $y_1(t)$ 部分会随时间衰减到零，因此称为**瞬态分量**，而 $y_2(t)$ 称为**稳态(steady-state)分量**，它与式(3-12)给出的响应相等。图3-2a为输出的时间关系图，它说明不同分量(y_1，y_2)和复合分量(y)的输出响应，输出频率为10rad/s，由图3-2b测得稳态相位差约为 $10\times\delta t=1.47\ \mathrm{rad}=84.2^\circ$①，图3-2b说明输出滞后输入84.2°，且输出的稳态振幅比 $\frac{1}{\sqrt{101}}=0.0995$，即输入信号振幅乘上传递函数在 $\omega=10\ \mathrm{rad/s}$ 处的幅值。



(a) 全瞬态响应



(b) 输入和输出之间的相位滞后

图　3-2

本例说明了对于线性时不变系统，若输入是频率为 ω 的正弦形式信号，那么输出响应也为同频率的正弦信号，其振幅比为该频率处传递函数幅值，而且输出与输入之间的相位差由传递函数在输入频率处的相位决定，因此，振幅比和相位差可以通过计算传递函数得到。当然我们可以通过实验的方法很容易地测得这些参数，即用一已知正弦形式的输入信号驱动系统，然后测量系统输出的稳态振幅和相位，输入信号的频

① 相位差也可以用Lissajous模式来确定。

率要取得足够多以便得到图 3-1 所示的曲线。

我们可以定义信号 $f(t)$ 的**拉普拉斯变换**(**Laplace transform**)来概括频率响应

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt \tag{3-13}$$

若将该定义式应用于 $u(t)$ 和 $y(t)$，并应用卷积式(3-3)可得

$$Y(s)=H(s)U(s) \tag{3-14}$$

其中 $Y(s)$ 和 $U(s)$ 是 $y(t)$ 和 $u(t)$ 的拉普拉斯变换，附录 A 中对该结果进行了证明。

如式(3-13)拉普拉斯变换常用于研究反馈系统的全响应，包括**瞬态响应**(**transient response**)：即系统对初始条件或突然施加信号的时间响应，这与傅里叶变换刚好相反，傅里叶变换主要关注系统的稳态响应，在控制领域，我们通常遇到求系统对输入 $u(t)$ 的响应以及系统模型，运用式(3-13)，我们就有了计算一般输入信号的线性时不变系统响应的方法，对于任意给定的系统输入，我们可计算出输入的拉普拉斯变换和系统传递函数的拉普拉斯变换。而由式(3-14)知输出的拉普拉斯变换为两者之积。当然要想得到输出的时间函数，就要对 $Y(s)$ 进行反变换，以得到拉普拉斯**反变换**(**inverse transform**)，这一步通常没有明确要求，然而了解 $y(t)$ 如何由 $Y(s)$ 得来的过程很重要，因为它能使我们比较深入地了解线性系统的性能，因此对于给定的线性系统，其传递函数为 $H(s)$，输入信号为 $u(t)$，应用拉普拉斯变换来确定 $y(t)$ 可以分为以下几步。

步骤 1 确定系统的传递函数：$H(s)=\mathcal{L}\{系统脉冲响应\}$。$H(s)$ 由以下步骤得到：

(a)对运动方程进行拉普拉斯变换，在这过程中拉普拉斯变换表将会很有用。

(b)求解拉普拉斯变换后所得的代数方程，在这一步往往要借助于前面相关的框图法，并可以通过框图计算或用 MATLAB 求解该方程。

步骤 2 确定输入信号的拉普拉斯变换：$U(s)=\mathcal{L}\{u(t)\}$。

步骤 3 确定输出信号的拉普拉斯变换 $Y(s)=H(s)U(s)$。

步骤 4 用部分分式展开，将 $Y(s)$ 分解。

步骤 5 对步骤 4 中所得的 $Y(s)$ 进行反拉普拉斯变换，得到系统输出：$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$[即将 $Y(s)$ 变换为 $y(t)$]：

(a) 在时域变换表中求出 $y(t)$ 各个部分的拉普拉斯变换。

(b) 将这些部分结合起来即可得要求形式的解。

如前所述，步骤 4、步骤 5 在实际中很少进行，在控制系统设计中只是做些定性分析就可以了，而不需要定量分析，整个处理过程从前三步开始，然而除了对 $Y(s)$ 进行拉普拉斯变换外，还应该知道 $Y(s)$ 在零极点分布对响应 $y(t)$ 的影响，以估计 $y(t)$ 的关键参数，这也就是本章其他部分所要讨论的。

虽然通过式(3-13)可确定系统的瞬态响应，但那些基于零时刻开始输入的拉普拉斯变换的简单形式通常更为有用。

3.1.3 拉普拉斯变换

在许多应用场合，我们用**单边(或单侧)拉普拉斯变换**(**one-side(or unilateral) La-**

place transform)，即用 0^-（即刚好在 $t=0$ 之前的值）作为式(3-13)的积分下限。$f(t)$ 的 $\mathcal{L}_-$ 拉普拉斯变换表示为 $\mathcal{L}_-\{f(t)\}=F(s)$，它是复变量 $s=\sigma+j\omega$ 的函数，其中，

$$F(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{3-15}$$

被积函数中的指数衰减项在 $\sigma>0$ 时，实际上是个内在的收敛因子，也就是说，即使 $f(t)$ 在 $t\to\infty$ 时不为零，当 f 的增长速度低于指数项的增长速度且 σ 足够大时，被积函数也将趋于零。积分下限 0^- 则可以用例3.2中 $t=0$ 时刻的脉冲函数代替。由于在实际应用中 $t=0^-$ 和 $t=0$ 之间和差别往往并不会表现出来，因此在大部分应用中将 $t=0$ 时刻的负上标去掉，但是对于在 $t=0$ 时刻有脉冲输入的情况，我们依然要用到符号 $t=0^-$。

如果称式(3-15)为单边拉普拉斯变换，那么式(3-13)就是**双边拉普拉斯变换**(**two sided Laplace transform**)[①]，本书后面将用符号 $\mathcal{L}$ 表示 $\mathcal{L}_-$。

由式(3-15)中拉普拉斯变换的正式定义，可确定拉普拉斯变换的性质并计算一般时间函数的拉普拉斯变换。使用拉普拉斯变换表来分析线性系统往往要用到一般性质表和时间函数表，因此我们在附录A给出了相关内容，有了时间函数及拉普拉斯变换表和性质表，我们就可以由一些简单信号来求复杂信号的拉普拉斯变换。对于拉普拉斯变换的深入研究和更为详尽的表格，请参阅 Churchill(1972)、Campbell 和 Foster(1948)的研究。而对双边拉普拉斯变换的更多探讨见 Van der Pol 和 Bremmer(1955)，这些作者都是从下面的转换关系形式中获得时间函数：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_c-j\infty}^{\sigma_c+j\infty} F(s)e^{st}ds \tag{3-16}$$

其中 σ_c 值应选在 s 平面中 $F(s)$ 所有零极点的右边。当然在实际应用中该关系式很少用到；相反，人们会将一些复杂的拉普拉斯变换式分解成较简单的式子之和，然后分别查表求得它们相应的时间响应。

下面我们就来计算几个典型时间函数的拉普拉斯变换。

例3.5　阶跃和斜坡函数的拉普拉斯变换

求阶跃函数 $a1(t)$ 和斜坡函数 $bt1(t)$ 的拉普拉斯变换。

解：对于 $f(t)=a1(t)$，由式(3-15)可得：

$$F(s)=\int_0^{\infty} ae^{-st}dt=\frac{-ae^{-st}}{s}\bigg|_0^{\infty}=0-\frac{-a}{s}=\frac{a}{s}$$

对斜坡信号 $f(t)=bt1(t)$，同样由式3-15可得：

$$F(s)=\int_0^{\infty} bte^{-st}dt=\left[-\frac{bte^{-st}}{s}-\frac{be^{-st}}{s^2}\right]_0^{\infty}=\frac{b}{s^2}$$

这里我们用到了分部积分法

$$\int u dv = uv-\int v du$$

① 另外一种单边拉普拉斯变换为 $\mathcal{L}_+$，其积分下限为 0^+，在某些场合有时会用到。

式中，$u=bt$，$dv=e^{-st}dt$。

更为微妙的是求脉冲函数的拉普拉斯变换。

例 3.6　脉冲函数的拉普拉斯变换

求单位脉冲函数的拉普拉斯变换。

解：由式(3-15)得：

$$F(s)=\int_{0}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1 \tag{3-17}$$

正是单位脉冲函数的拉普拉斯变换，促使我们用了 $\mathcal{L}_-$ 变换而不是 $\mathcal{L}_+$ 变换。

例 3.7　正弦函数的拉普拉斯变换

求正弦函数的拉普拉斯变换。

解：我们再一次由式(3-15)得

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}=\int_{0}^{\infty}(\sin\omega t)e^{-st}dt \tag{3-18}$$

将下面的关系式

$$\sin\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$

代入式(3-18)中得：

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right)e^{-st}dt=\frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty}(e^{(j\omega-s)t}-e^{-(j\omega+s)t})dt=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

附录 A 中表 A-2 列出了基本时间函数的拉普拉斯变换。表中每一条都是如例 3.5～例 3.7 中所示的那样，直到应用拉普拉斯变换定义式(3-13)得到的。

3.1.4　拉普拉斯变换的性质

在这一部分，我们将详细介绍表 A-1 中拉普拉斯变换的重要性质，关于这些性质和相关的例子以及初值定理的证明，可参考附录 A。

(1) 可加性

拉普拉斯变换的一个非常重要的性质是它是线性的，即

$$\mathcal{L}\{\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\}=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s) \tag{3-19}$$

比例性则是可加性的一个特例

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}=\alpha F(s) \tag{3-20}$$

(2) 时延性

设函数 $f(t)$ 延时 $\lambda>0$ 个时间单位，那么其拉普拉斯变换为

$$F_1(s)=\int_{0}^{\infty}f(t-\lambda)e^{-st}dt=e^{-\lambda s}F(s) \tag{3-21}$$

由上可知 λ 个时间单位延时的效果相当于变换式乘以 $e^{-\lambda s}$。

(3) 时间变换性质

时间变换运动方程有时很有用，例如在带传动控制系统中测量毫秒级的时间时该性质的作用就显而易见了(见第10章)，若将 t 放大 a 倍，则该时间变换信号的拉普拉斯变换为

$$F_1(s)=\int_0^{\infty} f(at)e^{-st}dt=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{3-22}$$

(4) 频率变换性质

函数 $f(t)$ 在时域乘以一指数表达式(调制)对应于频率域的漂移作用

$$F_1(s)=\int_0^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-st}dt=F(s+a) \tag{3-23}$$

(5) 微分性质

信号的导数的拉普拉斯变换与原信号的拉普拉斯变换和初始条件有关：

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\}=\int_{0^-}^{\infty}\left(\frac{df}{dt}\right)e^{-st}dt=-f(0^-)+sF(s) \tag{3-24}$$

再应用式(3-24)得

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}\}=s^2F(s)-sf(0^-)-\dot{f}(0^-) \tag{3-25}$$

重复式(3-24)可得

$$\mathcal{L}\{f^m(t)\}=s^mF(s)-s^{m-1}f(0^-)-s^{m-2}\dot{f}(0^-)-\cdots-f^{(m-1)}(0^-) \tag{3-26}$$

其中 $f^m(t)$ 表示 $f(t)$ 对时间的 m 阶导数。

(6) 积分性质

假设我们要求时间函数 $f(t)$ 的积分的拉普拉斯变换，那么就有：

$$F_1(s)=\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\xi)d\xi\right\}=\frac{1}{s}F(s) \tag{3-27}$$

这意味着我们只需简单地将 $f(t)$ 的拉普拉斯变换乘以 $\frac{1}{s}$。

(7) 卷积性质

前面我们已经知道系统响应可由输入信号与系统脉冲响应的卷积来确定，也可由系统传递函数和输入拉普拉斯变换的乘积得到，下面讨论将其推广到不同的时间函数。

时域的卷积运算与频域的乘积运算相对应，假设 $\mathcal{L}\{f_1(t)\}=F_1(s)$，$\mathcal{L}\{f_2(t)\}=F_2(s)$，那么

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\int_0^{\infty} f_1(t)*f_2(t)e^{-st}dt=F_1(s)F_2(s) \tag{3-28}$$

这就意味着

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\}=f_1(t)*f_2(t) \tag{3-29}$$

相似地将得出下面的内容。

(8) 时间域乘积性质

时域中的乘积运算对应于频域中的卷积运算：

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\}=\frac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s) \tag{3-30}$$

(9) 频域微分性质

在时域乘上时间 t 对应于频域中的微分运算：

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s) \tag{3-31}$$

3.1.5 部分分式求拉普拉斯反变换

若拉普拉斯变换式 $F(s)$ 为有理式，那么求 $f(t)$ 的最容易的方法就是将 $F(s)$ 展开为许多可以在表中查到的简单项之和，完成该处理过程的基本方法称为**部分分式展开**(**partial-fraction expansion**)，考虑到有理函数 $F(s)$ 的一般的形式是两个多项式之比

$$F(s)=\frac{b_1s^m+b_2s^{m-1}+\cdots+b_{m+1}}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n} \tag{3-32}$$

将多项式因式分解，该有理函数还可以表示为因式乘积的形式

$$F(s)=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \tag{3-33}$$

这里我们将讨论具有不同极点的简单例子，拉普拉斯变换式 $F(s)$ 可表示任意实际系统的响应，其中 $m\leqslant n$，$s=z_i$ 是函数的**零点**(**zero**)，而 $s=p_i$ 是函数的**极点**(**pole**)。现在假设极点 $\{p_i\}$ 为实数或复数且各不相同，那么 $F(s)$ 可写成部分分式的形式

$$F(s)=\frac{C_1}{s-p_1}+\frac{C_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{C_n}{s-p_n} \tag{3-34}$$

下一步要确定常系数集 $\{C_i\}$，将式(3-34)两边同乘因子 $s-p_1$，得

$$(s-p_1)F(s)=C_1+\frac{s-p_1}{s-p_2}C_2+\cdots+\frac{(s-p_1)C_n}{s-p_n} \tag{3-35}$$

如果令式(3-35)两边 $s=p_1$，那么所有的 C_i 中除了第一项之外都将为零，第一项则为

$$C_1=(s-p_1)F(s)\big|_{s=p_1} \tag{3-36}$$

其他项的系数也可以用类似的形式表示

$$C_i=(s-p_i)F(s)\big|_{s=p_i}$$

这种处理方法叫做**消去法**(**cover-up method**)，因为在 $F(s)$ 的因式分解形式[式(3-33)]中，我们可以消去某个分母项，然后用 $s=p_i$ 来计算表达式剩余部分的值，从而确定 C_i，等到完成这些操作之后，时间函数 $f(t)$ 变为

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i\mathrm{e}^{p_it}1(t)$$

因为如表 A.2 中第 7 条所示，若

$$F(s)=\frac{1}{s-p_i}$$

那么

$$f(t)=\mathrm{e}^{p_it}1(t)$$

分母中存在二次因子或重根的情形参见附录 A。

例 3.8 部分分式展开：不同实根

设已计算得 $Y(s)$ 为

$$Y(s)=\frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+3)}$$

求 $y(t)$。

解：根据部分分式展开，$Y(s)$可写为

$$Y(s)=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{s+1}+\frac{C_3}{s+3}$$

利用消去法可得

$$C_1=\left.\frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=0}=\frac{8}{3}$$

类似地，得到

$$C_2=\left.\frac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)}\right|_{s=-1}=-\frac{3}{2}$$

以及

$$C_3=\left.\frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)}\right|_{s=-3}=-\frac{1}{6}$$

我们可以通过证明将各部分分式相加后还能还原为原函数来检验所得结果的正确性，对各部分分式查表之后可得解为

$$y(t)=\frac{8}{3}1(t)-\frac{3}{2}e^{-t}1(t)-\frac{1}{6}e^{-3t}1(t)$$

部分分式展开也可以用 MATLAB 中的 residue 函数来计算：

```
num = conv([1 2],[1 4]);          % form numerator polynomial
den = conv([1 1 0],[1 3]);        % form denominator polynomial
[r,p,k] = residue(num,den);       % compute the residues
```

由此可得以下结果：

```
r = [-0.1667  -1.5000 2.6667]';      p = [-3  -1 0]';      k = [ ];
```

该结果与手工计算的结果相一致，注意 MATLAB 中的 conv 函数常用于计算两个多项式相乘（函数的参数为多项式的系数）。

3.1.6　终值定理

在控制方面，拉普拉斯变换有个特别有用的性质，称为**终值定理**（**Final value theorem**），通过这一定理我们能够算出已知拉普拉斯变换的时间函数的稳态值。该定理是随着部分分式展开方法的发展而发展起来的，假设有一个信号 $y(t)$的拉普拉斯变换式 $Y(s)$有一对极点（见 3.15 节），希望由 $Y(s)$求得其终值 $y(t)$，该终值有三种可能的情况：常值、不确定或无穷。若 $Y(s)$有一对极点在 s 平面的右半部分，即该极点的实部大于零，那么 $y(t)$将增大且其极限值为无穷。若 $Y(s)$有一对极点在 s 平面的虚轴上，即 $p_i=\pm j\omega$，那么 $y(t)$将包含一条稳定正弦曲线，而其终值也将无法确定。只有一种情况下可得到非零的不变终值，若 $Y(s)$的所有极点除 $s=0$ 外均在 s 平面的左半部分，那么 $y(t)$的各项除了对应于极点 $s=0$ 的那项外，都将衰减为零，而使 $s=0$ 对应的这项在时间域为一常数。因此终值定理如下：

若 $sY(s)$ 的所有极点都位于 s 平面的左半部分，那么

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \tag{3-37}$$

附录 A 中对该关系式进行了证明。

例 3.9　终值定理

求式 $Y(s)=\dfrac{3(s+2)}{s(s^2+2s+10)}$ 所对应系统的终值。

解：应用终值定理可得

$$y(\infty) = sY(s)\,|_{s=0} = \frac{3\times 2}{10} = 0.6$$

因此当瞬态响应部分衰减到零之后，$y(t)$ 将趋于常数值 0.6。

应注意终值定理仅适用于稳定系统（见 3.6 节），若将式(3-35)用于任意 $Y(s)$，这样做可能导致错误结果，如下例所示。

例 3.10　终值定理的错误应用

求式 $Y(s)=\dfrac{3}{s(s-2)}$ 所对应信号的终值。

解：如果我们盲目地应用式(3-37)算得

$$y(\infty) = sY(s)\,|_{s=0} = -\frac{3}{2}$$

而实际上

$$y(t) = \left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}e^{2t}\right)1(t)$$

式(3-37)只求得了常数式项，显然，真正的终值应为无穷。

终值定理也可用于求系统的 **DC 增益（DC gain）**，DC 增益指系统瞬态响应分量衰减为零之后，其输出与输入（设为常值）之比，为了求 DC 增益，设有一单位阶跃输入 [$U(s)=1/s$]，利用终值定理来计算其稳态输出值。因此，对于传递函数为 $G(s)$ 的系统有

$$\text{DC 增益} = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} G(s) \tag{3-38}$$

例 3.11　DC 增益

求传递函数为 $G(s)=\dfrac{3(s+2)}{(s^2+2s+10)}$ 的系统的 DC 增益。

解：运用式(3-38)，可得

$$\text{DC 增益} = G(s)\,|_{s=0} = \frac{3\times 2}{10} = 0.6$$

3.1.7 应用拉普拉斯变换解决问题

我们可以利用附录A中所描述的性质来解微分方程，首先利用附录A中式(A-12)和式(A-13)的微分性质来求微分方程的拉普拉斯变换。然后求输出的拉普拉斯变换，并利用部分分式展开和表A-2来将输出转换为时间函数，我们将用3个例子来说明这一过程。

例 3.12 齐次微分方程的解

求微分方程 $y(t)+y(t)=0$ 的解，其中 $y(0)=\alpha,\dot{y}(0)=\beta$。

解：利用式(3-32)求得微分方程的拉普拉斯变换为

$$s^2Y(s)-\alpha s-\beta+Y(s)=0$$

$$(s^2+1)Y(s)=\alpha s+\beta$$

$$Y(s)=\frac{\alpha s}{s^2+1}+\frac{\beta}{s^2+1}$$

对上式右边两项查拉普拉斯变换表(附录A中表A-2中)可得

$$y(t)=[\alpha\cos t+\beta\sin t]1(t)$$

其中 $1(t)$ 表示单位阶跃函数。将这个解代回到原微分方程可以验证该解的正确性。

另一个例子将说明方程为非齐次时的解，也就是系统受到激励时的情况。

例 3.13 受激励微分方程的解

求微分方程 $y(t)+5\dot{y}(t)+4y(t)=3$ 的解，其中 $y(0)=\alpha,\dot{y}(0)=\beta$。

解：利用式(3-23)和式(3-24)对该微分方程的两边进行拉普拉斯变换，得

$$s^2Y(s)-s\alpha-\beta+5[sY(s)-\alpha]+4Y(s)=\frac{3}{s}$$

求解 $Y(s)$ 得

$$Y(s)=\frac{s(s\alpha+\beta+5\alpha)+3}{s(s+1)(s+4)}$$

运用消去法进行部分分式展开，有

$$Y(s)=\frac{\frac{3}{4}}{s}-\frac{\frac{3-\beta-4\alpha}{3}}{s+1}+\frac{\frac{3-4\alpha-4\beta}{12}}{s+4}$$

因此可得时间函数为

$$y(t)=\left(\frac{3}{4}+\frac{-3+\beta+4\alpha}{3}e^{-t}+\frac{3-4\alpha-4\beta}{12}e^{-4t}\right)1(t)$$

将得到的解进行二次微分，并代回原微分方程，可证明该解满足微分方程。

当初始条件为零时，方程的解将会变得非常简单。

例 3.14 零初始条件下受激励微分方程的解

求解微分方程 $y(t)+5\dot{y}(t)+4y(t)=u(t),y(0)=0,\dot{y}(0)=0,u(t)=2e^{-2t}1(t)$。

(a) 使用部分分式展开法；(b) 使用 MATLAB。

解：

(a) 对微分方程两边进行拉普拉斯变换，得

$$s^2Y(s)+5sY(s)+4Y(s)=\frac{2}{s+2}$$

求解 $Y(s)$得

$$Y(s)=\frac{2}{(s+2)(s+1)(s+4)}$$

运用部分分式展开法和消去法有

$$Y(s)=-\frac{1}{s+2}+\frac{\frac{2}{3}}{s+1}+\frac{\frac{1}{3}}{s+4}$$

因此可得时间函数为

$$y(t)=(-1e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t})1(t)$$

(b) 部分分式展开也可以用 MATLAB 中的 residue 命令来计算

```
num = 2;                     % form numerator
den = poly([-2;-1;-4]);      % form denominator polynomial from its roots
[r,p,k] = residue(num,den);  % compute the residues
```

由此可得以下结果：

r = [0.3333 −1 0.6667]′;　　p = [-4 −2 −1]′;　　k = [ ];

这个结果与我们手工计算得到的结果一致。

拉普拉斯变换法求解微分方程的主要优点是：它能定性地提供一些关于响应的信息，一旦$Y(s)$的极点值已知，我们就可以知道哪些特征将出现在其响应中，例 3.14 中极点 $s=-1$ 在响应中产生衰减项 $y=Ce^{-t}$，同样极点 $s=-4$ 产生 $y=Ce^{-4t}$项，使其衰减速度更快，如果存在极点$s=+1$，那么在响应中也将有增长项 $y=Ce^{+t}$。通过极点分布从本质上来理解系统是响应的方法非常有效，在 3.3 节中将有更进一步地阐述，控制系统设计者往往通过调整设计参数来使极点值能够给出可接受的系统响应，他们往往跳过将极点转化为实际时间响应的步骤，而是直接到设计的最后阶段。他们用不断尝试的方法(见第 5 章的介绍)来观察参数对实际系统极点位置的影响，当所设计系统的极点位置预期都能够给出可接受的系统响应时，设计者可以用一时间响应来验证所设计系统是否满足要求。当然这整个设计过程通常都由计算机来完成，因为计算机能直接用数值计算方法来解微分方程。

3.1.8 极点和零点

有理传递函数可以描述为两个关于 s 的多项式之比

$$H(s)=\frac{b_1s^m+b_2s^{m-1}+\cdots+b_{m+1}}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}=\frac{N(s)}{D(s)} \tag{3-39}$$

或因式分解成零极点的形式

$$H(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \tag{3-40}$$

K 称为传递函数的增益。分子中 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 为系统的有限**零点(zero)**。零点在 s 平面中位于使传递函数的值为零处，即若 $s = z_i$，则

$$H(s)\mid_{s=z_i} = 0$$

零点还和系统的信号传输性质相关，因此也称为系统的传输零点。系统本身具有阻滞零点频率的能力。若系统受到非零输入 $u=u_0e^{s_0t}$ 的激励，如果 s_0 不是系统极点，那么其输出在 $s_0=z_i$ 处频率的值也将恒为零，[①]即 $y\equiv 0$，零点对系统的瞬态属性也具有重要影响(见 3.5 节)。

而分母的根 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 则称为系统的**极点(pole)**[②]。极点位于 s 平面中传递函数幅值为无穷大处，即若 $s=p_i$，则

$$\mid H(s)\mid_{s=p_i} = \infty$$

我们将在 3.7 节看到，系统的极点决定了系统稳定性，也决定了系统的自然属性或非强迫属性，即系统的**模式(mode)**，零点和极点可能为复数量，我们可将它们的位置标识在复平面中，我们将这样的复平面称为 s 平面。零极点分布是反馈控制系统设计的关键，对控制系统设计具有重要的意义。若 $m<n$，由于当 s 接近无穷时，传递函数趋于零，所以系统有 $n-m$ 个零点位于无穷远处，若将位于无穷远处的零点也计算在内，那么系统将具有相同的零极点数，实际的物理系统不可能有 $n<m$，否则系统将在 $\omega=\infty$ 处有无穷大响应，若 $z_i=p_i$ 那么传递函数的分子、分母将会抵消，这将导致一些不可预知的属性(将在第 7 章讨论。)

3.1.9　用 MATLAB 分析线性系统

分析一个系统首先需要写出(建立)描述该物理系统动态性能的时域微分方程组，如第 2 章中所描述的，这些方程式可以由支配这些系统的物理定律来描述，例如：刚体动力学、热力学和电学等。而下一步则要决定系统的输入和输出，然后计算描述动态系统输入输出属性的传递函数，本章开始部分说明了线性动态系统可用其微分方程的拉普拉斯变换来描述——即传递函数。传递函数也可表示成式(3-39)中两个多项式之比的形式，或为式(3-40)中因式分解的零极点形式，通过分析传递函数，我们就能定性和定量地确定系统的动态特性。一种提取有用系统信息的方法是求出零极点分布并推导出可以确定的系统动态特性；另一种方法是求得系统对典型激励信号如脉冲信号、阶跃信号、斜坡信号和正弦信号的响应，并以之来确定该系统的时域特性；还有一种方法是应用部分分式展开的附录 A 中的表 A-1 和表 A-2 来分析计算拉普拉斯反变

① 恒为零即意味着输入以及其各阶导数在 $t>0$ 时都为零。

② 极点的含义可以将函数可视化为三维图形来理解，将 s 的实部和虚部画在 x 轴和 y 轴方向，而传递函数的幅值画在 z 轴方向。单个极点的时候，所得的三维图看起来像一个帐篷，而帐篷的支撑点就是传递函数的极点。

换，以此来确定系统的时间响应，当然这也可以用来求任意输入下的系统响应。

现在我们将对第 2 章例子中的物理系统进行上述运算来说明这种分析方法，这些物理系统按难度递增的顺序排列。我们将在系统的不同描述方法之间切换，包括：传递函数、零极点等，以 MATLAB 作为我们的计算工具，它能接受不同形式描述的系统，如传递函数和零极点，并在 MATLAB 中记为 **tf** 和 **zp**，不仅如此，它还能将系统某种形式的描述转换为另外形式。

例 3.15　用 MATLAB 求巡航控制系统的传递函数

求例 2.1 中巡航控制系统的输入 u 和汽车位置 x 之间的传递函数。

解：由例 2.1 得到系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{0s^2+0s+0.001}{s^2+0.05s+0}=\frac{0.001}{s(s+0.05)}$$

在 MATLAB 中分子多项式的系数表示为行向量 **num** 而分母多项式的系数表示为 **den**，则这个例子的结果为：

num = [0　0　0.001]　和　den = [1　0.05　0]

我们也可用 MATLAB 的命令 printsys(num,den) 来得到系统的传递函数，而系统的零极点表示可以用下面的命令得到

[z, p, k] = tf2zp(num, den)

这可以得到传递函数的因式分解形式，得到 $z=[\ ]$，$p=[\ 0\ \ -0.05]'$ 和 $k=0.001$。

例 3.16　用 MATLAB 求直流电机的传递函数

在例 2.11 中，设 $J_m=0.01\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$，$b=0.001\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$，$K_t=K_e=1$，$R_a=10\Omega$ 和 $L_a=1\text{H}$，求：

(a) 输入 v_a 与输出 θ_m 之间的传递函数。

(b) 输入 v_a 与输出 $\omega=\dot{\theta}_m$ 之间的传递函数。

解：

(a) 将上述参数代入例 2.11 中，则我们可以得到系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{100}{s^3+10.1s^2+101s}$$

在 MATLAB 中我们分别用行向量 **numa** 和 **dena** 来表示传递函数的分子与分母的系数。则这里得到：

numa = [0　0　0　100]　和　dena = [1　10.1　101　0].

可以用下面的 MATLAB 命令来得到系统的零极点表达

[z, p, k] = tf2zp(numa, dena)

得到

$z=[\ ]$，　$p=[\ 0\quad -5.0500\quad +8.6889\text{j}\quad -5.0500\quad -8.6889\text{j}]'$，　$k=100$

可得传递函数因式分解的形式为

$$H(s)=\frac{100}{s(s+5.05+\text{j}8.6889)(s+5.05-\text{j}8.6889)}$$

(b) 我们将角速度 $\dot{\theta}_m$ 作为输出，那么得到 numb=[0 0 100]，denb=[1 10.1 101]，这样得

到传递函数

$$G(s)=\frac{100s}{s^3+10.1s^2+101s}=\frac{100}{s^2+10.1s+101}$$

因为 $\dot{\theta}_m$ 是 θ_m 的导数，则 $\mathcal{L}\{\dot{\theta}_m\}=s\mathcal{L}\{\theta_m\}$，对于单位阶跃输入 v_a，我们可以用 MATLAB 来计算阶跃响应（回顾例 2.1）。

```
numb=[0 0 100];          % form numerator
denb=[1 10.1 101];       % form denominator
sysb=tf(numb,denb);      % define system by its numerator and denominator
t=0:0.01:5;              % form time vector
y=step(sysb,t)           % compute step response;
plot(t,y)                % plot step response
```

系统产生稳态不变的角速度，如图 3-3 所示，由于系统并不具有单位 DC 增益，故曲线存在轻微的偏移。

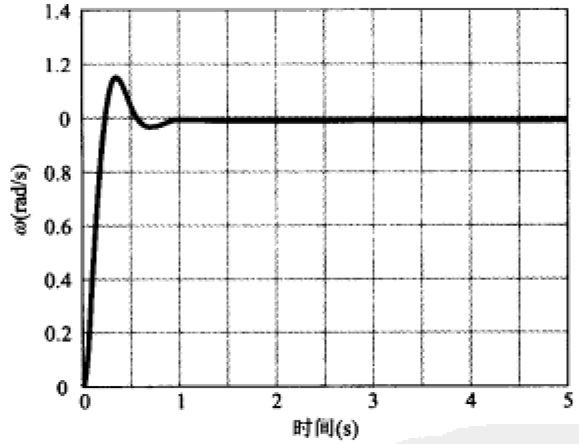


图 3-3　直流电机瞬态响应

当动态系统用单个多阶的微分方程进行描述时，由微分方程求传递函数多项式往往比较简单，因此在下面的例子中你将会看到最好能直接根据系统的传递函数来确定系统。

例 3.17　MATLAB 变换

求微分方程如下所示系统的传递函数：

$$\ddot{y}+6\dot{y}+25y=9u+3\dot{u}$$

解：利用式(3-22)和式(3-23)给出的微分定理，可得

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3s+9}{s^2+6s+25}$$

MATLAB 命令为：

```
numG = [3 9];        % form numerator
denG = [1 6 25];     % form denominator
```

如果我们想得到系统为因式分解形式，那么可以通过将这个传递函数形式进行变换得到。因此，MATLAB 命令

```
% convert from numerator-denominator polynomials to pole-zero form
[z,p,k] = tf2zp(numG,denG)
```

将得到 $z=-3$，$p=[-3+4j \quad -3-4j]'$，$k=3$。也就是说系统的传递函数可以写成下面的形式：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3(s+3)}{(s+3-4j)(s+3+4j)}$$

当然我们也可以用 MATLAB 命令 zp2tf 来将系统的零极点表达形式转化为传递函数的形式。

```
% convert from pole-zero form to numerator-denominator polynomials
[numG,denG]=zp2tf(z,p,k)
```

这个例子中，$z=[-3]$，$p=[-3+i*4; -3-i*4]'$，$k=[3]$，由此可以得到传递函数的分子分母多项式形式。

例 3.18 利用 MATLAB 求卫星系统的传递函数

(a) 求例 2.3 中输入 F_c 与卫星姿态角 θ 之间的传递函数。

(b) 确定系统受到从 $t=5$ s 开始，持续 0.1 s 强度为 25 N 的脉冲激励下的响应，假定 $d=1$ m，$I=5000\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$。

解：

(a) 由例 2.3 得 $\frac{d}{I}=\frac{1}{5000}=0.0002\left[\frac{\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{m}^2}\right]$，这也就意味着系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{0.0002}{s^2}$$

这一结果我们也可以从例子中观察到，我们可以将传递函数的分子分母的系数分别用行向量表示为：**num** 和 **den**，则这个例子中可以得到：

numG = [0 0 0.0002] 和 denG = [1 0 0].

(b) 下面的语句就可以计算出系统对强度 25 N 持续时间为 0.1 s 的脉冲激励的响应。

```
numG=[0   0   0.0002];                          % form the transfer function
denG=[1   0   0];
sysG=tf(numG,denG);                            % define system by its transfer function
t=0:0.01:10;                                   % set up time vector with dt = 0.01 sec
% pulse of 25N, at 5 sec, for 0.1 sec duration
u1=[zeros(1,500) 25*ones(1,10) zeros(1,491)];  % pulse input
[y1]=lsim(sysG,u1,t);                          % linear simulation
ff=180/pi;                                     % conversion factor from radians to degrees
y1=ff*y1;                                      % output in degrees
plot(t,u1);                                    % plot input signal
plot(t,y1);                                    % plot output response
```

在 $t=5$ s 时系统受到一短脉冲(冲击输入)激励，其作用相当于在 $t=5$ s 时给系统加上一非零角 θ_0，由于系统无阻尼，故在不受任何约束情况下，该系统将以在 $t=5$ s 时所给出的恒定角速度漂移，输入的时间响应如图 3-4a 所示，角漂移 θ 如图 3-4b 所示。

我们给系统在 $t=5$ s 时加上与前面相同的正脉冲激励，而 $t=6.1$ s 时加上幅值相同和持续时间相同的负脉冲激励[见图 3-5a 中冲击输入]，那么系统的姿态响应就如图 3-5b 中所示，这就说明了实际应用中卫星姿态是如何控制的，相关的其他 MATLAB 语句为：

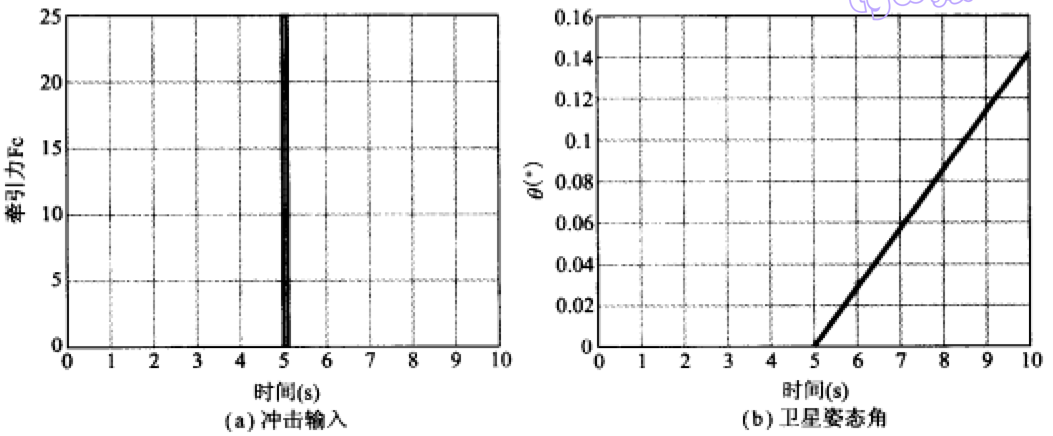


图 3-4 卫星的瞬态响应

```
% double pulse input
u2=[zeros(1,500) 25*ones(1,10) zeros(1,100) -25*ones(1,10) zeros(1,381)];
[y2]=lsim(sysG,u2,t);        % linear simulation
plot(t,u2);                  % plot input signal
ff=180/pi;                   % conversion factor from radians to degrees
y2=ff*y2;                    % output in degrees
plot(t,y2);                  % plot output response
```

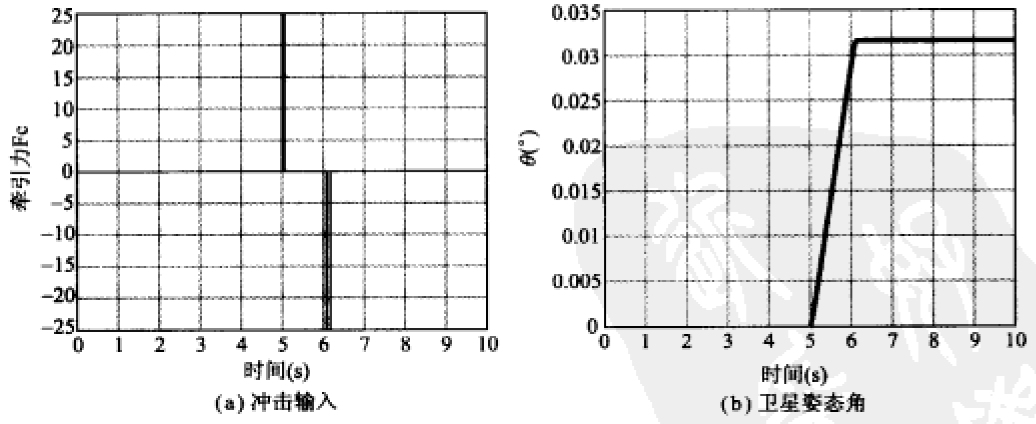


图 3-5 卫星的瞬态响应(双脉冲)

3.2 系统模型图

3.2.1 框图

要获得系统传递函数,我们需要得到系统运动方程的拉普拉斯变换形式,并求解

输入与输出间的关系式。在许多控制系统中给出的系统方程要求，各部分除了部分输入输出外就没有其他相互作用，在这种情况下，类似于第 1 章图 1-2 中的用来描述数学关系的框图就显得比较容易了。将系统各部分的传递函数置于方框内，各部分之间的输入输出关系则用线和箭头表示，然后通过框图化简来求解方程，这往往比代数方式处理更简单，且能提供更多信息。尽管这两种方法在许多方面可能相当，图 3-6 所示为三种基本框图画法，我们很容易想到将各个方框做单个电子放大器，而其传递函数印在方框内，方框之间的相连点包括相加点。在相加点处任意信号都可加到一起，相加点用一内含符号 Σ 的圆来表示，图 3-6a 中传递函数为 $G_1(s)$的方框与传递函数为 $G_2(s)$的方框串联，总的传递函数为积项 G_1G_2，图 3-6b 中两系统并联，它们的输出相加得到总的输出。总的传递函数为 G_1+G_2，这些图都是由描述它们的方程推得。

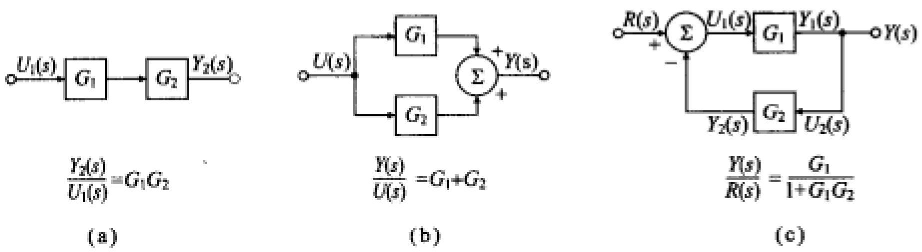


图 3-6 三个基本的框图

图 3-6c 所示为较复杂的情况，这两个方框以反馈形式相连以便互为输入，若反馈 $Y_2(s)$被减去，如图所示，那么称该反馈为**负反馈**(**negative feedback**)，后面将会看到负反馈往往是系统稳定所要求的，现在我们将解方程，并将结果显示在框图中，方程为

$$U_1(s)=R(s)-Y_2(s)$$
$$Y_2(s)=G_2(s)G_1(s)U_1(s)$$
$$Y_1(s)=G_1(s)U_1(s)$$

它们的解为

$$Y_1(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}R(s) \tag{3-41}$$

我们可以用下面的规则来表示解：

单闭环负反馈系统的增益可由前向增益除以 1 与回路增益之和的商给出。

当反馈为加而不是减时，我们称之为**正反馈**(**positive feedback**)，在这种情况下系统增益为前向增益除以 1 与回路增益之和。

图 3-6 所给出的三个基本情况结合起来之后，经过多次化简，可求解框图所定义的任意传递函数，然而当拓扑结构很复杂时，操作起来就非常枯燥而且容易出错。图 3-7 所示框图代数关系的例子是对图 3-6 的补充，图 3-7a 和图 3-7b 说明了框图的结构在不改变其数学关系的情况下是怎么进行变换的，图 3-7c 所示为如何将一般系统(左侧)变换成反馈路径上没有系统元件的系统，即我们常指的**单位反馈系统**(**unity feedback system**)。

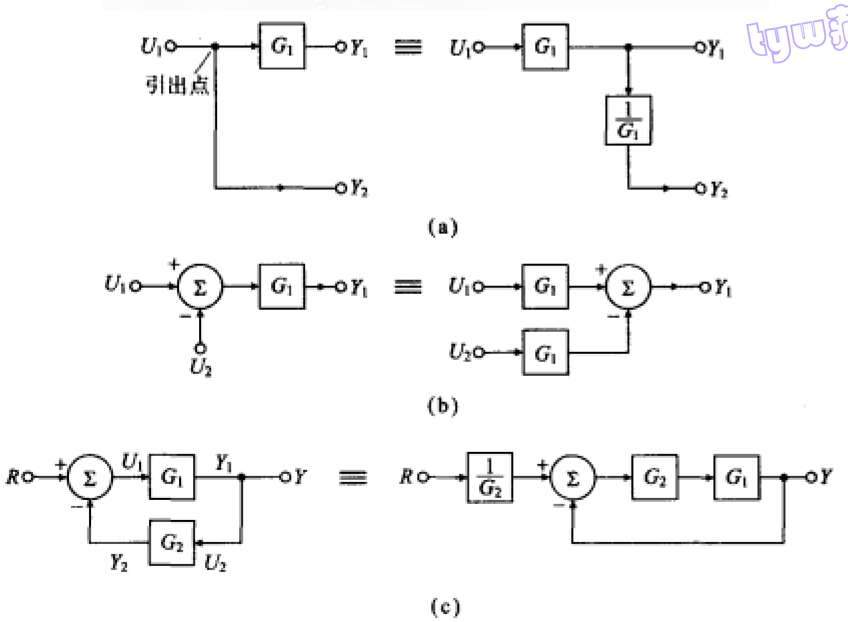


图 3-7　框图代数运算

无论何种情况下，化简拓扑图的基本原则是必须正确地保持框图剩余变量之间的关系与化简前相同，相对于基本线性方程的代数运算来说，框图化简是一种通过消去变量求解方程的图示法。

例 3.19　简单框图的传递函数

求图 3-8 所示系统的传递函数。

解：首先化简框图，将控制器并联的路径上合并，所得结果如图 3-8b 所示，然后我们再用反馈规则得闭环传递函数为：

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{2s+4}{s^2}}{1+\frac{2s+4}{s^2}}=\frac{2s+4}{s^2+2s+4}$$

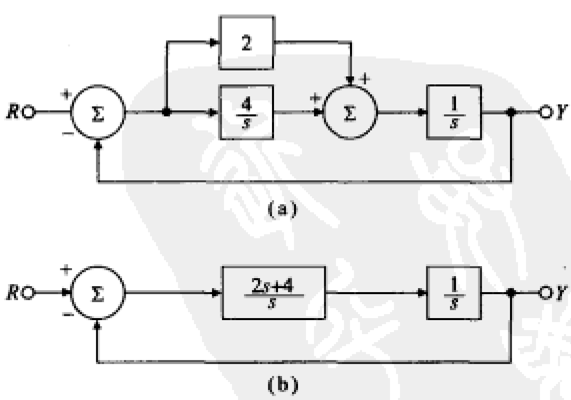


图 3-8　二阶系统框图

例 3.20　框图的传递函数

求图 3-9a 所示系统的传递函数。

解：首先化简框图，应用式(3-41)的规则。将包含 $G_1(s)$ 和 $G_3(s)$ 的反馈环用与它们等效的传递函数代替，注意这是个正反馈环，结果如图 3-9b 中所示。下一步将 $G_2(s)$ 前的引出点移到 $G_2(s)$ 的输出处（见图 3-9a），如图 3-9c 所示。左边的负反馈与右边的子系统串联，而右边子系统由两个并联的块 $G_5(s)$ 和 $G_6(s)/G_2(s)$ 组成，应用图 3-6 给出的三个化简法则，求得总的传递函数为：

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{G_1G_2}{1-G_1G_3}}{1+\frac{G_1G_2G_4}{1-G_1G_3}}\left(G_5+\frac{G_6}{G_2}\right)=\frac{G_1G_2G_5+G_1G_6}{1-G_1G_3+G_1G_2G_4}$$

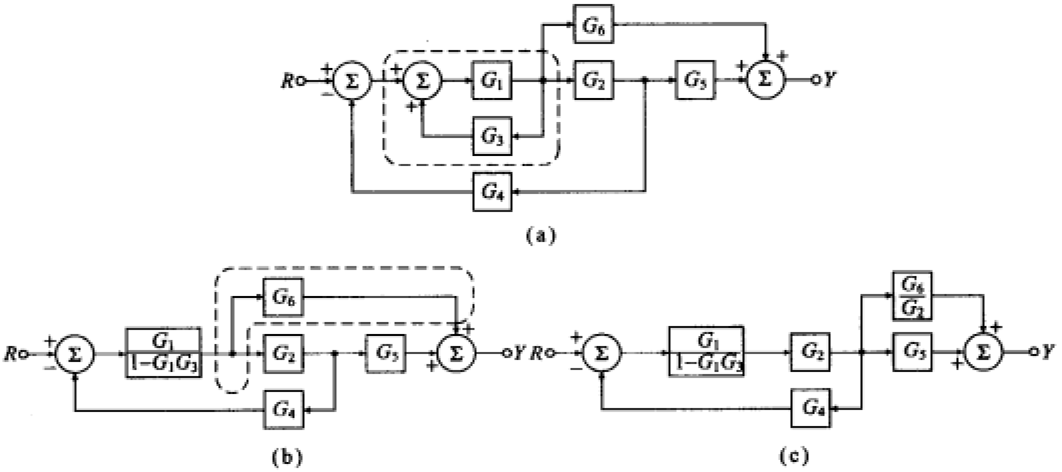


图 3-9 框图化简举例

正如我们所看到的，给定代数方程的系统可以用框图来描述，框图可以用方框来表示各个传递函数，并且具有与系统方程相对应的相互连接关系。框图能够方便地将系统可视化为相互关联的子系统的集合，而这些相互关联的子系统强调了系统变量之间的关系。

3.2.2 利用 MATLAB 进行框图化简

若控制系统中各个部分的传递函数独立存在，就可以用 MATLAB 命令：series、parallel 和 feedback 来计算整个系统的传递函数，它们可分别用来计算有两个组成方框的传递函数，这两个方框可分别为串联、并联和反馈配置，下面简单的的例子说明了它们的用法。

例 3.21 使用 MATLAB 求简单系统的传递函数

用 MATLAB 再求一次图 3-8a 中框图的传递函数。

解：将图 3-8a 中各个模块的传递函数表示成图 3-10 所示的形式，然后用以下语句将并联块 G1 和 G2 合并。

```
num1=[2];                     % form G1
den1=[1];
sysG1=tf(num1,den1);          % define subsystem G1
num2=[4];                     % form G2
den2=[1 0];
sysG2=tf(num2,den2);          % define subsystem G2
% parallel combination of G1 and G2 to form subsystem G3
sysG3=parallel(sysG1,sysG2);
```

然后再将新得到的 G3 和 G4 串联合并：

```
num4=[1];                    % form G4
den4=[1 0];
sysG4=tf(num4,den4);         % define subsystem G4
sysG5=series(sysG3,sysG4);   % series combination of G3 and G4
```

最后用下面的语句完成整个反馈系统的化简：

```
num6=[1];                              % form G6
den6=[1];
sysG6=tf(num6,den6)                    % define subsystem G6
[sysCL]=feedback(sysG5,sysG6,-1)       % feedback combination of G5 and G6
```

MATLAB 得到结果 sysCL 为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{2s+4}{s^2+2s+4}$$

这个结果与用框图化简得到的结果相同。

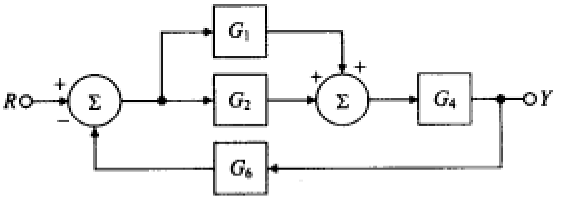


图 3-10　框图化简举例

3.3　极点配置的影响

由现有可用的任意一种方法确定传递函数后，我们就可以开始分析系统的响应了，当系统方程是联立常微分方程组(Ordinary Differential Equation，ODE)时，系统传递函数可化为多项式之比的形式，即

$$H(s)=b(s)/a(s)$$

假设 b 和 a 没有公因子(通常也是这样)，那么 $a(s)=0$ 处有 s 值表示 $H(s)$ 为无穷大时的点，如我们在 3.1.5 节看到的那样，这些 s 值称为 $H(s)$ 的极点。$b(s)=0$ 处的 s 值为 $H(s)=0$ 的点，所对应的 s 点称为零点，零点对瞬态响应中的影响将在 3.5 节进行讨论。除了常数乘法器之外，这些零点和极点就完全可以描述系统的传递函数 $H(s)$，由于系统脉冲响应由其传递函数所对应的时间函数给定，因此也称系统脉冲响应为自然响应(**natural response**)。我们可以用零极点来计算相应的时间响应，然后将 s 平面中的极点分布与时间响应联系起来，例如，对 $H(s)$ 进行部分分式展开，就能由极点确定系统的脉冲响应中所包含的信号类型。对一阶系统的极点

$$H(s)=\frac{1}{s+\sigma}$$

由表 A-2 第 7 条可知其脉冲响应为指数函数，即

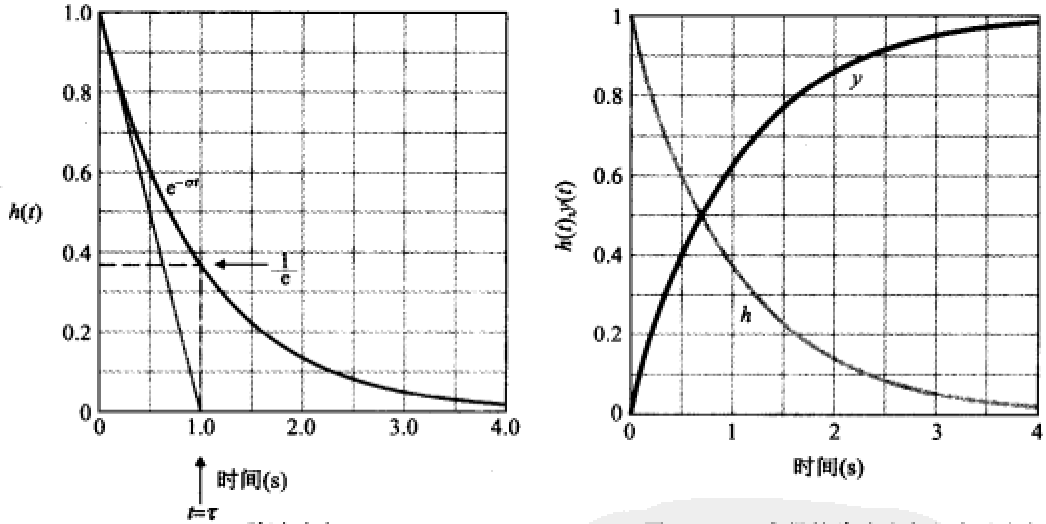
$$h(t)=e^{-\sigma t}1(t)$$

当 $\sigma>0$ 时，极点处于 $s<0$ 区域，上式中指数表达式是衰减的，我们可以说该脉冲响应是**稳定的**(**stable**)；当 $\sigma<0$ 时，极点位于原点右边，此时指数表达式随时间增大，该脉冲响应是**不稳定的**(**unstable**)(3.7 节)。图 3-11a 所示为一典型稳态响应，其**时间常数**(**time constant**)定义为

$$\tau=1/\sigma \tag{3-42}$$

在该时刻脉冲响应值为初始值的 1/e，因此它可用于度量系统响应衰减率。图 3-11中直线所对应的是 $t=0$ 时刻指数曲线上的切线，与时间轴交于 $t=\tau$ 处，指数函数的这一特性在绘制时间响应图或检验计算结果方面很有用。

图 3-11b 所示为用 MATLAB 得到的一阶系统的脉冲响应和阶跃响应。



(a) 脉冲响应　　(b) 用MATLAB求得的脉冲响应和阶跃响应

图 3-11　一阶系统的响应

例 3.22　极点为实数的响应

联系如下系统的时间响应和极点分布：

$$H(s)=\frac{2s+1}{s^2+3s+2} \tag{3-43}$$

解：分子为：$b(s)=2\left(s+\frac{1}{2}\right)$

分母为：$a(s)=s^2+3s+2$

$=(s+1)(s+2)$

因此 $H(s)$ 的极点位于 $s=-1$ 和 $s=-2$ 处，一个(有限的)零点位于 $s=-\frac{1}{2}$ 处，应用 MATLAB 命令 pzmap(num,den) 可画出 s 平面上该系统的零极点分布图，从而得到该系统传递函数的

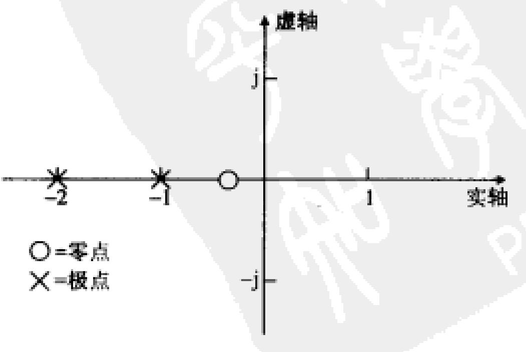


图 3-12　s 平面图极点用叉表示，零点用圆圈表示

完整描述(见图3-12)。

```
num=[2 1];
den=[1 3 2];
```

$H(s)$的部分分式展开为

$$H(s)=-\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s+2}$$

由表A-2可查得$H(s)$中各项的拉普拉斯反变换，从而可求得系统输入为一脉冲时的时间函数$h(t)$，在这个例子中

$$h(t)=\begin{cases}-e^{-t}+3e^{-2t}, & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{3-44}$$

我们可以看到$h(t)$中各部分的波形，其中e^{-t}和e^{-2t}来源于极点$s=-1$和$s=-2$，对于更复杂的系统也是如此。总而言之，系统自然响应的各部分波形取决于传递函数的极点分布。

极点分布和对应的自然响应图见图3-13，图中还有其他的极点分布，包括很快将要讨论的复数极点。在部分分式展开过程中分子的作用是它可以影响各部分分式项的系数的大小，由于e^{-2t}衰减得比e^{-t}快，因此极点$s=-2$对应的信号衰减得比极点$s=-1$对应的信号快，简而言之，就是说在极点$s=-2$比极点$s=-1$快，通常在s平面的左半部分，离虚轴较远的极点对应的自然信号衰减得比离虚轴较近的极点所对应的信号要快。若极点位于s平面右半部分，即s值是正值，其响应为增长的指数函数，因而不稳定。图3-14中快速项部分$3e^{-2t}$，在刚开始的一段时间里起主导作用而$-e^{-t}$项后面才起主导作用。

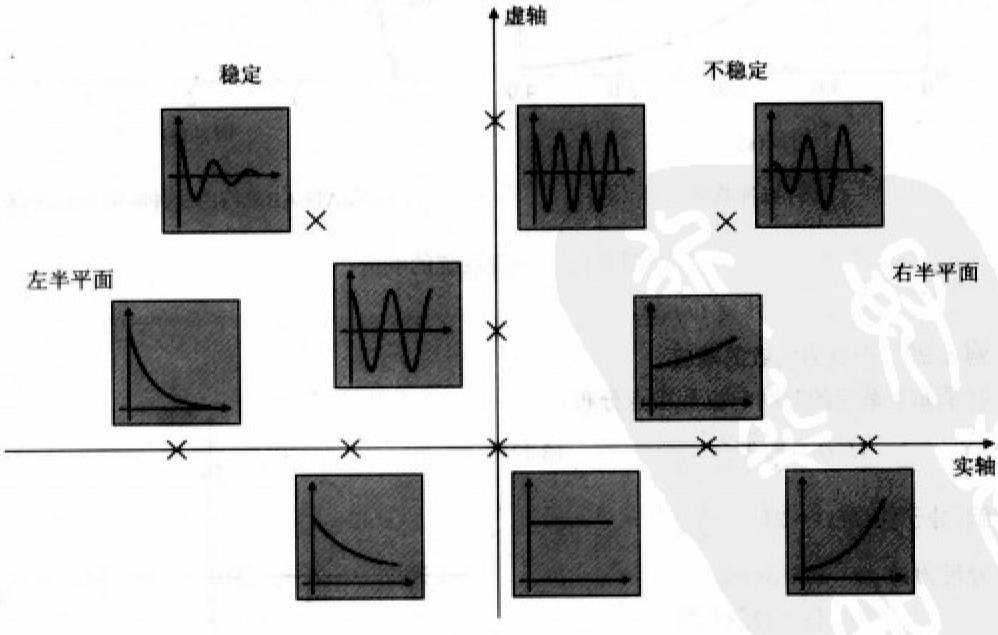


图3-13　与s平面上各点对应的时间函数

举该例的目的是为了说明极点分布与响应特性之间的联系，通过求$H(s)$各项的拉普拉斯反变换，并对之检查之后，便可得到二者的关系。然而，若只想简单地画出这个例子的脉冲响应，比较快的方法是使用MATLAB指令：

```
numH = [2 1];              % form numerator
denH = [1 3 2];            % form denominator
sysH=tf(numH,denH);        % define system from its numerator and denominator
impulse(sysH);             % compute impulse response
```

结果如图 3-14 所示。

复数极点一般可以由其实部和虚部来定义为

$$s=-\sigma\pm j\omega_d$$

这意味着若 σ 为正，该极点便具有负实部，由于复数极点往往以复数共轭对形式出现，因此对应的分母为

$$a(s)=(s+\sigma-j\omega_d)(s+\sigma+j\omega_d)=(s+\sigma)^2+\omega_d^2 \tag{3-45}$$

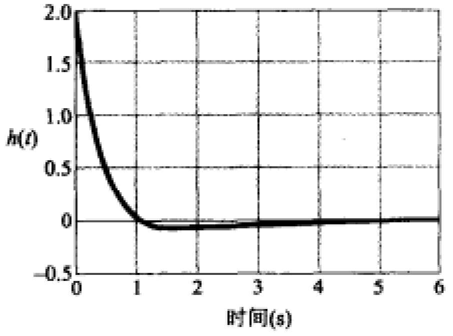


图 3-14 例 3.22[式(3-43)]的脉冲响应

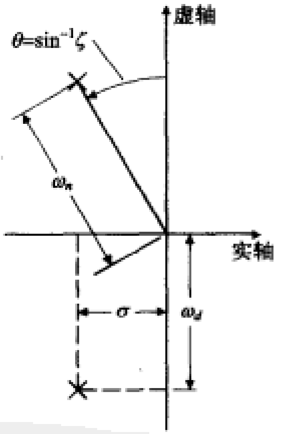


图 3-15 有一对复数极点的 s 平面

由微分方程所求得的传递函数通常写成多项式的形式

$$H(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{3-46}$$

将式(3-45)相乘展开后与式(3-46)中的 $H(s)$ 的分母系数作比较，可找到参数之间的对应关系为

$$\sigma=\zeta\omega_n \quad 和 \quad \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{3-47}$$

其中参数 ζ 称为**阻尼比(damping ratio)**①，ω_n 为**无阻尼自然频率(undamped natural frequency)**。在 s 平面中该传递函数的极点位于半径为 ω_n，角速度为 $\theta=\sin^{-1}\zeta$ 处，如图 3-15所示，因此阻尼比将阻尼水平表示成极点为实数时的临界阻尼分量，在直角坐标中，极点位于 $s=-\sigma\pm j\omega_d$ 处，当 $\zeta=0$ 时，系统为无阻尼，此时 $\theta=0$，阻尼自然频率与无阻尼自然频率相等，即 $\omega_d=\omega_n$。

---

① 在通信和滤波工程中，标准二阶函数可写成 $H=1/[1+Q(s/\omega_n+\omega_n/s)]$，这里 ω_n 称为带中心，而 Q 称为质因子。与式(3-46)相比较，可得 $Q=1/2\zeta$。

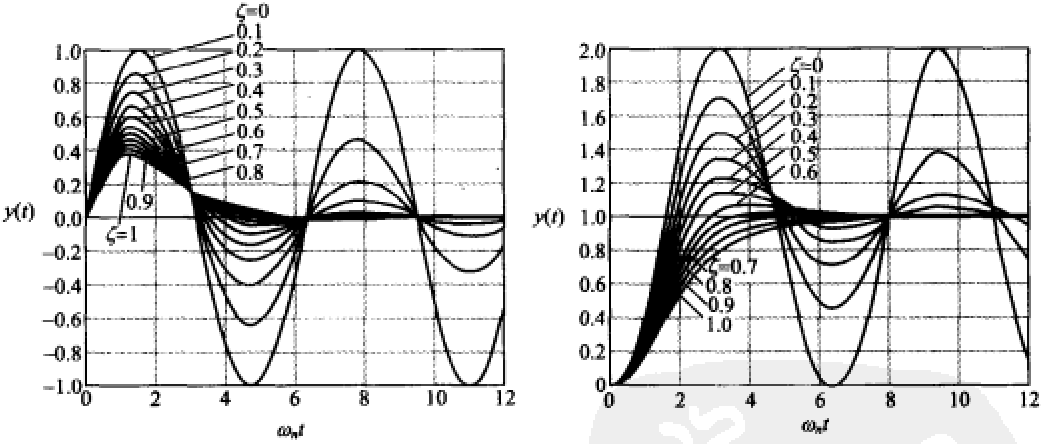
要用表 A-2 求复杂传递函数的时间响应，最简单的方法是将 $H(s)$ 写成式(3-45)的复数极点形式，那么其时间响应也能直接由表 A-2 得到，而式(3-46)又可写为

$$H(s)=\frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

因此，由表 A-2 中第 20 条和式(3-47)的定义可得系统的脉冲响应为

$$h(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\sigma t}(\sin\omega_d t)1(t)$$

图 3-16a 是对应于不同 ζ 值的 $h(t)$ 图，其中时间已与非阻尼自然频率 ω_n 进行了归一化。注意实际频率 ω_d 随阻尼比增大有轻微下降，还要注意的是过低的阻尼比会使系统产生振荡，而大阻尼（ζ 接近于 1）的响应没有振荡，图 3-13 中所画的这些响应定性地说明了 s 平面中极点位置变化对脉冲响应的影响。你也很快就会发现，对一个控制系统设计者而言，记住图 3-13 中的内容就能很快地理解极点位置的变化是如何影响时间响应的。



(a) 脉冲响应　　　　(b) 阶跃响应

图 3-16　与 ζ 相关的二阶系统响应

图 3-17 所示为三个极点的分布，相应的脉冲响应示于图 3-16a，极点负实部中 σ 决定了图3-18中与正弦曲线相乘的指数包络线衰减率。注意，若 $\sigma<0$（极点位于右半平面 RHP)，那么自然响应将随时间增长，因此如前面定义的那样，系统是不稳定的；若 $\sigma=0$，自然响应既不增长也不衰减，因此其稳定性有待讨论；若 $\sigma>0$，自然响应衰减，因此系统稳定的。

观察 $H(s)$ 的阶跃响应也很有意思，$H(s)$ 阶跃响应是指单位阶跃输入 $u=1(t)$ 时的系数，$H(s)$ 的响应，其中 $U(s)=1/s$，阶跃响应的拉普拉斯变换为 $Y(s)=H(s)U(s)$，由表 A-2 第 21 条便可得该式，图 3-16b 所画的对于不同的 ζ 值的 $y(t)$。该图说明了脉冲响应的基本瞬态响应特性很好地延续到阶跃响应中，二者不同之处在于阶跃响应的终值是一指定的单位阶跃。

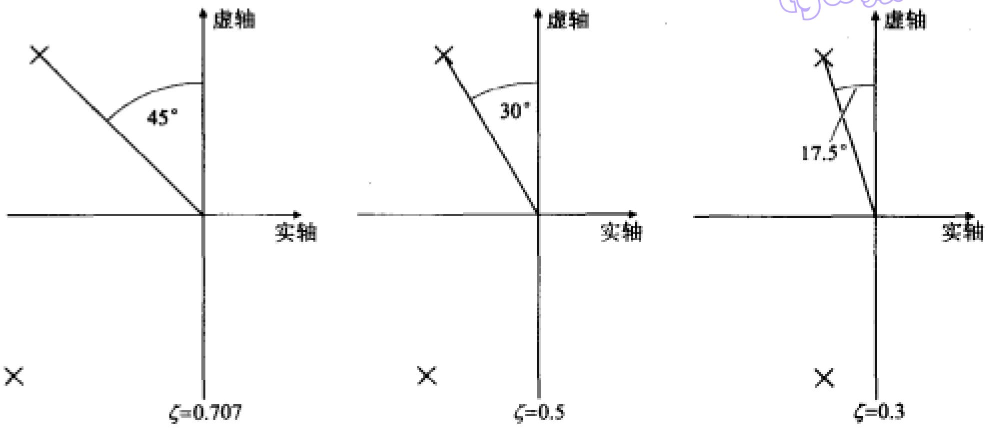


图 3-17 对应于三个 ζ 值的极点分布

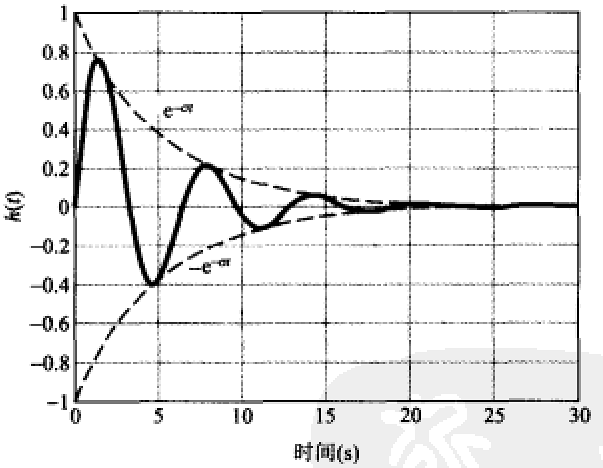


图 3-18 指数函数包络的二阶系统响应

例 3.23 振荡时间响应

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+5} \tag{3-48}$$

讨论极点和系统脉冲响应之间的关系，并准确地求其脉冲响应。

解：由式(3-46)给出的 $H(s)$ 可得

$$\omega_n^2 = 5 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{5} = 2.24\ \text{rad/s}$$

和

$$2\zeta\omega_n = 2 \Rightarrow \zeta = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447$$

这就意味着大约为 2 rad/s 的频率具有非常小的振荡，为了得到精确的响应，调整 $H(s)$ 使其分母为式(3-45)那样的形式：

$$H(s)=\frac{2s+1}{s^2+2s+5}=\frac{2s+1}{(s+1)^2+2^2}$$

由上式可知传递函数的极点为复数，其实部为－1，虚部为 ±2j，表 A-2 中有两条，第 19 条和第 20 条与该分母相符，将上式右边拆成两部分，以使它们能与表中这两条的分母相匹配

$$H(s)=\frac{2s+1}{(s+1)^2+2^2}=2\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}-\frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

则脉冲响应为

$$h(t)=(2e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t)1(t)$$

图 3-19 为系统的脉冲响应图，该图说明了包络线如何削弱正弦曲线 $2\cos 2t$，以及由 $\frac{1}{2}\sin 2t$ 项所引起的小相移。与前面的例子一样，快速求脉冲响应的方式是使用以下 MATLAB 指令，结果如图 3-19 所示。

```
numH = [2 1];              % form numerator
denH = [1 2 5];            % form denominator
sysH=tf(numH,denH);        % define system by its numerator and denominator
t=0:0.1:6;                 % form time vector
y=impulse(sysH,t);         % compute impulse response
plot(t,y);                 % plot impulse response
```

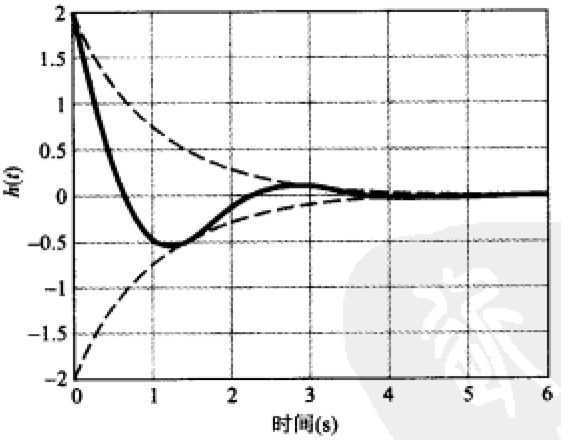


图 3-19 例 3.23 的系统响应

3.4 时域特性

控制系统设计指标往往涉及与系统时间响应相关的某些要求，对阶跃响应的要求可用图 3-20 中所示的标量表示：

(1) **上升时间(rise time)**t_r 为系统响应首次到达新设定点附近的时间；

(2) **调整时间(settling time)**t_s 为系统瞬态衰减的时间；

(3) **超调量(overshoot)**M_p 为系统响应超过终值的那部分最大值除以系统响应终

值(往往表示百分数);

(4) **峰值时间(peak time)**t_p 为系统到达最大超调点的时间。

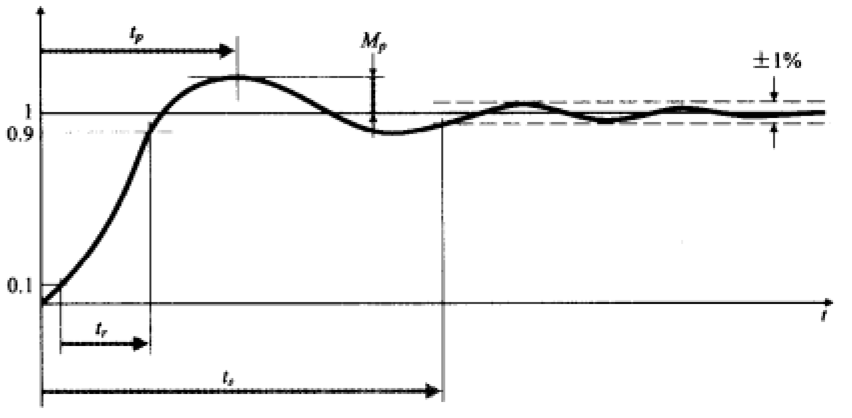


图 3-20 上升时间 t_r、调节时间 t_s 和超调量 M_p 的定义

3.4.1 上升时间

对于二阶系统来说,图 3-16b 所示的时间响应中有关指标的信息太复杂而很难记住,除非将其转化为一种较简单的形式。根据图 3-20 给出的定义,仔细观察这些曲线,我们可以将这些曲线与极点分布参数 ζ 和 ω_n联系起来。例如,几乎所有的曲线都在同一时间上升,若考虑 $\zeta=0.5$ 的曲线作为平均水平,则由 $y=0.1$ 到 $y=0.9$ 的时间大约是 $\omega_n t_r=1.8$,因此可以说

$$t_r \cong \frac{1.8}{\omega_n} \tag{3-49}$$

虽然还可以通过将阻尼比的影响考虑在内,该关系可以更完整些,而记得式(3-49)是如何应用的则非常重要,但是这对无零点的二阶系统来说才是准确的,对于其他系统来说它只是对 t_r和 ω_n关系的粗略估计。从控制系统设计来说我们所分析的大部分系统都要比纯二阶系统复杂,因此设计者用式(3-49)只能进行粗略估算。

3.4.2 超调量和峰值时间

我们对超调量 M_p可以做更多的分析,通过计算可知超调量发生在系统响应的导数为零时,图 3-16b 中曲线的时间函数可由 $H(s)/s$ 的拉普拉斯反变换求得

$$y(t)=1-e^{-\sigma t}\left(\cos\omega_d t+\frac{\sigma}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$$

其中 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 和 $\sigma=\zeta\omega_n$,用三角变换式重写上面的式子得

$$A\sin(\alpha)+B\cos(\alpha)=C\cos(\alpha-\beta)$$

或者
$$C=\sqrt{A^2+B^2},\qquad \beta=\tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$$

其中 $A=\frac{\sigma}{\omega_d}$、$B=1$ 和 $\sigma=\omega_d t$,则更简洁的形式为

$$y(t)=1-e^{-\sigma t}\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega_d^2}}\cos(\omega_d t-\beta)$$

当 $y(t)$ 到达最大值时其导数为零：

$$\dot{y}(t)=\sigma e^{-\sigma t}\left(\cos\omega_d t+\frac{\sigma}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)-e^{-\sigma t}(-\omega_d\sin\omega_d t+\sigma\cos\omega_d t)=0=e^{-\sigma t}\left(\frac{\sigma^2}{\omega_d}\sin\omega_d t+\omega_d\sin\omega_d t\right)=0$$

上式只当 $\sin\omega_d t=0$ 时成立，则有

$$\omega_d t_p=\pi$$

且有

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d} \tag{3-50}$$

将式(3-50)代入 $y(t)$ 表达式，可计算得

$$y(t_p)\triangleq 1+M_p=1-e^{-\sigma\pi/\omega_d}\left(\cos\pi+\frac{\sigma}{\omega_d}\sin\pi\right)=1+e^{-\sigma\pi/\omega_d}$$

这样我们就能得到

$$M_p=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}},\qquad 0\leqslant\zeta<1 \tag{3-51}$$

该式见图3-21，图中用到的两组值为 $\zeta=0.5$ 时 $M_p=0.16$ 和 $\zeta=0.7$ 时 $M_p=0.05$。

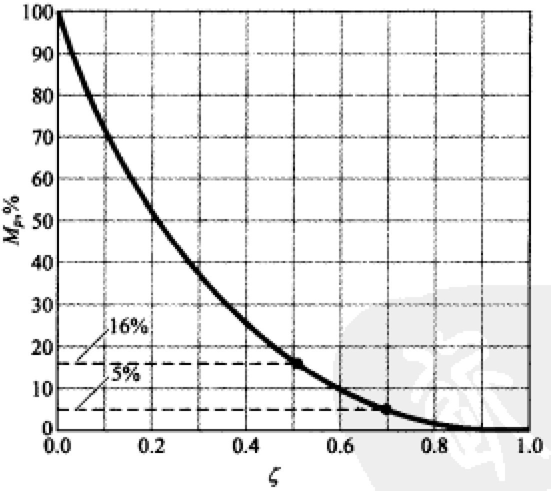


图3-21　二阶系统超调量 M_p 与阻尼比 ζ 间的关系

3.4.3　调节时间

我们对瞬态响应关注的参数是调节时间 t_s，它是系统响应衰减到较小值使 $y(t)$ 几乎处于稳态所需的时间，各种微量测度(measure of smallness)都是可以的，为说明这点，在这里我们用1%作为较为合理的测度，当然在其他情况下如2%或5%也是常用到的。通过计算分析可知，y 相对1的偏离量是衰减指数项 $e^{-\sigma t}$ 与周期正弦函数共同作用的结果，误差存在的时间与瞬态响应紧密相关，因此，我们可以将衰减指数项衰减到1%的时间定义为调节时间 t_s。

$$e^{-\zeta\omega_n t_s}=0.01$$

因此，

$$\zeta\omega_n t_s = 4.6$$

或

$$t_s = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} = \frac{4.6}{\sigma} \tag{3-52}$$

其中 σ 为极点负实部，如图 3-15 所示。

具有两个复数极点而无有限零点的系统可用式(3-49)、式(3-51)和式(3-52)来描述系统的瞬态响应，包括无阻尼自然频率 ω_n、阻尼比 ζ 和负实部 σ 。在分析和设计中，这三个式子通常可以分别用来估计系统的上升时间、超调量和调节时间；在设计综合过程中也希望能指定 t_r、M_p 和 t_s 来确定极点的位置，以便实际的响应能小于或等于这些指标，对于指定的值 t_r、M_p 和 t_s，上述三式综合为

$$\omega_n \geqslant \frac{1.8}{t_r} \tag{3-53}$$

$$\zeta \geqslant \zeta(M_p)\text{（由图 3-21）} \tag{3-54}$$

$$\sigma \geqslant \frac{4.6}{t_s} \tag{3-55}$$

这些式子标示在 s 平面中的图见图 3-22a～c，在后面的章节中，可以用它们来指导我们零极点位置的选择，以满足控制系统的动态响应指标。

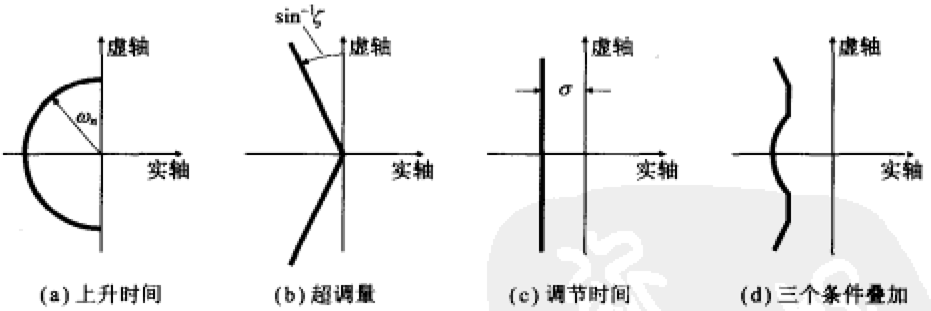


图 3-22　由不同瞬态要求绘制的 s 平面区域图

要记住式(3-53)～式(3-55)只是定性的指导原则，而不是精确的设计公式，这点非常重要。它们只是设计中，不断尝试设计过程的开始；在完成控制系统设计后，系统的时间响应要通过精确的计算，通常用数值计算来检验时间指标是否确实得到满足，当时间指标未满足时，就需要重新进行设计。

对于一阶系统，

$$H(s) = \frac{\sigma}{s+\sigma}$$

其阶跃响应的拉普拉斯变换为：

$$Y(s) = \frac{\sigma}{s(s+\sigma)}$$

由表 A-2 第 11 条可知 $Y(s)$ 对应的时间函数为：

$$y(t) = (1 - e^{-\sigma t})1(t) \tag{3-56}$$

与式(3-52)比较可知一阶系统的 t_s 值都是

$$t_s = \frac{4.6}{\sigma}$$

没有超调量，所以 $M_p=0$，由图 3-11 可知 $y=0.1$ 到 $y=0.9$ 的上升时间为：

$$t_r = \frac{\ln 0.9 - \ln 0.1}{\sigma} = \frac{2.2}{\sigma}$$

更普遍的做法是用时间常数来描述一阶系统，如图 3-11 中系统的时间常数为 $\tau=1/\sigma$。

例 3.24 时域指标变换到 s 平面

求系统传递函数的极点在 s 平面中的允许区域，使系统响应的满足 $t_r \leqslant 0.6\text{s}$，$M_p \leqslant 10\%$ 和 $t_s \leqslant 3\text{s}$。

解：由于不清楚系统是否为无零点的二阶系统，因此也就不可能精确地求得其允许区域。若不考虑系统的具体情况，那么我们就可以用二阶系统的关系式来得到近似估计值，由式(3-53)得到

$$\omega_n \geqslant \frac{1.8}{t_r} = 3.0$$

由式(3-54)和图 3-21 得

$$\zeta \geqslant 0.6$$

再由式 3-55，得：

$$\sigma \geqslant \frac{4.6}{3} = 1.5$$

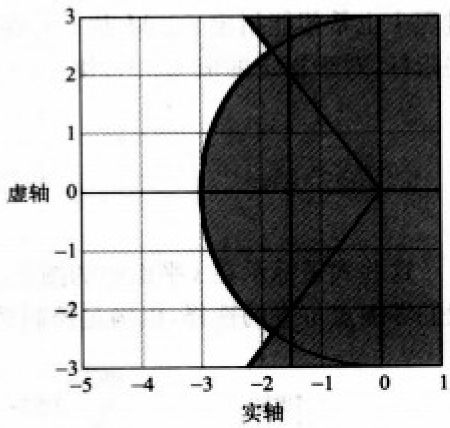


图 3-23 例 3.24 中 s 平面上的允许区域

图 3-23 中实线的左侧区域是允许的区域，注意任何满足 ζ 和 ω_n 约束条件的极点也会满足 σ 的约束条件。

3.5 零点和附加极点的影响

图 3-22 所示的关系对于简单的二阶系统来说是正确的，但对复杂系统来说它们只能作为设计的指导方针。如果某一设计好的系统上升时间不合适(太慢)，可以提高其自然频率；如果其瞬态响应超调量过大，则可以增加其阻尼；而如果其瞬态维持时间过长，那么要将其极点在 s 平面中向左移。

到目前为止，我们仅仅讨论了 $H(s)$ 的极点，接下来将讨论 $H(s)$ 的零点。[①] 就瞬态分析层面来看，零点通过改变指数项的系数来施加其影响，当然这些指数的形式则取决于极点，如例 3.22 中所看到的。为了做进一步说明，考虑以下两个传递函数，它们具有相同的极点和不同的零点。

① 这里我们假定 $b(s)$ 和 $a(s)$ 没有公因子，若存在公因子，那么 $b(s)$ 和 $a(s)$ 在相同位置上都趋于零，而 $H(s)$ 在该处不为零，当我们在第 7 章进行状态空间描述时会对这种情况进行讨论。

$$H_1(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2} \tag{3-57}$$

$$H_2(s)=\frac{2(s+1.1)}{1.1(s+1)(s+2)}=\frac{2}{1.1}\left(\frac{0.1}{s+1}+\frac{0.9}{s+2}\right)=\frac{0.18}{s+1}+\frac{1.64}{s+2} \tag{3-58}$$

将上式归一化后可得相同的DC增益(即$s=0$时的增益)，注意$(s+1)$项的系数，在$H_1(s)$中为2，而在$H_2(s)$中为0.18，$H_2(s)$中零点$s=-1.1$几乎抵消极点$s=-1$，因此可对系统做比较大的简化，若零点恰好位于$s=-1$处，那么$(s+1)$项将完全消失。总之靠近极点的零点可抵消极点对应项在总的响应中的分量，由部分分式展开式(3-34)中的系数关系可得

$$C_1=(s-p_1)F(s)\mid_{s=p_1}$$

若$F(s)$的零点位于极点$s=p_1$附近，那么$F(s)$的值将由于s值在零点附近而非常小，因此在响应中可反映为该项分量大小的系数C_1也将会很小。

在设计控制系统过程中，为了将零点对瞬态响应的影响考虑进去，我们考虑具有两个复数极点和一个零点的传递函数，为能符合更多的情况，这里将传递函数写成归一化的时间和零点分布形式：

$$H(s)=\frac{(s/\alpha\zeta\omega_n)+1}{(s/\omega_n)^2+2\zeta(s/\omega_n)+1} \tag{3-59}$$

零点位于$s=-\alpha\zeta\omega_n=-\alpha\sigma$处，若$\alpha$很大，那么零点离极点较远，其对系统响应的影响也较小；若$\alpha\cong1$，那么零点值与极点实部很接近，因此对系统响应具有相当大的影响。图3-24为$\zeta=0.5$和不同α值的阶跃响应曲线，由图可看出零点的主要影响在于增加了超调量M_p，而对调节时间几乎没什么影响。M_p和α的关系见图3-25。该图表明：当$\alpha>3$时零点对M_p的影响很小，但当α小于3并递减时，零点的影响也将增加，特别是当$\alpha=1$或者更小时。

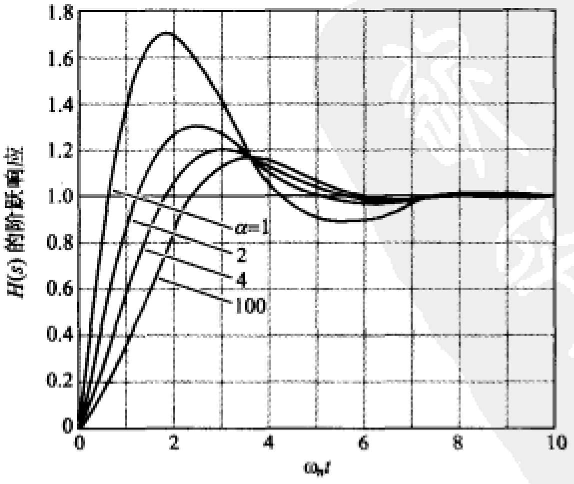


图3-24 含一个零点的二阶系统的阶跃响应图($\zeta=0.5$)

我们可以用拉普拉斯变换来解释图3-24，首先用s代替s/ω_n，得：

$$H(s)=\frac{s/\alpha\zeta+1}{s^2+2\zeta s+1}$$

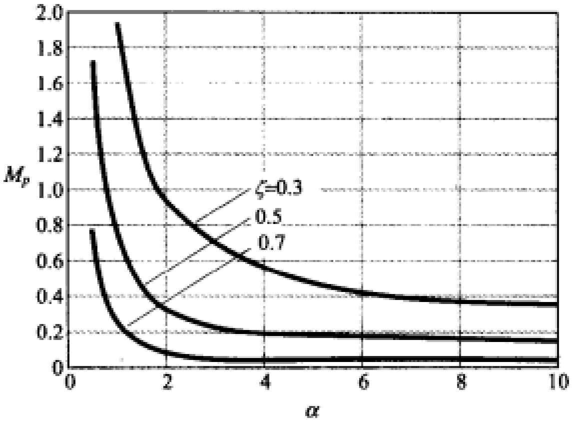


图 3-25　超调量 M_p 作为归一化零点 α 的函数的图像。$\alpha=1$ 时零点的实部等于极点的实部

由于传递函数中存在归一化频率的影响，而阶跃响应中也存在归一化时间的影响，我们令 $r=\omega_n t$，然后将传递函数写成两项之和的形式：

$$H(s)=\frac{1}{s^2+2\zeta s+1}+\frac{1}{\alpha\zeta}\frac{s}{s^2+2\zeta s+1} \tag{3-60}$$

第一项称为 $H_0(s)$，它是初始项(无有限零点)，第二项 $H_d(s)$ 由零点引入，是原始项的($1/\alpha\zeta$)倍再 s 倍，已知 df/dt 的拉普拉斯变换为 $sF(s)$，故 $H_d(s)$ 对应于初始项导数的常数倍，$H_0(s)$ 和 $H_d(s)$ 的阶跃响应如图 3-26 所示。通过观察曲线，我们就会明白为什么零点能增加系统的超调，初始项 $H_0(s)$ 的导数在曲线开始部分有一较大突起，将其加到 $H_0(s)$ 响应，这将抬高 $H(s)$的响应，从而产生超调。这个分析对于 $\alpha<0$ 且零点位于 $s>0$ 的 RHP 的情况也是有效的(通常称之为 **RHP 零点(RHP zero)**，有时也指**非最小相位零点(nonminimum-phase zero)**，关于这方面内容将在 6.1.1 节中作更具体的讨论)。在这种情况下，上述导数项被减去，而不是加到 $H_0(s)$ 响应中，图 3-27 所示为一典型例子。

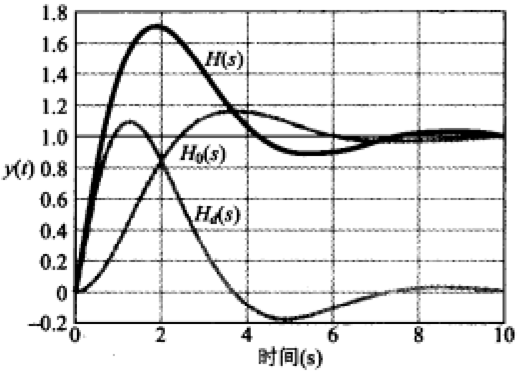


图 3-26　二阶系统传递函数 $H(s)$、$H_0(s)$ 和 $H_d(s)$的阶跃响应 $y(t)$

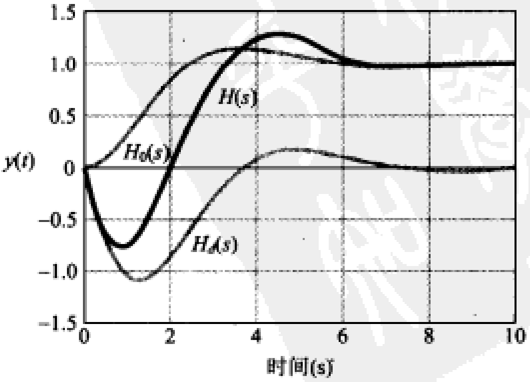


图 3-27　有一个零点在 RHP 中的二阶系统的阶跃响应(非最小相位系统)

例 3.25 用 MATLAB 求飞机响应

在 10.3.2 节所描述的波音 747 飞机中，其升降舵与高度之间的传递函数近似为

$$\frac{h(s)}{\delta_e(s)}=\frac{30(s-6)}{s(s^2+4s+13)}$$

(a) 用 MATLAB 绘制出飞机高度对升降舵 1°的脉冲输入的时间响应图，并说明该非最小相位响应特征的物理原因。

(b) 检验估计 t_r、t_s和 M_p的准确程度[式(3-49)和式(3-52)以及图 3-21]。

解：

(a) 求得脉冲响应的 MATLAB 命令为：

```
u = -1;                      % u = delta e
numG = u*30*[1 -6];          % form numerator
denG = [1 4 13 0];           % form denominator
sysG=tf(numG,denG)           % define system by its numerator and denominator
y=impulse(sysG);             % compute impulse response; y = h
plot(y);                     % plot impulse response
```

所得结果如图 3-28 所示，注意高度在刚开始时是下降的，而后才上升到一个新的稳定值，利用终值定理来计算其终值：

$$h(\infty)=s\left.\frac{30(s-6)(-1)}{s(s^2+4s+13)}\right|_{s=0}=\frac{30(-6)(-1)}{13}=+13.8$$

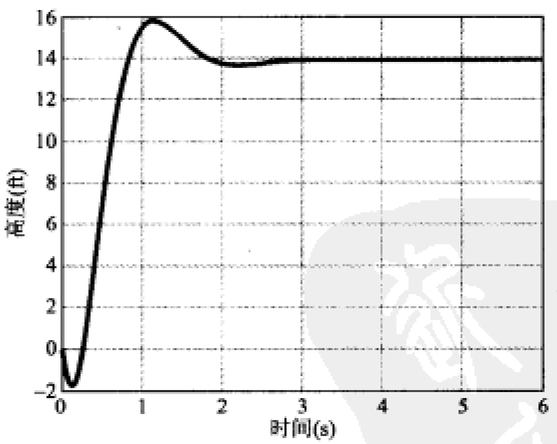


图 3-28 升降舵脉冲输入时的飞机高度响应

该响应对脉冲输入具有有限的终值，主要是由于传递函数分母中存在 s 项。这表示响应中存在纯积分，而脉冲函数的积分为有限值，若输入为阶跃响应，那么其高度随时间而不断增加，换句话说就是阶跃响应的积分为斜坡函数。

刚开始的高度下降由传递函数中的 RHP 零点预示，习惯上将升降舵负偏转解释为向上的意思(见图 10-30)。升降舵向上偏转可以驱动飞机尾下偏，从而使飞机头部向上抬起。飞机开始爬升。在飞机开始转动之前的初始瞬间，升降舵的偏转会引起一股向下的力，而在飞机完成转动之后，由机翼增加的迎角所产生的提升力才使飞机开始爬升。

(b) 由式(3-49)得上升时间为

$$t_r=\frac{1.8}{\omega_n}=\frac{1.8}{\sqrt{13}}=0.5$$

阻尼比ζ由下面的关系式得到

$$2\zeta\omega_n = 4 \Rightarrow \zeta = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0.55$$

由图 3-21 可求得超调量 M_p 为 0.14。由 $2\zeta\omega_n = 2\sigma = 4$[见式(3-52)]得

$$t_s = \frac{4.6}{\sigma} = \frac{4.6}{2} = 2.3$$

对 MATLAB 得到的时间响应 $h(t)$ 进行细致观察之后，得 $t_r \cong 0.43$ s，$M_p \cong 0.14$ 和 $t_s \cong 2.6$ s，这与前面的估计值相当接近。非最小相位零点的标志性影响就是它能导致刚开始的系统响应向“错误方向”发展，从而使整个响应有些迟缓。

除了研究零点作用外，考虑额外的极点对于标准二阶系统阶跃响应的影响也是很有用的，这里我们假设传递函数为

$$H(s) = \frac{1}{(s/\alpha\zeta\omega_n + 1)[(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1]} \tag{3-61}$$

图 3-29 所示为 $\zeta=0.5$ 时 α 取各种值的阶跃响应图。在这种情况下，额外极点的主要影响是增加系统响应的上升时间，ζ取不同值时上升时间与α 的关系见图 3-30。

通过以上讨论，我们可以得出几个有关简单系统动态响应的结论，这些结论将以系统零极点的形式予以说明。

动态响应中零极点模式的影响

(1) 对不存在有限零点的二阶系统，其瞬态响应参数近似为：

上升时间：$t_r \cong \frac{1.8}{\omega_n}$

超调量：$M_p \cong \begin{cases} 5\%, & \zeta=0.7 \\ 16\%, & \zeta=0.5 \\ 35\%, & \zeta=0.3 \end{cases}$ （见图 3-21）

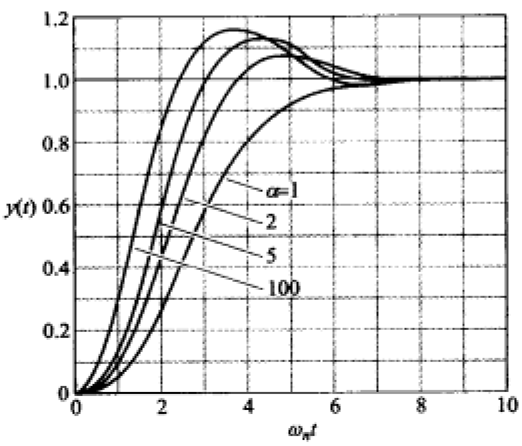


图 3-29 $\zeta=0.5$ 时三阶系统的阶跃响应

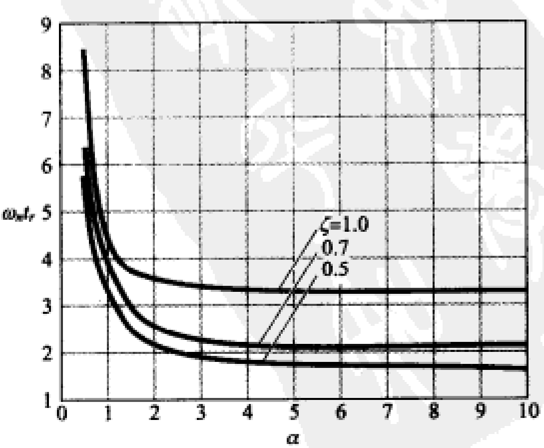


图 3-30 与附加极点分布相关的归一化上升时间

调节时间：$t_s \cong \dfrac{4.6}{\sigma}$

(2) 若左半平面(LHP)零点位于复极点实部的 4 倍范围以内时，它将增加系统超调量，参见图 3-25。

(3) 右半平面(RHP)零点对超调有削减作用(且有可能使阶跃响应在开始阶段朝错误方向运动)。

(4) 左半平面的附加极点能较大地增加上升时间，只要该额外极点位于复极点实部的 4 倍范围内，参见图 3-30。

3.6 幅值变换与时间变换

通常情况下，一个问题中所包含变量的数值总是具有不同的数量级，这总会增大计算的难度。尤其是在以前使用模拟计算机来解决问题的时候这就更是一个严重的问题，在那个时候我们只能通过*尺度变换*来使所有的变量的值在相近的数量级上。现在数字电子计算机大量用于解决微分方程，从而大大减少了对问题的变换要求，除非是含有大量变量的问题，计算机都可以有足够的能力来精确地处理不同的数量级的变量，但是，理解这种变换的原理还是很明智的，特别是针对一些很少见的数量级变化很大需要进行尺度变换，或者计算机的字长限制的时间的情况。

3.6.1 幅值变换

通常有两种可能进行的变换：幅值变换和时间变换。正如我们在 3.1.4 节中所看过的，**幅值变换(amplitude scaling)**总是在不经意中用到，如选择适当的单位来使问题更容易手工计算。例如飞球模型中，我们用单位毫米来描述位移，而用毫安来描述电流，从而将使变量保持在容易计算的数量级上。通常运动方程都是以 SI 制单位来衡量的，如米、千克和安培等。但是如果要描述火箭在轨道上的运动，那么使用千米来衡量将会更好一些。运动方程的求解通常由计算机上的软件来实现，这些工具可以在很多单位制下进行运算。为了更好地变换复杂系统，我们首先要估计系统所有变量中的最大值，然后将各变量都进行变换，以使所有的值都限制在$-1\sim1$之间。

总之，我们可以对系统每个要素定义一个变换变量来进行幅值变换：如令

$$x' = S_x x \tag{3-62}$$

那么

$$\dot{x}' = S_x \dot{x} \text{ 和 } \ddot{x}' = S_x \ddot{x} \tag{3-63}$$

这里我们用 S_x 来做合适的尺度变换，将式(3-62)和式(3-63)代回系统的运动方程，然后再重新计算系统的系数。

例 3.26 飞球模型缩放

飞球模型的线性方程为(可参见第 9 章的例 9.2)：

$$\delta \dot{x} = 1667 \delta x + 47.6 \delta i \tag{3-64}$$

其中 δx 的单位为米，而 δi 的单位为安培。变换飞球模型的变量，使变量的单位分别用毫米和毫安来代替米和安培。

解：由式(3-62)，我们定义

$$\delta x' = S_x \delta x \text{ 和 } \delta i' = S_i \delta i$$

这样 S_x 和 S_i 就取值为 1000，以将单位为米和安培 δx 和 δi 变换为单位为毫米和毫安的 $\delta x'$ 和 $\delta i'$，注意式(3-63)中关系，将上述结果代入式(3-64) 中得

$$\delta \dot{x}' = 1667 \delta x' + 47.6 \frac{S_x}{S_i} \delta i'$$

在这个例子中 $S_x = S_i$，因此式(3-64)仍然没有改变，当然如果我们对这两个量进行不同的变换，那么最后得到方程的系数也就会有所不同了。

3.6.2 时间变换

我们使用的 SI 制或英制中时间的单位都是秒。一般地无论手工计算下多么繁杂、多么慢的问题通常在计算机的软件上都可以得到很精确的结果。但是如果系统的响应是在微秒级，或者系统的固有频率在数兆赫，那么所得的问题中含有病态条件，数值方法的计算将会产生错误，特别对高阶系统的影响将会更大，当然对响应十分缓慢的系统也会出现问题。因此，我们就很有必要了解如何变换时间单位来应对病态条件问题。

我们将变换得到的时间定义为

$$\tau = \omega_0 t \tag{3-65}$$

这样，如果 t 以秒为单位而 $\omega_0 = 1000$，那么 τ 的单位就为毫秒了，进行**时间变换**(**time scaling**)可以改变微分，这样就有

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d(\tau/\omega_0)} = \omega_0 \frac{dx}{d\tau} \tag{3-66}$$

以及

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} \tag{3-67}$$

例 3.27 振荡响应的时间变换

振荡的方程描述可以由例 2.5 推导出，对系统固有频率很快的情况，若 $\omega_n = 15\,000$ rad/s (接近 2 kHz)，式(2-23)可以重新写为

$$\ddot{\theta} + 15\,000^2 \cdot \theta = 10^6 \cdot T_c$$

确定时间变换方程，使方程中时间的单位为毫秒。

解：式(3-65)中 ω_0 的值为 1000，则式(3-67)可以写为：

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = 10^{-6} \cdot \ddot{\theta}$$

则时间变换后方程为

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 15^2 \cdot \theta = T_c$$

在实际操作中，我们可以解这个方程

$$\ddot{\theta}+15^2\cdot\theta=T_c \tag{3-68}$$

当然我们也要在图示中以毫秒代替秒作为单位。

3.7 稳定性

非线性时变系统稳定性的研究比较复杂，是个较难的课题，本节我们只考虑线性时不变系统。对线性时不变系统有下列稳定性条件：

对于线性时不变系统，若其传递函数分母多项式的所有根都具有负实部(即它们都位于 s 平面左半部分)，那么该系统为稳定的，否则系统是不稳定的。

如果系统初始条件衰减到零，那系统是稳定的；反之如果初始条件发散，那么系统是不稳定的。如前面所述，如果系统的所有极点严格地位于 s 平面左半平面(也就是说系统所有极点必须都具有负实部($\sigma<0$))，那么该线性时不变(定常)系统是**稳定的(stable)**。若系统存在一些极点位于 s 平面的右半部分(即有正实部($\sigma>0$))，那么系统是**不稳定的(unstable)**，如图 3-13 所示。对单极点在 jω 轴($\sigma=0$)上的系统，初始条件将会始终存在；对于其他 $\sigma=0$ 的极点，输出将恒定为振荡运动，因此如果系统的瞬态响应衰减，那么系统为稳定的，反之为不稳定的，图 3-13 所示的系统时间响应就是由其极点配置引起的。

在后面的章节中我们将更深入地介绍稳定性的概念，如奈奎斯特频率响应稳定性判据(第 6 章)和李雅普诺夫稳定性(第 9 章)。

3.7.1 线性时不变系统的稳定性

考虑下面的线性时不变系统，由其传递函数的分母多项式可得系统特征方程为：

$$s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n=0 \tag{3-69}$$

假设该特征方程的根$\{p_i\}$ 为实数或复数且各不相同。注意式(3-69)可作为下面系统的传递函数零极点抵消之前的分母：

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)},\quad m\leqslant n \tag{3-70}$$

以式(3-69)为特征方程的微分方程的解，用部分分式展开为

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}K_i e^{p_i t} \tag{3-71}$$

其中 $\{p_i\}$ 为式(3-69)的根，$\{K_i\}$ 则取决于初始条件和零点分布。若传递函数在 RHP 上存在零极点抵消，那么在系统输出响应中相应的 K_i将为零，而其内部变量中将出现不稳定的瞬态响应。

当且仅当(充分必要条件)式(3-71)中的各项随 $t\to\infty$ 趋于零时，系统才是稳定的：

对所有 p_i，$e^{p_i t}\to 0$

当系统所有极点都严格地位于 LHP 时上式就会成立，即：

$$\mathrm{Re}\{p_i\}<0 \tag{3-72}$$

若存在重极点，那么式(3-71)将包含多项式，其中 K_i 用 t 代替，而整个结论未变，这就是**内部稳定性**(**internal stability**)，由此可见系统的稳定性由特征方程根的位置来确定。若系统在 RHP 存在极点，那么该系统是**不稳定**(**unstable**)，因此 jω 轴为渐近稳定和不稳定响应的稳定性界限。若系统有不重复极点位于 jω 轴，那么系统**中性稳定**(**neutrally stable**)，例如，原点处的极点(积分器)将导致非衰减瞬态响应，而 jω 轴上的复极点将导致振荡响应(等幅)。若系统在 jω 轴存在重极点，那么该系统是**不稳定的**(**unstable**)(因为它导致式(3-71)中存在 $te^{\pm j\omega_i t}$ 项)。而原点处的一对极点(双积分器)将导致无穷响应。MATLAB 可用于计算极点，从而使确定系统稳定性变得相对容易。

确定特征方程根位置的另一种方法是劳斯判据，下面将对其进行讨论。

3.7.2　劳斯稳定判据

我们有很多方法可以不直接求解多项式就能得到有关多项式根的位置信息，这些方法都是在 19 世纪发展起来的，在 MATLAB 出现之前有着非常广泛的应用，而现在的稳定性问题中，用它们来确定多项式系数还是很用的，特别是多项式系统为符号(非数值)形式的情况。设 n 阶系统的特征方程[①]为：

$$a(s)=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n \tag{3-73}$$

我们可以在不确切求出多项式根的情况下就得出系统稳定性的结论，这个问题非常经典，我们就有好几种方法可以解决它。

系统稳定性的必要条件是式(3-73)中的所有根都具有负实部，这反过来要求所有的 $\{a_i\}$ 为正。

系统稳定的必要(非充分)条件是特征多项式的所有系数都为正。

如果方程中有的项的系数不存在(为零)或为负，那么该系统在 LHP 外存在极点。一旦基本的必要条件得到满足，我们便可以做些测试以验证判别式正确与否，劳斯(Routh)和胡尔维茨(Hurwitz)分别于 1874 年和 1895 年独立完成了类似的试验，我们将讨论前者，劳斯公式要求对一个三角阵进行计算，该三角阵为 $\{a_i\}$ 的函数，劳斯指出稳定性的充分必要条件为该三角阵的第一列元素全为正。[②]

当且仅当劳斯阵列第一列所有元素都为正时，系统才是稳定的。

要确定劳斯阵列，首先将特征多项式的系数分为两行，分别以多项式第一、二个系数作为开头，之后分别为偶数项和奇数项的系数：

$$\begin{array}{lllll} s^n: & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\ s^{n-1}: & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \end{array}$$

然后再增加下面的几行以完成**劳斯阵列**(**Routh array**)：

---

① 不失一般性，我们可以假定这个多项式为首一多项式(也就是多项式的最高项系数为 1)。

② 若将多项式构造为一系列的一阶和二阶的因式之积，那么就很容易理解了。

行 n	s^n	:	1	a_2	a_4	$\cdots$
行 $n-1$	s^{n-1}	:	a_1	a_3	a_5	$\cdots$
行 $n-2$	s^{n-2}	:	b_1	b_2	b_3	$\cdots$
行 $n-3$	s^{n-3}	:	c_1	c_2	c_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
行 2	s^2	:	*	*		
行 1	s	:	*			
行 0	s^0	:	*			

第$(n-2)$行和第$(n-3)$行的元素分别为：

$$b_1 = -\frac{\det\begin{bmatrix}1 & a_2\\ a_1 & a_3\end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_2 - a_3}{a_1}$$

$$b_2 = -\frac{\det\begin{bmatrix}1 & a_4\\ a_1 & a_5\end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_4 - a_5}{a_1}$$

$$b_3 = -\frac{\det\begin{bmatrix}1 & a_6\\ a_1 & a_7\end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_6 - a_7}{a_1}$$

$$c_1 = -\frac{\det\begin{bmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

$$c_2 = -\frac{\det\begin{bmatrix}a_1 & a_5\\ b_1 & b_3\end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$$

$$c_3 = -\frac{\det\begin{bmatrix}a_1 & a_7\\ b_1 & b_4\end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}$$

注意第$(n-2)$行和下面几行的元素都可由行列式前面的两行中第一列以及同一列元素组成的行列式来求得，正常情况下当该阵列完成时，其第一列中有 $n+1$ 个元素：若第一列元素全为正，那么特征多项式的所有根在 LHP；若第一列元素不全为正，那么 RHP 中根的个数与第一列元素符号变化的数相等。+、-、+方式可计为两次符号变化，一次由+到-，另一次由-到+，劳斯判据的简单证明，读者可以参考 Ho 等人(1998)的著作。

例 3.28　劳斯判据

多项式

$$a(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$$

满足稳定性的必要条件，所有系数$\{ai\}$均为正且不存在零项。确定该多项式是否有根在 RHP。

解：该多项式的劳斯阵列为：

s^6:	1	3	1	4
s^5:	4	2	4	0

$$s^4:\quad \frac{5}{2}=\frac{4\times3-1\times2}{4}\qquad 0=\frac{4\times1-4\times1}{4}\qquad 4=\frac{4\times4-1\times0}{4}$$

$$s^3:\quad 2=\frac{\frac{5}{2}\times2-4\times0}{\frac{5}{2}}\qquad -\frac{12}{5}=\frac{\frac{5}{2}\times4-4\times4}{\frac{5}{2}}\qquad 0$$

$$s^2:\quad 3=\frac{2\times0-\frac{5}{2}(-\frac{12}{5})}{2}\qquad 4=\frac{2\times4-(\frac{5}{2}\times0)}{2}$$

$$s:\quad -\frac{76}{15}=\frac{3(-\frac{12}{5})-8}{3}\qquad 0$$

$$s^0:\quad 4=\frac{-\frac{76}{15}\times4-0}{-\frac{76}{15}}$$

由于第一列的元素不全为零，因此多项式在 RHP 中存在根，而且由于第一列中有两次符号变化，①故 RHP 中两个极点。

注意：在计算劳斯阵列中，通过将某一行乘以或除以一正数可使计算简化。还要注意的是，最后两行中的每行都有一个非零元素。

用劳斯判据来确定参数的变化范围以使反馈系统保持稳定也是很有用的。

例 3.29 参数的稳定变化范围

考虑如图 3-31 所示的系统，该系统的稳定性与比例反馈增益 K 有关，确定 K 的范围以使系统稳定。

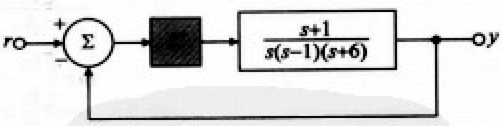


图 3-31 检验稳定性的反馈系统

解：系统的特征方程为：

$$1+K\frac{s+1}{s(s-1)(s+6)}=0$$

或

$$s^3+5s^2+(K-6)s+K=0$$

相应的劳斯阵列为：

s^3:	1	$K-6$
s^2:	5	K
s:	$(4K-30)/5$	
s^0:	K	

若要使系统稳定，则必有：

$$\frac{4K-30}{5}>0\quad 且\quad K>0$$

也即 $K>7.5$ 且 $K>0$

① 用MATLAB的 roots 命令可求得系统的实际根为 −3.2644、0.7797 ± 0.7488j、−0.6046 ± 0.9935j和−0.8858，这与我们得出的结论相一致。

因此劳斯判据为稳定性问题提供了一个解析解，尽管任何满足该式的增益 K 都可使系统稳定，但不同的 K 值对应的动态响应各不相同，给定具体的增益 K，我们就可以通过求特征多项式的根来计算闭环极点，特征多项式的系数可用行向量来描述（按 s 降幂排列）：

```
denT=[ 1 5 K-6 K]
```

我们可以用 MATLAB 命令来可计算特征多项式的根

```
roots(denT)
```

当 $K=7.5$ 时根为 -5 和 $\pm1.22j$，系统中性稳定。注意到劳斯判据预测 $K=7.5$ 时 $j\omega$ 轴上存在极点，如果我们令 $K=13$ 得闭环极点为 -4.06 和 $-0.47\pm1.7j$，而 $K=25$ 时闭环极点为 -1.90和 $-1.54\pm3.27j$。在这两种情况下，系统如劳斯判据预测的那样是稳定的。图 3-32 所示为对应于三个增益值时的瞬态响应，我们可以计算闭环传递函数来得到这些瞬态响应

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K(s+1)}{s^3+5s^2+(K-6)s+K}$$

则分子多项式可表示为

```
numT = [K K];        % form numerator
```

而 denT 前面的相同，MATLAB 命令

```
sysT=tf(numT,denT);        % define system by its numerator and denominator
step(sysT);                % compute step response
```

可以得到系统（单位）阶跃响应图。

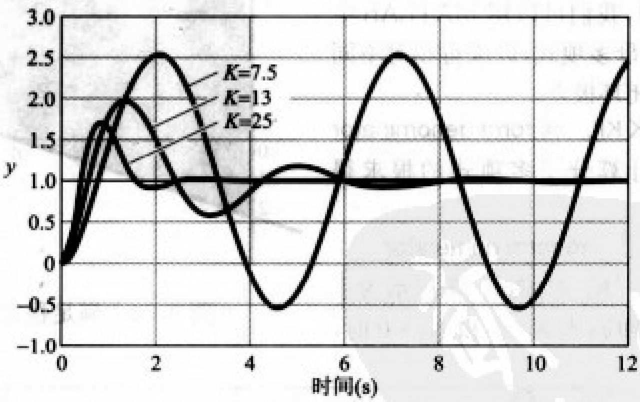


图 3-32 图 3-31 中系统的瞬态响应

例 3.30 两个参数的稳定变化范围

求控制器增益(K, K_I)变化范围，以使图 3-33 所示的 PI（比例一积分，见第 4 章）反馈系统稳定的。

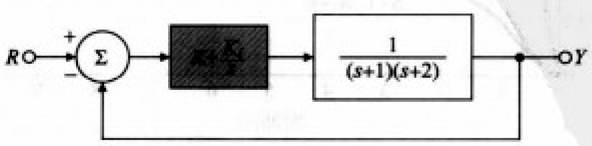


图 3-33 含比例一积分(PI)控制的系统

解：闭环系统的特征方程为

$$1+\left(K+\frac{K_I}{s}\right)\frac{1}{(s+1)(s+2)}=0$$

又可以写为

$$s^3+3s^2+(2+K)s+K_I=0$$

相应的劳斯阵列为：

$$\begin{array}{lll} s^3: & 1 & 2+K \\ s^2: & 3 & K_I \\ s: & (6+3K-K_I)/3 & \\ s^0: & K_I & \end{array}$$

由内部稳定性，得

$$K_I>0 \text{ 和 } K>\frac{1}{3}K_I-2$$

图 3-34 所示（K_I,K）平面中阴影部分为允许区域，该区域描述了该稳定性问题的解。

这个例子说明了劳斯判据真正的重要性以及它比数字计算方法优越的原因，而用数学研究方法来求增益的边界将难得多，该闭环系统的传递函数为：

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{Ks+K_I}{s^3+3s^2+(2+K)s+K_I}$$

与例 3.29 一样，我们可以用 MATLAB 中 roots 命令来计算分母多项式，以求得相对不同动态补偿增益值的闭环极点。

```
denT = [1 3 2+K KI].   % form denominator
```

同样地，通过计算分子多项式的根求得零点

```
numT = [K KI].        % form numerator
```

闭环零点位于 $-K_I/K$，图 3-35 所示为三组反馈增益的瞬态响应：当 $K=1$ 和 $K_I=0$ 时，

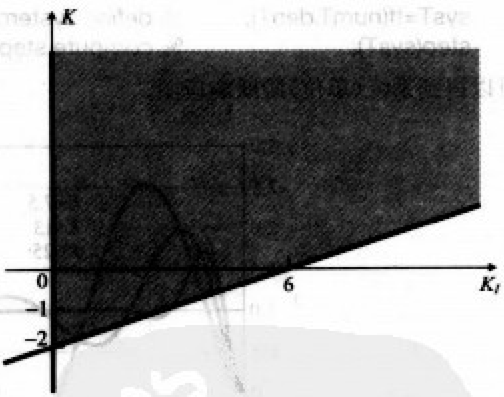


图 3-34　满足稳定性的区域

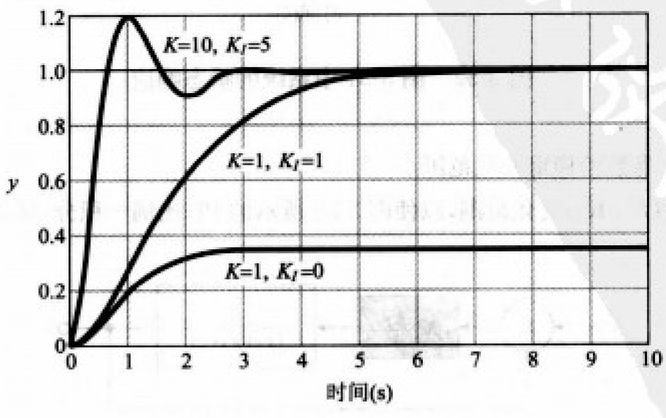


图 3-35　图 3-33 中系统的瞬态响应

闭环极点为 0 和 $-1.5\pm0.86j$，还有在原点处的一个零点；当 $K=K_I=1$ 时，零极点均位于 -1 处；而当 $K=10$ 和 $K_I=5$ 时，闭环极点位于 -0.46 和 $-1.26\pm3.3j$，其零点位于 -0.5 处，用 MATLAB 命令可得系统的阶跃响应

```
sysT=tf(numT,denT)      % define system by its numerator and denominator
step(sysT).             % compute step response
```

但当 $K_I=0$ 时，系统存在较大的稳态误差（见第 4 章）。

若劳斯阵列中某一行的第一个元素为零或者某一行全为零，那么标准劳斯阵列就无法建立，这时我们就要用到下面将讲述的特殊方法。

▲特殊情况

若只是某一行的第一个元素为零，那么我们可以用一个非常小的正常数 $\epsilon>0$ 来代替，和以前一样进行操作，然后通过极限 $\epsilon\to0$ 来应用稳定判据。

例 3.31　特殊情况 I 的劳斯判据

考虑多项式

$$a(s)=s^5+3s^4+2s^3+6s^2+6s+9$$

确定其是否有根在 RHP 中。

解：劳斯阵列为

	s^5:	1	2	6	
	s^4:	3	6	9	
	s^3:	0	3	0	
新的	s^3:	ϵ	3	0	←用 ϵ 代替 0
	s^2:	$\frac{2\epsilon-3}{\epsilon}$	3	0	
	s:	$3-\frac{3\epsilon^2}{2\epsilon-3}$	0	0	
	s^0:	3	0		

该阵列的第一列中有两次符号变化，这就是说有两个极点不在 LHP 中[①]。

另一种特殊情况是劳斯阵列的某一行全为零，这种情况说明存在关于虚轴镜像对称的共轭复根。若第 i 行为零，那么可由其前面一（非零）行建立下面的辅助方程：

$$a_1(s)=\beta_1 s^{i+1}+\beta_2 s^{i-1}+\beta_3 s^{i-3}+\cdots \tag{3-74}$$

其中 $\{\beta_i\}$ 为阵列中第 $(i+1)$ 行的系数，然后用辅助方程求导之后的系数来代替第 i 行，从而完成整个阵列。不过，辅助多项式式(3-74)的根也是特征方程的根，因此这些根必须分别进行检验。

① 用 MATLAB 求得实际的根为 -2.9043、$0.6567\pm1.2881j$ 和 $-0.7046\pm0.9929j$。

例 3.32　特殊情况 II 的劳斯判据

对于多项式

$$a(s) = s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12$$

试确定其是否有根在 $j\omega$ 轴上或 RHP 中。

解:劳斯阵列为

	s^5:	1	11	28	
	s^4:	5	23	12	
	s^3:	6.4	25.6	0	
	s^2:	3	12		
	s:	0	0		$\leftarrow a_1(s)=3s^2+12$
新的	s:	6	0		$\frac{da_1(s)}{ds}=6s$
	s^0:	12			

第一列中没有发生符号变化,因此除了在虚轴上有一对根之外,其他所有根都有负实部。我们可以对该问题进行简化:若将第一列中的零用 $\epsilon>0$ 代替,没有发生符号变化;若令 $\epsilon<0$ 则存在两次符号变化。因此若 $\epsilon=0$,则在虚轴上存在两个极点,它们是

$$a_1(s) = s^2 + 4 = 0 \text{ 的根,即 } s = \pm j2。$$

该结果与我们用 MATLAB 命令 roots 所计算得到的根 -3、$\pm 2j$,-1 和 -1 相一致。

▲3.8　由实验数据建立模型

我们有很多理由要用实验数据来获得所控制动态系统的模型。首先,即使是最好的由运动方程建立的理论模型也只是对实际情况的近似,虽然有时候,比如说非常坚固的空间飞船,其理论模型非常出色,但在其他时候,如伴随着许多化学变化的造纸或金属加工过程,其理论模型只是粗略地近似。而任何情况下,在最终的控制系统设计完成之前,我们都要谨慎地用实验数据来检验理论模型。其次,在理论模型特别复杂或物理过程理解不多的情况下,进行控制系统设计所能信赖的唯一可靠信息就只有实验数据。最后,当系统环境发生改变时,系统也跟着变化,例如飞机上高度和速度发生变化、造纸机送入的不同纤维混合物或者一非线性系统移到新的工作点,在这些情况下,我们就需通过改变控制参数来“重新调节”控制器,这就需要一个在新的条件下的模型,而实验数据往往能够为新模型的建立提供数据,该方法即使不是唯一的,也是很有效的。

有四种实验数据可用于建立模型。

(1) **瞬态响应(transient response)**,如由脉冲或阶跃输入产生。

(2) **频域响应数据(frequency-response data)**,可由不同频率的正弦输入激励产生。

(3) **随机稳态信息(stochastic steady-state information)**,可能来自于飞机飞越暴风雨天气或来自于其他一些随机自然源。

(4) **伪随机信号噪声信号(pseudorandom-noise data)**,可能由数字计算机产生。

每种实验数据都有其特性、优点和缺点。

瞬态响应数据能够快速地且相对较容易地获得，它们往往代表了系统接受到的自然信号，因此由这样的数据所获得的模型对于控制系统设计来说是可靠的。但另一方面，为了得到足够高的信噪比，系统瞬态响应必须显而易见，因此该方法不太适合进行正常操作(normal operation)，所采集的数据也只能来自特殊测试。第二个缺点是该数据形式不适合标准控制系统设计，但系统模型的一些部分，如极点和零点却又必须由这些形式的数据来计算得到。[①] 在特殊情况下计算可能比较简单，但在通常情况下却都是很复杂的。

频率响应数据(见第 6 章)很容易得到，但较之瞬态响应信息，它需要耗费相当多的时间，尤其在生产过程时间常数比较大时更为明显，如在化学处理工业中所常见到的。和瞬态响应数据一样，它也需要一个较好的信噪比，因此要获得频率响应数据所花费的代价也较大。另一方面，在第 6 章将会看到，频率响应数据的形式正好是频率响应设计方法所用的形式，因此，一旦我们获得了频率响应数据，也就可以立刻进行控制系统的设计了。

自然界随机环境中的正常操作记录可用作系统建模的基础，只要这些记录较连贯且获得的代价低，但不巧的是，这些数据质量很不一致，当控制最好、扰动最小且信号圆滑的时候，又趋于最差。有时一些甚至大部分系统动态过程难以得到，由于它们对系统输出作用较小，因此所构建的模型中看不到它们的身影，结果所得模型只代表了系统一部分，且有时还不适于控制。在某些情况下，例如要对熟睡或麻醉的人的脑电图(脑波)动态建模，以获得 α 波的频率和强度，正常记录是唯一的手段。但在通常地控制设计中，这只能是最后的选择。

最后，由数字逻辑构成的伪随机信号也很具有吸引力，建模中特别有意思的是伪随机二进制信号(PRBS)。伪随机二进制随机信号的值根据反馈偏移寄存器输出(1 或 0)为 $+A$ 或 $-A$，寄存器的反馈量为寄存器各种状态的二进制和，而这些寄存器状态已被选来尽可能地形成输出周期(即在有限时间内不断重复本身)。例如，20 位寄存器在一次重复之前，可产生 $2^{20}-1$ (超过 100 万)步，对此进行分析表明，所得结果就像一个宽带随机信号，且该信号完全由设计者控制，设计者可以设置信号大小 A 和长度(寄存器位数)。用 PRBS 测试所得数据必须用计算机来分析，现有的特殊用途硬件和一般通用计算机通用程序都能完成该分析。

▲3.9 梅森公式与信号流图

有一种可以用于表示方框图的符号叫**信号流图(signal-flow graph)**。

---

① Ziegler 和 Nichols(1943)在 Callender(1936)等人早期的工作成果上直接用阶跃响应来设计一些生产过程控制系统，详细情况见第 4 章。

S. J. Mason 1953～1956 年间引入的信号流图与方框图相似，它可以提供一个可视化的工具来表现系统各个模块之间的关系。这一方法用主流和在结点相交的支路构成的网络来描述系统的性质以组成信号流图。一些方框图以及相应的信号流图的例子如图 3-36 所示。这两种描述系统的方法是等价的，甚至你可以对其中的任何一种方法来应用梅森公式（我们很快会定义它）。

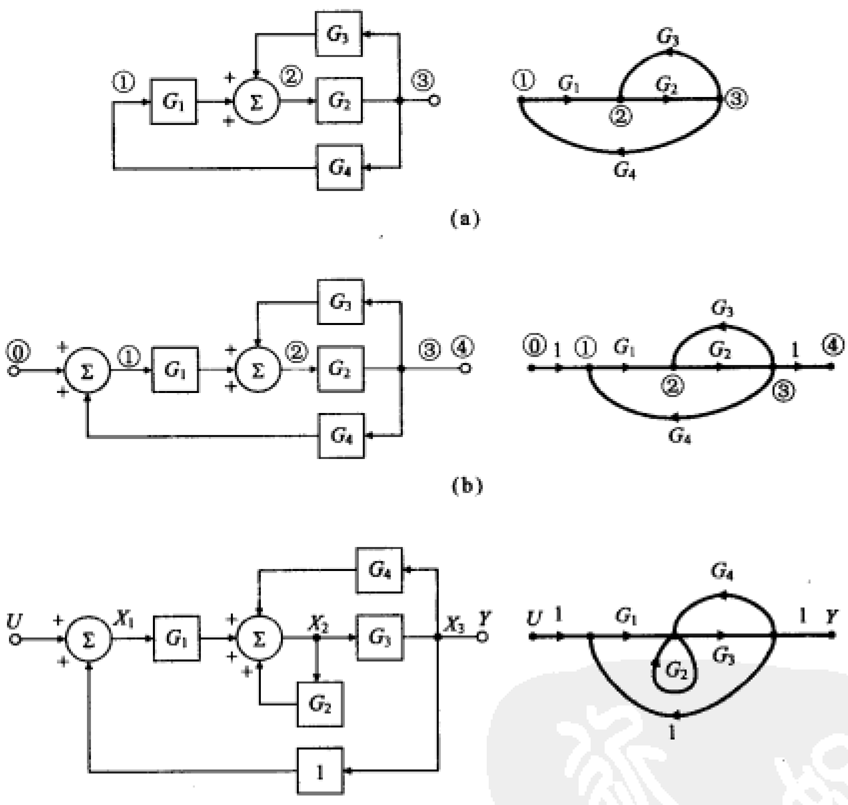


图 3-36　框图和相应的信号流图

在一个信号流图中包含了很多信号，其中图上输出至多个模块或者从求和模块输出的联结处称为**结点**（**node**），系统输入点和输出点都可以称为结点，只不过输入结点只有流出信号，而输出结点则只有流入信号。梅森将按次序连接的一系列模块称为**通路**（**path**），在这条从一个结点到另一个结点的路径上，沿着信号流动的方向，每个模块至多只能穿越一次。而**前向通路**（**forward path**）指从输入结点到输出结点的通路，当然其中的任何结点不能通过两次。在一般情况下，结点的数目总是很有限的，那么我们就可以在这有限的数目内确定前向通路。如果一条闭合的通路又回到输入结点，且在其中的任意结点上通过不超过一次，则称这条通路为**回路**（**loop**），从一个给定结点出发又可以回到这个结点的通路则称为**回路路径**（**loop path**）。总的**通路增益**（**path gain**）等于

组成回路的各个模块增益(传递函数)的乘积。类似地,**回路增益**(loop gain)则是一个回路的通路增益,也就等于各个回路中模块增益的乘积。如果图中两条通路有相同的模块,那么称这两条通路相接触(touch)。特别注意的是,在求和模块的输入与输出处却并非如此,可以认为输入与输出间的求和模块是单路的模块。

梅森公式将几何图形与代数上的联立方程表达[①]联系起来。观察图 3-36c,图中每个结点的信号都已经命名,各个模块的增益也如图 3-3b 中所示。图中的框图(或者信号流图)描述了下面用方程描述的系统

$$X_1(s)=X_3(s)+U(s)$$
$$X_2(s)=G_1(s)X_1(s)+G_2(s)X_2(s)+G_4(s)X_3(s)$$
$$Y(s)=1X_3(s)$$

梅森公式规定信号流图中输入到输出间传递函数可以由下式得到

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{\Delta}\sum_i G_i\Delta i$$

其中

G_i=第 i 条前向通路的增益;

Δ=系统的特征式

=1 − $\sum$(各条回路的增益)+ $\sum$(不相接触的两条回路增益之积)

− $\sum$(互不接触的三条回路增益之积)+ …;

Δ_i=第 i 条前向通路的特征余子式

=在 Δ 中除去与第 i 条前向通路相接触的回路后的特征式。

我们将用下面的例子来说明梅森公式的使用。

例 3.33 简单系统中的梅森公式

计算图 3-37 中框图的传递函数。

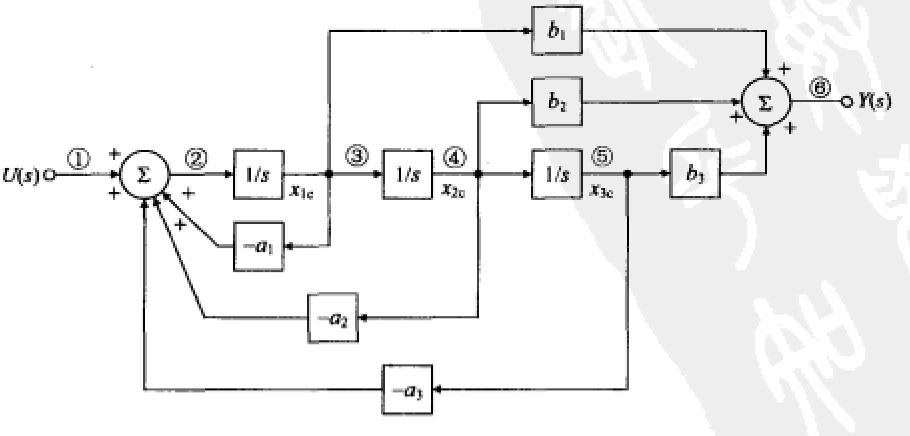


图 3-37 例 3.33 的方框

① 推导过程主要基于用行列式求解线性方程的克莱姆法则,这在 Mason 的论文中有所论述。

解:由图 3-37 中的方框可以得到

前向通路	通路增益
1236	$G_1=1\left(\frac{1}{s}\right)(b_1)(1)$
12346	$G_2=1\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)(b_2)(1)$
123456	$G_3=1\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)(b_3)(1)$
	闭环回路增益
232	$l_1=-a_1/s$
2342	$l_2=-a_2/s^2$
23452	$l_3=-a_3/s^3$

特征式为

$$\Delta=1-(-\frac{a_1}{s}-\frac{a_2}{s^2}-\frac{a_3}{s^3})+0$$

$$\Delta_1=1-0$$

$$\Delta_2=1-0$$

$$\Delta_3=1-0$$

应用梅森公式,就可以得到其传递函数为:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{(b_1/s)+(b_2/s^2)+(b_3/s^3)}{1+(a_1/s)+(a_2/s^2)+(a_3/s^3)}=\frac{b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

梅森公式对复杂系统更为有用,在这些系统中含有许多回路,而且一些回路不能在同一个结点上叠加。

例 3.34 梅森公式应用于复杂系统

求如图 3-38 所示系统的传递函数。

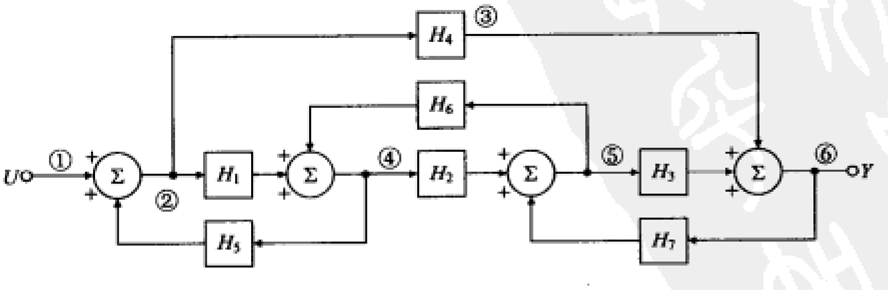


图 3-38 例 3.34 的框图

解:由系统框图,我们可以得到

前向通路	通路增益
12456	$G_1=H_1H_2H_3$
1236	$G_2=H_4$

	闭环回路增益
242	$l_1 = H_1H_5$（与 l_3 未相接触）
454	$l_2 = H_2H_6$
565	$l_3 = H_3H_7$（与 l_1 未相接触）
236542	$l_4 = H_4H_7H_6H_5$

得到系统特征式为

$$\Delta = 1 - (H_1H_5 + H_2H_6 + H_3H_7 + H_4H_7H_6H_5) + (H_1H_5H_3H_7)$$

$$\Delta_1 = 1 - 0$$

$$\Delta_2 = 1 - H_2H_6$$

因此

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_1H_2H_3 + H_4 - H_4H_2H_6}{1 - H_1H_5 - H_2H_6 - H_3H_7 - H_4H_7H_6H_5 + H_1H_5H_3H_7}$$

梅森公式在手工计算相对复杂的框图时十分有用，它可以准确给出图中系统输入-输出间传递函数的计算公式。与一步一步的框图简化法相比，这种方法更系统，而且对问题的依赖程度更小。在 MATLAB 和计算机的其他一些工具软件中，我们都可以用一些模块来描述一个系统，在这些软件中将会对这些图进行化简，因此梅森公式也就没以前那么重要了，但是很多方法还是起源于这一公式，因此在控制系统设计者的工具箱中还是有其一席之地。

小结

- 拉普拉斯变换是确定线性系统性能的主要方法。时间函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{3-75}$$

- 这一关系式可以引出拉普拉斯变换的重要性质：

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0^-) \tag{3-76}$$

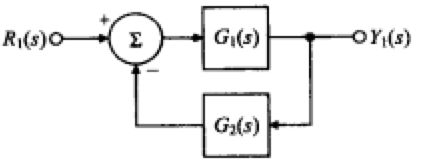
- 该性质使得我们能够求解线性常微分方程的传递函数，若给定系统传递函数 $G(s)$ 和输入 $u(t)$，其拉普拉斯变换为 $U(s)$，那么系统输出的拉普拉斯变换为

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

- 通常通过查表（如附录 A 中的表 A-2）或用计算机来求拉普拉斯反变换。拉普拉斯变换和反变换的性质都已在附录 A 中的表 A-1 中做了归纳。
- 终值定理在求稳定系统的稳态误差时非常重要：如果 $sY(s)$ 的所有极点位于 LHP，那么

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \tag{3-77}$$

- 框图是一种用来说明系统各部分间关系的简便方法，可应用图 3-7 和式(3-41)对框图进行化简。下面框图的传递函数为



等效于：

$$Y_1(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}R_1(s) \tag{3-78}$$

- s 平面中极点的分布决定了系统的响应特性，如图 3-13 所示。
- s 平面中极点的分布可用图 3-20 所示的参数来定义，这些参数又与以下时域量有关：上升时间 t_r，调整时间 t_s 和超调量 M_p，它们已经在图 3-20 中作出定义。对于二阶无零点系统来说，它们之间的对应关系为

$$t_r \cong \frac{1.8}{\omega_n} \tag{3-79}$$

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{3-80}$$

$$t_s = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} \tag{3-81}$$

- 当 s 左半平面中有零点时，超调量将增加，图 3-24 和图 3-25 对此做了总结。
- 当有附加的稳定极点时，系统响应将变慢，图 3-36 和图 3-37 对此做了总结。
- **幅值与时间变换(amplitude and time scaling)**（3.6 节）是将微分方程中变量的值限定在合理的范围内，以使所得结果易于计算，并减小计算误差的重要方法。
- 稳定系统所有的闭环系统极点都必须位于 LHP。
- 当且仅当劳斯阵列的第一列元素全为正时，系统才是稳定的。要确定劳斯阵列，可参考 3.7.2 节。
- 由实验数据来确定一个模型，或者通过实验来检验定理分析所得的模型，在系统设计中是十分重要的一步。

复习题

1. 传递函数的定义是什么？
2. 可用传递函数来描述其响应的系统具有什么特征？
3. 若 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$，则 $f(t-\lambda)1(t-\lambda)$ 的拉普拉斯变换的结果是什么？
4. 叙述终值定理(FVT)的内容。
5. 在控制系统设计中终值定理最常见的应用是什么？
6. 给定一个二阶传递函数，阻尼比为 ζ，自然响应频率为 ω_n，估计其阶跃响应的上升时间、超调量和调节时间。
7. 左半平面的附加零点对二阶系统阶跃响应的主要影响是什么？

8. 右半平面的零点对二阶系统阶跃响应最明显的影响是什么？
9. 附加实极点对二阶系统阶跃响应的主要影响是什么？
10. 为什么稳定性是控制系统设计中一个需要重视的问题？
11. 劳斯判据的主要用途是什么？
12. 在哪些情况下根据实验数据估算传递函数非常重要？

习题

3.1 节习题：拉普拉斯变换回顾

3-1 试说明在部分分式展开过程中，复共轭极点的系数也为复系数（由这一关系知每当有复共轭极点对存在时，只需计算其中一个系数即可）。

3-2 求下列时间函数的拉普拉斯变换：

(a) $f(t)=1+2t$

(b) $f(t)=3+7t+t^2+\delta(t)$

(c) $f(t)=e^{-t}+2e^{-2t}+te^{-3t}$

(d) $f(t)=(t+1)^2$

(e) $f(t)=\sinh t$

3-3 求下列时间函数的拉普拉斯变换

(a) $f(t)=3\cos 6t$

(b) $f(t)=\sin 2t+2\cos 2t+e^{-t}\sin 2t$

(c) $f(t)=t^2+e^{-2t}\sin 3t$

3-4 求下列时间函数的拉普拉斯变换：

(a) $f(t)=t\sin t$

(b) $f(t)=t\cos 3t$

(c) $f(t)=te^{-t}+2t\cos t$

(d) $f(t)=t\sin 3t-2t\cos t$

(e) $f(t)=1(t)+2t\cos 2t$

3-5 求下列时间函数的拉普拉斯变换（* 表示卷积）

(a) $f(t)=\sin t\sin 3t$

(b) $f(t)=\sin^2 t+3\cos^2 t$

(c) $f(t)=(\sin t)/t$

(d) $f(t)=\sin t * \sin t$

(e) $f(t)=\int_0^t \cos(t-\tau)\sin\tau d\tau$

3-6 已知 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$，求下列函数的拉普拉斯变换：

(a) $g(t)=f(t)\cos t$

(b) $g(t)=\int_0^t\int_0^{t_1} f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t_1$

3-7　运用部分分式展开，求下列时间函数的拉普拉斯变换：

(a) $F(s)=\dfrac{2}{s(s+2)}$

(b) $F(s)=\dfrac{10}{s(s+1)(s+10)}$

(c) $F(s)=\dfrac{3s+2}{s^2+4s+20}$

(d) $F(s)=\dfrac{3s^2+9s+12}{(s+2)(s^2+5s+11)}$

(e) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$

(f) $F(s)=\dfrac{2(s+2)}{(s+1)(s^2+4)}$

(g) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2}$

(h) $F(s)=\dfrac{1}{s^6}$

(i) $F(s)=\dfrac{4}{s^4+4}$

(j) $F(s)=\dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2}$

3-8　求下列各拉普拉斯变换式所对应的时间函数：

(a) $F(s)=\dfrac{1}{s\,(s+2)^2}$

(b) $F(s)=\dfrac{2s^2+s+1}{s^3-1}$

(c) $F(s)=\dfrac{2(s^2+s+1)}{s\,(s+1)^2}$

(d) $F(s)=\dfrac{s^3+2s+4}{s^4-16}$

(e) $F(s)=\dfrac{2(s+2)(s+5)^2}{(s+1)(s^2+4)^2}$

(f) $F(s)=\dfrac{(s^2-1)}{(s^2+1)^2}$

(g) $F(s)=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)$

3-9　用拉普拉斯变换求解下面的常微分方程：

(a) $\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+3y(t)=0$；$y(0)=1, \dot{y}(0)=2$

(b) $\ddot{y}(t)-2\dot{y}(t)+4y(t)=0$；$y(0)=1, \dot{y}(0)=2$

(c) $\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)=\sin t$；$y(0)=1, \dot{y}(0)=2$

(d) $\ddot{y}(t)+3y(t)=\sin t$；$y(0)=1, \dot{y}(0)=2$

(e) $\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)=e^t$；$y(0)=1,\dot{y}(0)=2$

(f) $\ddot{y}(t)+y(t)=t$；$y(0)=1,\dot{y}(0)=-1$

3-10 写出图 3-39 中电路的动态方程。将这些方程写成状态变量形式和 $y(t)$的二阶微分方程形式，设为零输入情况，用拉普拉斯变换法解 $y(t)$的微分方程。各参数值和初始条件如图所示，用 MATLAB 中的 initial 命令检验所求的结果。

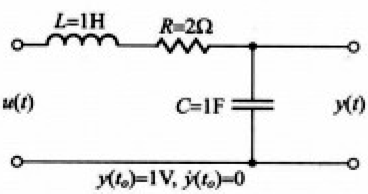


图 3-39 题 3-10 的电路图

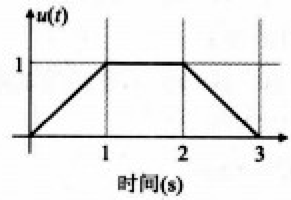


图 3-40 题 3-11 的输入

3-11 设有标准二阶系统

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

(a) 写出图 3-40 中信号的拉普拉斯变换；

(b) 若将该信号应用于系统 $G(s)$，求其输出的拉普拉斯变换；

(c) 求系统在图 3-40 所示信号输入下的输出。

3-12 在将一转动负载与一场控直流电机相连，该电机电感可忽略不计，当对该电机加 100 V 的恒定输入时，其输出负载在 1/2 s 内达到速度 1 rad/s，同时可测得其输出稳态速度为 2 rad/s。确定电机传递函数 $\theta(s)/V_f(s)$。

3-13 电脑磁盘驱动器的简略示意图如图 3-41 所示。

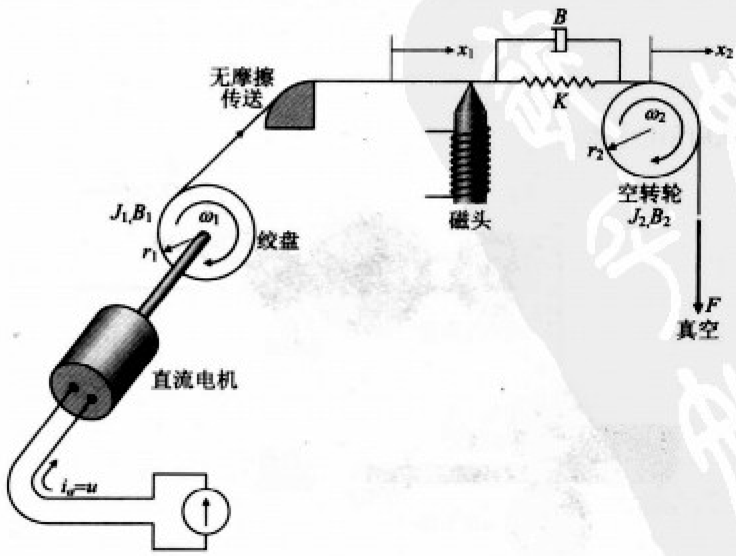


图 3-41 磁带驱动原理图

(a) 根据下面列出的参数写出系统的运动方程。其中 K 和 B 表示弹簧常数和磁带的伸缩率，ω_1 和 ω_2 是角速度。当正向电流加到直流电机上时会产生顺时针方向的转矩，如图中箭头所示。求出能恰好与作用力 F 相平衡的电流。然后再将电流和与之平衡的作用力撤去。假定两个转轮的转动方向如图中箭头所示。

$J_1=5\times10^{-5}\text{kg}\cdot\text{m}^2$，电机与绞盘转动惯量；

$B_1=1\times10^{-2}\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$，电机阻尼系数；

$r_1=2\cdot10^{-2}\text{m}$；

$K_t=3\times10^{-2}\text{N}\cdot\text{m/A}$，电机转矩常数；

$K=2\times10^4\text{N/m}$；

$B=20\text{N/m}\cdot\text{s}$；

$r_2=2\times10^{-2}\text{m}$；

$J_2=2\times10^{-5}\text{kg}\cdot\text{m}^2$；

$B_2=2\times10^{-2}\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$，惰轮粘滞系数；

$F=6\text{N}$，固定作用力；

$\dot{x}_1$=磁带速度 m/s　(控制的变量)。

(b) 求出电机电流与磁带位置之间的传递函数。

(c) 求出(b)中所得传递函数的零点和极点。

(d) 利用 MATLAB 求磁带速度 x_1 在 i_a 为阶跃输入下的响应。

3-14　计算图 2-45 中系统电机电压到角位置 θ_2 的传递函数。

3-15　计算图 2-49 中带孔 A 和 C 的双水箱系统的传递函数。

3-16　已知二阶系统传递函数

$$G(s)=\frac{3}{s^2+2s-3}$$

求：

(a) DC 增益。

(b) 阶跃输入时的稳态输出。

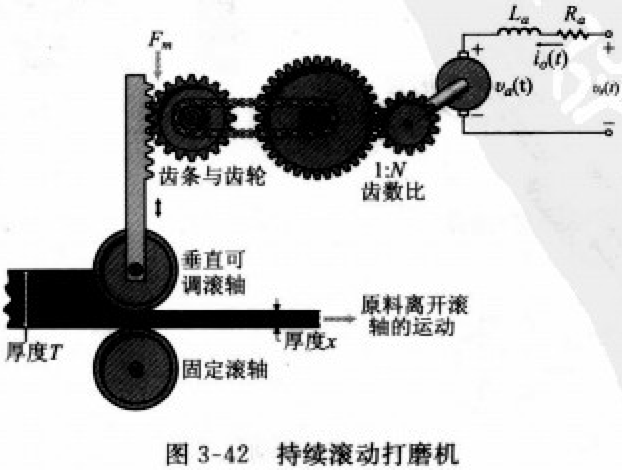


图 3-42　持续滚动打磨机

3-17 设有图 3-42 的连续滚动打磨机，其可调滚轴运动阻尼系数为 b，滚轧的材料可调滚轴的作用力与材料的厚度变化成正比：$F_r=c(T-x)$，再令直流电机转矩常数为 K_t，反电动势常数为 K_e，齿轮上的有效半径为 R：

(a) 系统输入是什么？输出呢？

(b) 不忽略可调滚轴的重力影响，画出系统方框图并详细指明以下量：$V_a(s)$、$I_0(s)$、$F(s)$（电机施加在可调滚轴上的作用力）和 $X(s)$。

(c) 将框图尽可能简化，但输出和各输入仍然要分别标明。

3.2 节习题：系统模型图

3-18 计算图 3-43 所示框图的传递函数。注意 a_i 与 b_i 为常数。图中所示的这种特殊形式称为“能控标准型”，第 7 章中我们将对其作进一步的讨论。

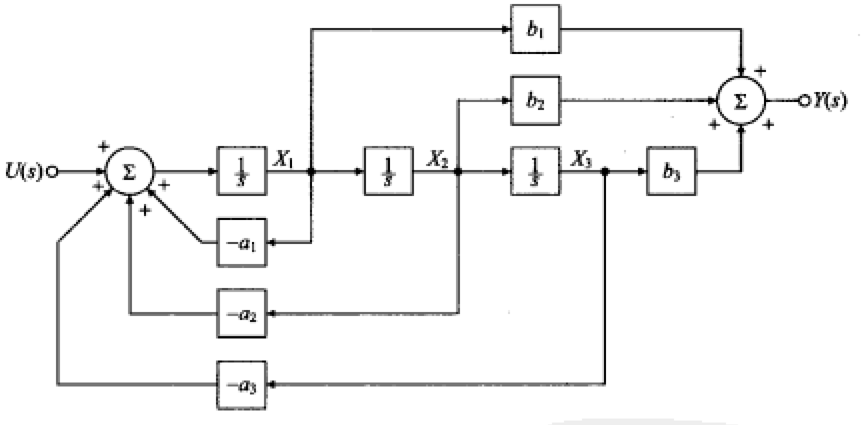


图 3-43 题 3-18 的框图

3-19 求图 3-44 中框图的传递函数。

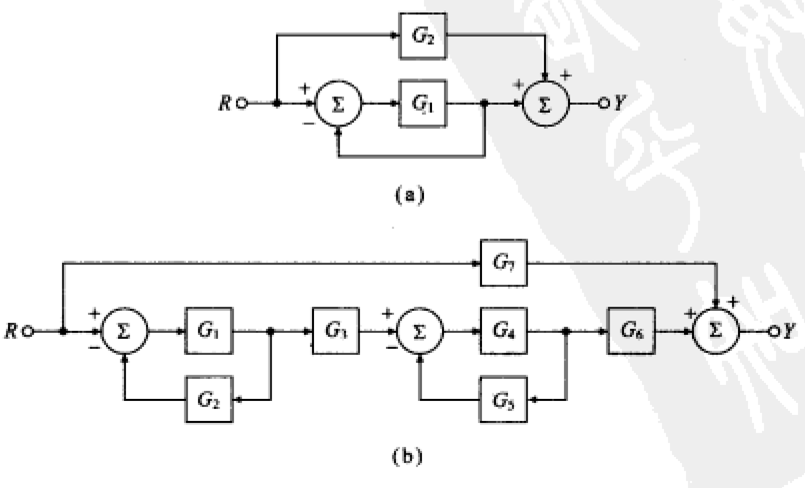
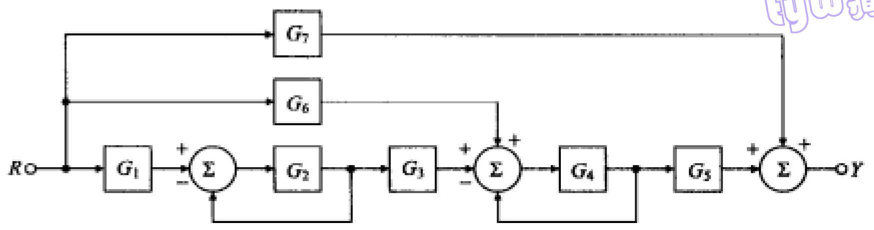


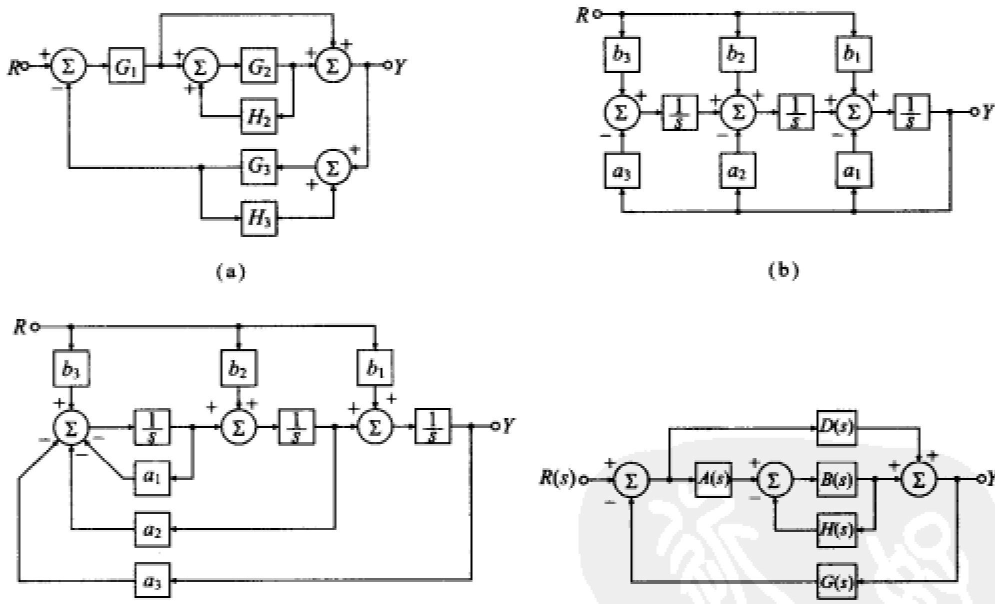
图 3-44 题 3-19 的框图



(c)

图 3-44　(续)

3-20　求图 3-45 中方框图的传递函数，可以使用方框图化简的方法来做，图 3-45b 中所示的形式称为“能观标准型”，这也将在第 7 章中进行讨论。



(a)　(b)　(c)　(d)

图 3-45　题 3-20 的框图

3-21　用框图代数变换求图 3-46 中 $R(s)$ 与 $Y(s)$ 之间的传递函数。

3.3 节习题：极点配置的影响

3-22　对图 3-47 所示的电路图，求：

(a) $i(t)$ 和 $v_1(t)$ 的时域方程；

(b) $i(t)$ 和 $v_2(t)$ 的时域方程；

(c) 假设所有初始条件为零，求传递函数 $V_2(s)/V_1(s)$、阻尼比 ζ 和系统的无阻尼自然频率 ω_n；

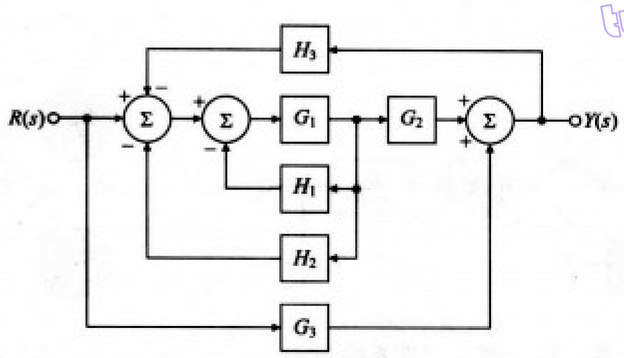


图 3-46 题 3-21 的框图

(d) 设 $v_1(t)$ 为单位阶跃函数，$L=10$ mH，$C=4$ μF。求使 $v_2(t)$ 的超调量不超过 25% 的 R 值。

3-23 对图 3-48 所示的单位反馈系统，确定比例控制器增益 K 使输出 $y(t)$ 对于单位阶跃输入的超调量不超过 10%。

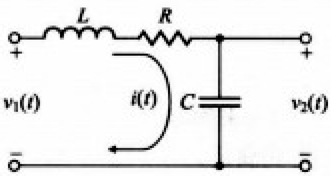


图 3-47 题 3-20 的电路

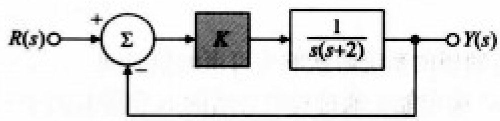


图 3-48 题 3-23 的单位反馈系统

3-24 对图 3-49 所示的单位反馈系统，确定补偿器的增益和极点分布，使整个闭环响应对单位阶跃输入的超调量不超过 25%，而超调量为 1%时的调节时间不超过0.1 s，并用 MATLAB 验证设计结果。

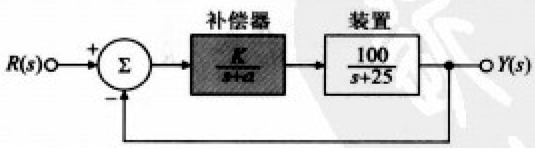


图 3-49 题 3-24 的单位反馈系统

3.4 节习题：时域特性

3-25 假定给定二阶系统的期望峰值时间低于 t_p'，画出满足 $t_p<t_p'$ 的极点值所对应的 s 平面区域。

3-26 假设要设计如图 3-50 描述的一阶系统的单位反馈控制器(将在第 4 章学到，图中所示为比例一积分控制器)，所设计的控制器须使系统闭环极点位于图 3-51所示的阴影之内。

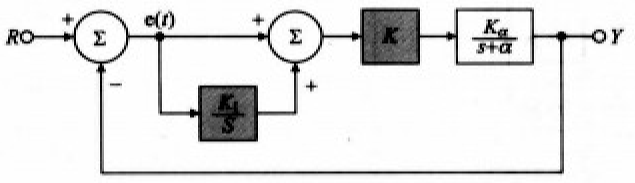


图 3-50　题 3-23 的单位反馈系统

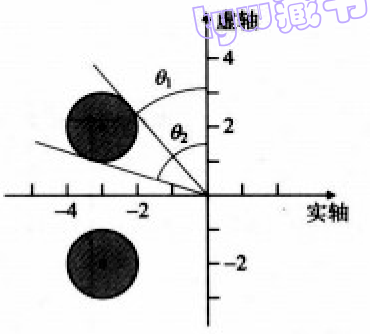


图 3-51　题 3-26 中所期望的闭环极点分布

(a) 对应于图 3-51 中阴影区域的 ζ、ω_n 值为多少(由图进行简单估计就可以了)。

(b) 令 $K_\alpha=\alpha=2$,求使闭环系统的极点位于阴影区域内的 K 和 K_I 值。

(c) 证明无论 K_α 与 α 为何值,控制器都能很方便地将极点置于复平面内的(左半平面)的任何地方。

3-27　单位反馈系统的闭环传递函数为:

$$G(s)=\frac{K}{s(s+2)}$$

所期望的系统阶跃响应可由峰值时间 $t_p=1$ s 和超调量 $M_p=5\%$来确定。

(a) 确定能否通过选择合适的 K 值使这两个指标能够同时得到满足。

(b) 在 s 平面中画出这两个指标都能得到满足的区域,并说明对于一些可能的 K 值其根的分布是什么。

(c) 选择一个合适的 K 值满足(a)中的条件,并运用 MATLAB 来验证这些指标是否得到满足。

▲3-28　图 3-22 所示直流电机的运动方程见式(2-45)~式(2-46):

$$J_m\ddot{\theta}_m+(b+\frac{K_tK_e}{R_a})\dot{\theta}_m=\frac{K_t}{R_a}v_a$$

假设:

$J_m=0.01\ \mathrm{kg\cdot m^2}$

$b=0.001\ \mathrm{N\cdot m\cdot s}$

$K_e=0.02\ \mathrm{V\cdot s}$

$K_t=0.02\ \mathrm{N\cdot m/A}$

$R_a=10\ \Omega$

(a) 求输入电压 v_a 和电机角速度 $\dot{\theta}_m$ 之间的传递函数。

(b) 输入电压 $v_a=10$ V 时电机的稳态速度是多少?

(c) 求输入电压 v_a 和转轴角 θ_m 之间的传递函数。

(d) 设对(c)部分中加入一反馈,使其变为一位置伺服装置,且输入电压为:

$$v_a=K(\theta_r-\theta_m)$$

其中 K 为反馈增益,求 θ_r 和 θ_m 之间的传递函数。

(e) 若期望的超调量 $M_p<20\%$,那么 K 所能取的最大值为多少?

(f) K 取何值时，上升时间小于 4 s(忽略 M_p 的约束)？

(g) 用 MATLAB 画出增益 $K=-0.5$，1 和 2 时，该位置伺服系统的阶跃响应，观察所画的图来求这三个阶跃响应的超调量和上升时间，这些图与(e)和(f)中计算的结果是否一致？

3-29 要控制图 3-52 和图 3-53 中所示卫星跟踪天线的仰角。天线和驱动部分的转支惯量为 J，阻尼为 B，从某种程度上说这是轴承和空气摩擦引起的，但主要还是直流驱动电机的反电动势引起的。运动方程为

$$J\ddot{\theta}+B\dot{\theta}=T_c$$

其中 T_c 为该驱动电机的转矩，假设 $J=600\ 000\ \mathrm{kg\cdot m^2}$ 和 $B=20\ 000\ \mathrm{N\cdot m\cdot s}$

(a) 求所施加的转矩 T_c 和天线的仰角 θ 之间的传递函数。

(b) 设已算出所施加的转矩，由反馈原理，θ 跟踪参考角 θ_r：

$$T_c=K(\theta_r-\theta)$$

其中 K 为反馈增益。求 θ_r 和 θ 之间的传递函数。

(c) 如果想要超调量 $M_p<10\%$，那么 K 的最大取值是多少？

(d) K 为何值时使上升时间小于 80 s(忽略 M_p 的约束)？

(e) 用 MATLAB 画出天线系统中 $K=200$、400、1000 和 2000 时的阶跃响应。由所画的图求四个响应的超调量与上升时间，检验所画的图是否与(c)的(d)中的计算结果相一致？



图 3-52 卫星跟踪天线(Courtesy Space Systems/loral)

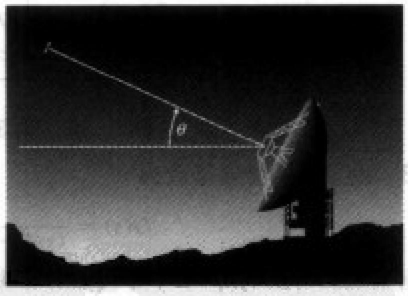


图 3-53 题 3-30 的天线示意图

3-30 (a)说明二阶系统

$$\ddot{y}+2\zeta\omega_n\dot{y}+\omega_n^2y=0,\quad y(0)=y_0,\quad \dot{y}(0)=0$$

的响应为：

$$y(t)=y_0\frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\cos^{-1}\zeta)$$

(b) 证明在欠阻尼情况下 ($\zeta<1$)，输出的振荡响应以预期(见图 3-54)的**对数衰减率(logarithmic decrement)**衰减。

$$\delta=\ln\frac{y_0}{y_1}=\sigma\tau_d=\ln\frac{\Delta y_1}{y_1}\cong\ln\frac{\Delta y_i}{y_i}$$

其中

$$\tau_d=\frac{2\pi}{\omega_d}$$

是阻尼自振周期。

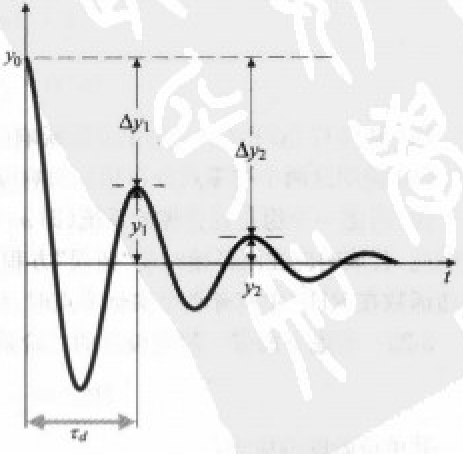


图 3-54 对数衰减率的定义

3.5 节习题：零点和附加极点的影响

3-31　在飞机控制系统中，对俯仰控制信号（q_c）的理想俯仰响应（q_0），可以用下面的传递函数来描述

$$\frac{Q_0(s)}{Q_c(s)}=\frac{\tau\omega_n^2(s+1/\tau)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

实际的飞机响应要比该理想传递函数复杂得多，但是该理想模型可用于自动驾驶仪的设计，设 t_r 为期望上升时间，那么

$$\omega_n=\frac{1.789}{t_r}\qquad \frac{1}{\tau}=\frac{1.6}{t_r}\qquad \zeta=0.89$$

画出 $t_r=0.8$ s、1.0 s、1.2 s 和 1.5 s 时的阶跃响应，说明该理想响应具有较快的调节时间和最小超调量。

3-32　考虑图 3-55 中所示的系统，其中：

$$G(s)=\frac{1}{s(s+3)}\text{ 和 }D(s)=\frac{K(s+z)}{s+p}\tag{3-82}$$

求 K、z 和 p 的值，使闭环系统的阶跃响应有 10% 超调量和 1.5 s 的调节时间（1% 判断标准）。

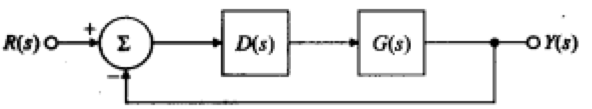


图 3-55　题 3-32 的单位反馈系统

3-33　设系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{s/2+1}{(s/40+1)[(s/4)^2+s/4+1]}$$

画出系统的阶跃响应，基于零极点分布来验证所得结果（不需要进行拉普拉斯反变换），然后将其与用 MATLAB 得到的阶跃响应比较。

3-34　考虑以下两个非最小相位系统

$$G_1(s)=-\frac{2(s-1)}{(s+1)(s+2)}\tag{3-83}$$

$$G_2(s)=\frac{3(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\tag{3-84}$$

(a) 画出 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 的单位阶跃响应，特别注意响应的瞬态部分。

(b) 说明这两个与零点分布相关的响应的性能差别。

(c) 考虑一个稳定且合理的系统（即 m 个零点和 n 个极点，其中 $m<n$），用 $y(t)$ 表示系统的阶跃响应，若该响应在刚开始时朝"错误"方程运动，即该阶跃响应存在负超调，证明当且仅当系统传递函数在 RHP 中有奇数个实数零点时，稳定且合理的系统才具有负超调。

3-35　考虑下面带一附加极点的二阶系统

$$H(s)=\frac{\omega_n^2 p}{(s+p)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

其单位阶跃响应为：

$$y(t)=1+Ae^{-pt}+Be^{-\sigma t}\sin(\omega_d t-\theta)$$

其中：

$$A=\frac{-\omega_n^2}{\omega_n^2-2\zeta\omega_n p+p^2}\qquad B=\frac{p}{\sqrt{(p^2-2\zeta\omega_n p+\omega_n^2)(1-\zeta^2)}}\qquad \theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}+\tan^{-1}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{p-\zeta\omega_n}$$

(a) 随着 p 增大，$y(t)$中哪一项将起主导作用？

(b) 给出 A 和 B 当 p 值较小时的估计值。

(c) 随 p 值变小，$y(t)$中哪一项将起主导作用？（变小是相对什么而言的？）

(d) 运用上述 $y(t)$的详细表达式或用 MATLAB 命令 step，令 $\omega_n=1,\zeta=0.7$，画出 p 的值从非常小到非常大时上述系统的阶跃响应，在哪个点上额外极点对系统响应的影响将消失？

3-36 设计用来保持飞机俯仰姿态角 θ 的自动驾驶仪的框图见图 3-56，升降角 δ_e 和俯仰姿态角 θ 之间的传递函数为

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)}=G(s)=\frac{50(s+1)(s+2)}{(s^2+5s+40)(s^2+0.03s+0.06)}$$

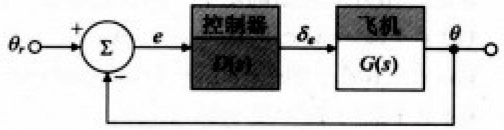


图 3-56 自行驾驶仪的框图

其中 θ 为俯仰姿态角单位为度，δ_e 为升降角单位也为度，自动驾驶仪控制者根据以下传递函数用俯仰姿态角误差 e 来调整飞机升降：

$$\frac{\delta_e(s)}{E(s)}=D(s)=\frac{K(s+3)}{s+10}$$

运用 MATLAB 求出 θ_r 处有单位阶跃变化时的 K 值，满足系统超调量小于 10%，上升时间少于 0.5s，对不同的 K 值，观察其阶跃响应，评价一下测量复杂系统的上升时间与超调量的难度。

3.7 节习题：稳定性

3-37 对不稳定的飞机响应，其不稳定程度测量指标是：在初始条件不为零时，该飞机时间响应振幅达到稳定时的 2 倍所需的时间（见图 3-57）。

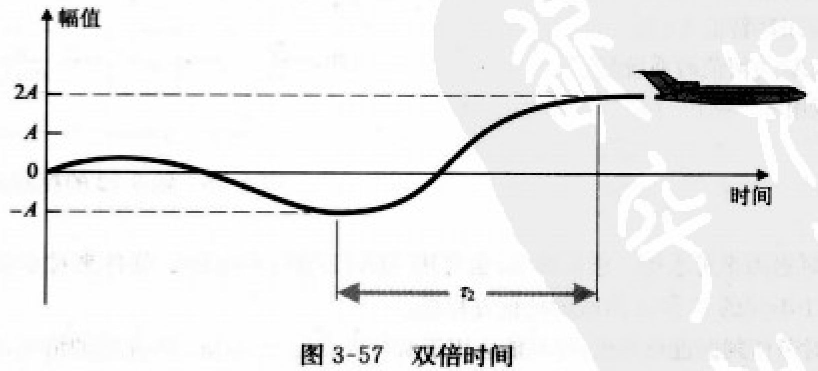


图 3-57 双倍时间

(a) 对于一阶系统，说明其双倍时间（time to double）为：

$$\tau_2=\frac{\ln 2}{p}$$

其中 p 为 RHP 中的极点位置。

(b) 对于二阶系统（在 RHP 有两复极点）

证明

$$\tau_2 = \frac{\ln 2}{-\zeta\omega_n}$$

3-38　设对下列开环系统引入单位反馈，用劳斯判据业确定所得闭环系统是否稳定。

(a) $KG(s)=\dfrac{4(s+2)}{s(s^3+2s^2+3s+4)}$

(b) $KG(s)=\dfrac{2(s+4)}{s^2(s+1)}$

(c) $KG(s)=\dfrac{4(s^3+2s^2+s+1)}{s^2(s^3+2s^2-s-1)}$

3-39　用劳斯判据确定下列方程有多少个根具有正实部。

(a) $s^4+8s^3+32s^2+80s+100=0$

(b) $s^5+10s^4+30s^3+80s^2+344s+480=0$

(c) $s^4+2s^3+7s^2-2s+8=0$

(d) $s^3+s^2+20s+78=0$

(e) $s^4+6s^2+25=0$

3-40　求 K 的取值范围以使下面多项式的所有根都位于 LHP

$$s^5+5s^4+10s^3+10s^2+5s+K=0$$

用 MATLAB 在 s 平面内画出该多项式在不同 K 值下的根来验证上面的结果。

3-41　典型磁带驱动系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{K(s+4)}{s[(s+0.5)(s+1)(s^2+0.4s+4)]}$$

其中的时间以毫秒为单位，用劳斯判据确定 K 的取值范围以使特征方程为

$$1+G(s)=0$$

的系统稳定。

3-42　考虑图 3-58 所示的系统：

(a) 计算闭环特征方程。

(b) (T, A) 为何值时系统稳定？

提示：应用 $e^{-Ts}\cong 1-Ts$

或 $$e^{-Ts}\cong\frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s}$$

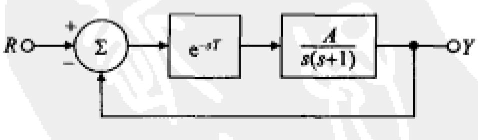


图 3-58　题 3-42 的控制系统

作为纯延迟因素可求得一近似结果；也可用 MATLAB (Simulink) 软件来对系统进行仿真，以求得对应于不同的 T 和 A 值时的特征方程根。

3-43　对劳斯判据进行修正，使其能应用于所有极点位于 $-\alpha(\alpha>0)$ 左边的情况，将该修正后的判据应用于下述多项式

$$s^3+(6+K)s^2+(5+6K)s+5K=0$$

求出 K 值使该多项式所有极点的实部均小于 -1。

3-44　设给定闭环系统的特征多项式为

$$s^4+(11+K_2)s^3+(121+K_1)s^2+(K_1+K_1K_2+110K_2+210)s+11K_1+100=0$$

求出关于增益 K_1 和 K_2 的约束条件，以保证闭环系统稳定，并画出 (K_1, K_2) 平面上的允许

区域，最好用计算机来求解该问题。

3-45 冬天暴风雪天气里，空中的电力线上覆盖冰之后，有时会有低频高振幅地垂直振荡。有风时，线上的冰受到空气升力和拉力，从而使电力线有达上下几米的振荡，这快速大振幅的波动能引起导体间碰撞，而且其对电力线支架巨大的运动负荷会对支架造成结构性破坏，这些影响则会导致电力供应中断，设导线为刚性的电线，只能垂直运动，且有弹簧减震悬挂着，如图 3-59 所示。该导体振动的简单模型为：

$$m\ddot{y}+\frac{D(\alpha)\dot{y}-L(\alpha)v}{(\dot{y}^2+v^2)^{1/2}}+T(\frac{n\pi}{l})y=0$$

其中

m =导体质量；

y =导体垂直位移；

D =空气拉力；

L =空气升力；

v =风速；

α =空气动力迎角 $=-\tan^{-1}(\dot{y}/v)$；

T =导体张力；

n =谐波频率数；

l =导体长度。

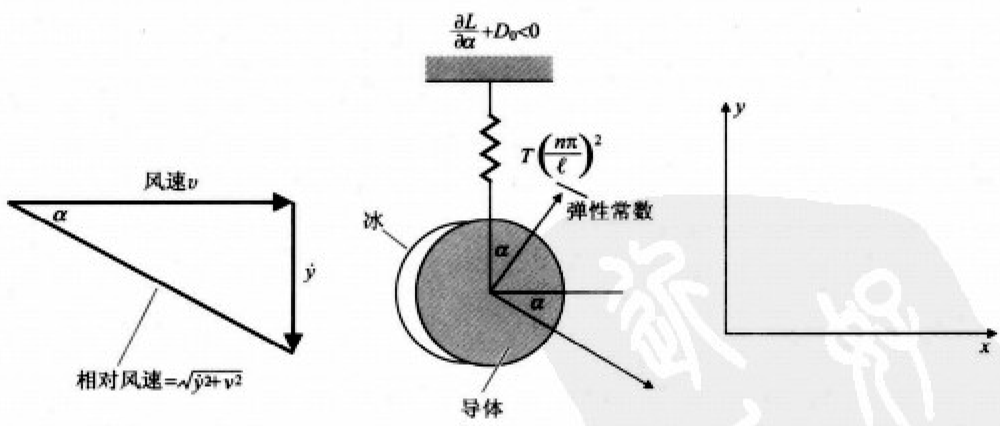


图 3-59 电力线导线

设 $L(0)=0$ 和 $D(0)=D_0$(常数)，将该方程在 $y=\dot{y}=0$ 附近进行线性化，用劳斯稳定判据说明当$\frac{\partial L}{\partial \alpha}+D_0<0$ 时，电线的振动存在。

3.9 节习题：梅森公式与信号流图

▲**3-46** 使用梅森公式计算图 3-45 中框图的传递函数。

▲**3-47** 利用框图代数运算或梅森分式确定图 3-60 中 $R(s)$与 $Y(s)$之间的传递函数。

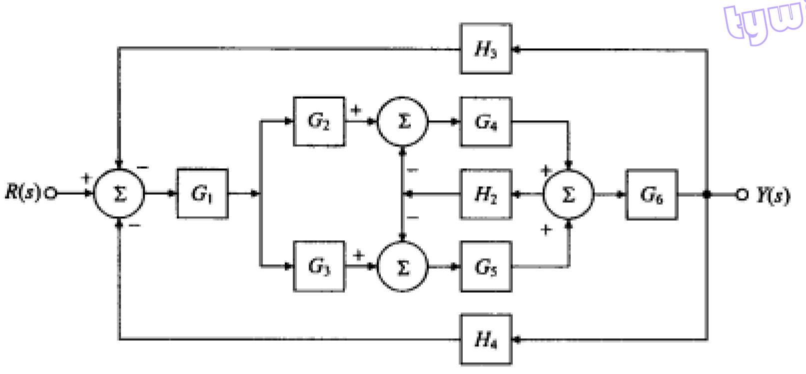


图 3-60　题 3-47 的框图

第 4 章　反馈的基本特点

反馈特性介绍

控制设计的一个主要目的，就是要利用可获得的工具，来减小由输入或可预期的参数改变所引起的误差。虽然在本书中我们主要关注的是如何选择控制器的传递函数，但是控制工程师必须要知道，对受控对象所做的某些改变可能会大大改善对过程的控制。传感器的选择和安装也同样是很重要的。这些需要考虑的事项表明，控制是一个需要协作才能完成的工作，在从概念到产品最终完成的每一步都必须考虑控制目标。然而，在本书里面，我们主要研究的是对动态过程的控制，并以那些能够被近似成线性、时不变、以传递函数描述的模型作为开始。有关线性化假设的理论探讨推后到第 9 章讨论，在那里将会介绍**李雅普诺夫(Lyapunov)**理论。

给定了一个模型后，设计的下一个步骤就是明确地描述这个控制所要达到的目标。在保证系统稳定性的同时，控制的目标还包括以下几个静态要求和动态要求：

- 在有恒定偏差的干扰信号存在的场合中，所允许的稳态误差；
- 在跟踪多项式参考信号(例如阶跃信号或斜坡信号)时，所允许的稳态误差；
- 系统传递函数对模型参数改变的灵敏度；
- 在参考输入或干扰输入下，阶跃响应所允许的瞬态误差。

实现控制的两种基本结构是开环控制(如图 4-1 所示)和闭环控制，闭环控制也称为反馈控制(如图 4-3 所示)。开环控制一般比较简单，不需要传感器来测量系统的输出，自然也不需要考虑稳定性问题。闭环控制比较复杂，还可能引起稳定性的问题，但它能够提供比开环控制更好的性能。如果一个被控过程本身(也就是开环状态)是不稳定的，那么反馈控制就是可能建立起稳定的系统，并满足所有性能指标要求的唯一选择。在介绍详细诸如根轨迹之类的设计技巧之前，我们有必要先了解一些一般的系统方程，引入几个性能指标的表示方法，以使我们可以表述设计所要求的各项目标。作为其中的一部分，开环控制和闭环控制的比较将会展现反馈控制的优势及其所受到的挑战。

全章概述

这一章我们先介绍反馈的基本方程和反馈结构与开环控制的比较。在4.1节首先介绍一般形式的方程，并讨论反馈在**扰动抑制**(**disturbance rejection**)、**参数灵敏度**(**parameter sensitivity**)和**输入跟踪**(**command tracking**)方面的影响。在4.2节，更详细地分析了对多项式输入响应的稳态误差。作为稳态性能的一种表达方式，控制系统通常根据系统所能跟随的输入多项式的最高阶数来分**型**(**type**)，这里的跟随是指系统在该输入作用下的稳态误差是一个有限的常数。在4.3节则介绍了动态跟随误差的问题，研究一个利用经典的**比例**(**proportional**)、**积分**(**integral**)和**微分**(**differential**)控制结构，即**PID**控制器，来修正闭环系统特征方程的例子。这一研究将阐述稳态特性和瞬态特性的相互作用，并为后续章节介绍更多精细的设计技巧打下一个基础。最后，在4.4节，我们对本章的内容做了一些有趣而重要的，但又有别于前面所述内容的扩展。在这一节我们将讨论数字控制器、PID控制器的参数整定、误差常数的Truxel公式以及时域灵敏度。其中最重要的是4.4.1节介绍的数字控制器的应用。如果时间允许，我们强烈推荐读者学习这一小节，因为几乎所有的现代控制器都是按照数字逻辑实现的。对这一重要问题，更完整的论述将会在第8章给出。

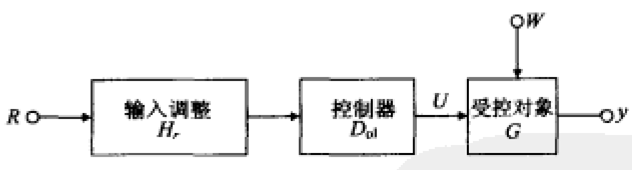


图4-1　开环控制系统

4.1　控制的基本方程

我们首先介绍基本的方程和传递函数，这些在本书的后面章节将会用到。对于如图4-1所示的开环系统，假设干扰是在设备端引入的，那么输出方程为

$$Y_{ol}=H_rD_{ol}GR+GW \tag{4-1}$$

则系统输出和参考输入之间的偏差为

$$\begin{aligned}E_{ol}&=R-Y_{ol} &(4\text{-}2)\\&=R-[H_rD_{ol}GR+GW] &(4\text{-}3)\\&=[1-H_rD_{ol}G]R-GW &(4\text{-}4)\\&=[1-T_{ol}]R-GW &(4\text{-}5)\end{aligned}$$

在这个例子中，开环传递函数是$H_rD_{ol}G$，我们以一般性的符号$T_{ol}(s)$来表示。

对于反馈控制，图4-2给出了一个系统的基本结构，其中系统干扰和传感器噪声输入的位置在系统中是难以确定的。这里，我们假设这两个信号分别从被控过程的输

入端和传感器的输入端进入系统，如图 4-3 所示。传感器的传递函数为 H_y，它的具体运动是很复杂的。但是，传感器通常选择得足够快速并且足够精确，在这样的情况下，它的传递函数就可视为常数 H_y，单位是伏特/单位输出(volt/unit-of-output)。参考输入 r 的单位和输出的单位相同，因此，输入滤波器的传递函数为 H_r，单位同样是伏特/单位输出。与之等效的框图如图 4-4 所示，其中控制器部分的传递函数为 $D(s)=H_rD_{cl}$，反馈部分的传递函数为 $H=\frac{H_y}{H}$。通常情况下，特别是当 H_y 是一个常数时，如果选择合适的比例因子使得 $H_r=H_y$，框图就形成了标准的单位反馈的结构，如图 4-5 所示。我们将深入研究这种标准结构的方程和传递函数。在以后使用到这些方程的地方，我们也默认以上的各种假定，不再做出说明。如果传感器的运动过程不能忽略，那么这些方程将必须做相应的修改。

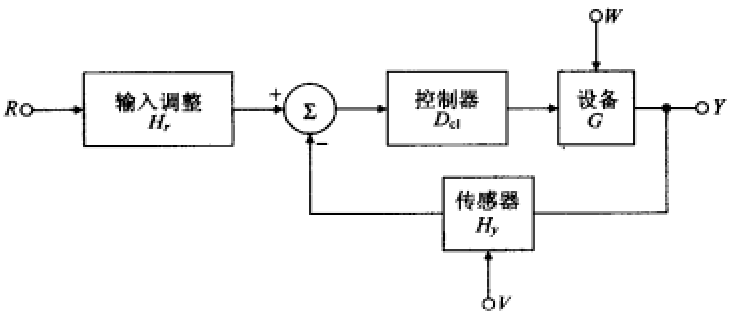


图 4-2 反馈控制系统

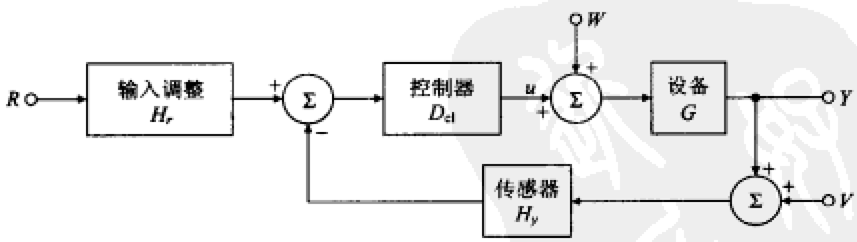


图 4-3 基本的反馈控制框图

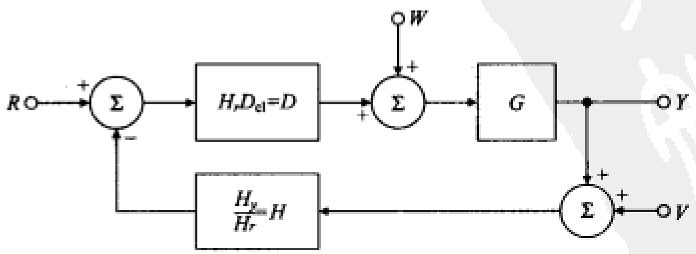


图 4-4 等效的反馈框图，H_2 被包含在反馈环内

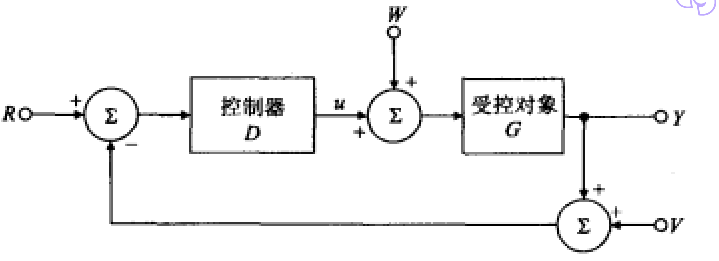


图 4-5　单位反馈系统，$H_r=H_y$，$D=H_rD_{cl}$

对于图 4-5 所示的反馈框图，系统输出方程和控制器输出方程分别为

$$Y_{cl}=\frac{DG}{1+DG}R+\frac{G}{1+DG}W-\frac{DG}{1+DG}V \tag{4-6}$$

$$U=\frac{D}{1+DG}R-\frac{DG}{1+DG}W-\frac{D}{1+DG}V \tag{4-7}$$

更为重要的是系统的误差方程，$E_{cl}=R-Y_{cl}$：

$$E_{cl}=R-\left[\frac{DG}{1+DG}R+\frac{G}{1+DG}W-\frac{DG}{1+DG}V\right] \tag{4-8}$$

$$=\frac{1}{1+DG}R-\frac{G}{1+DG}W+\frac{DG}{1+DG}V \tag{4-9}$$

为简化上述方程的形式，定义灵敏度函数(sensitivity function)$\mathcal{S}$[①]和补灵敏度函数(complementary sensitivity function) $\mathcal{T}$

$$\mathcal{S}=\frac{1}{1+DG} \tag{4-10}$$

$$\mathcal{T}=1-\mathcal{S}=\frac{DG}{1+DG} \tag{4-11}$$

在这种定义下，闭环误差方程为

$$E_{cl}=\mathcal{S}R-\mathcal{S}GW+\mathcal{T}V \tag{4-12}$$

为了以后的讨论，我们还定义了环路增益 $L(s)$，即环绕闭环一周的传递函数。例如在图 4-4 所示的系统中，环路增益 $L=DGH$。

4.1.1　瓦特问题：干扰抑制

在英国，蒸汽机早期的一种用途就是用于采矿，即从矿井里抽水和拖动装煤的货车。在完成这些工作的时候，早期发动机的稳态速度会随着负载转矩的改变而产生很大的变动。为解决这一问题，瓦特团队引入了飞球调节器(flying ball governor)(如图 1-11 所示)，通过把发动机的速度反馈到蒸汽室来调整发动机的转矩。通过研究发动机运动的简单方程，我们就会了解这种很有创造性的反馈控制的原理，其中发动机的速度以 ω_e 表示，外部负载转矩以 τ_l 表示。

式(4-13)描述了发动机的运动：

① 这个名称是 H. W. Bode 提出的，起名原因会在后几节内容中给出。

$$J\dot{\omega}_r + b\omega_r = A_1 u + A_2 \tau_l \tag{4-13}$$

式中，J 为转动惯量，b 为粘滞摩擦，u 为控制量，$\tau_l(t)$ 为负载转矩。

对式(4-13)作拉普拉斯变换，变换后的角速度记为 $\Omega_r(s)$，负载转矩记为 $T_l(s)$，得到开环速度控制的 s 域方程

$$sJ\,\Omega_r(s) + b\,\Omega_r(s) = A_1 U(s) + A_2 T_l(s) \tag{4-14}$$

$$sJ\Omega_r(s) + b\Omega_r(s) = A_1\left[U(s) + \frac{A_2}{A_1}T_l(s)\right] \tag{4-15}$$

$$s\tau\Omega_r(s) + \Omega_r(s) = A[U+W] \tag{4-16}$$

在推导式(4-16)的过程中，我们定义参数 $\tau = J/b$，$A = A_1/b$，干扰变量 $W = \frac{A_2}{A_1}T_l$。写成传递函数的形式，于是得到

$$\Omega_r(s) = \frac{A}{(\tau s+1)}U(s) + \frac{A}{(\tau s+1)}W(s) \tag{4-17}$$

$$= G(s)[U(s)+W(s)] \tag{4-18}$$

$$= G(s)W(s) \quad 若 \quad U(s)=0, \tag{4-19}$$

在反馈控制的情况下，如果没有参考输入，控制器的输出与系统误差成比例，即 $U = -K_{cl}\Omega_r$，那么反馈比例控制的方程为

$$s\tau\Omega_r(s) + \Omega_r(s) = A[-K_{cl}\Omega_r + W] \tag{4-20}$$

$$\Omega_r(s) = -G(s)K_{cl}\Omega_r(s) + G(s)W \tag{4-21}$$

$$[1+GK_{cl}]\Omega_r(s) = GW \tag{4-22}$$

$$\Omega_r(s) = \frac{G}{1+GK_{cl}}W \tag{4-23}$$

在开环控制的情况下，如果控制输入 $U(s)=0$，干扰 $W=\frac{w_o}{s}$，那么系统输出的稳态值为①

$$\omega_{ss} = G(0)w_o = Aw_o \tag{4-24}$$

为了和闭环控制有个比较，假设 $G(0)=1$，$w_o=1$，同时，我们还假定控制器的比例增益为 $K_{cl}=99$。开环稳态输出 $\omega_{ss}=1$，闭环的稳态输出 $\omega_{ss}=\left.\frac{1}{1+GK_{cl}}\right|_{s\to 0}=\frac{1}{1+99}=0.01$。显然，反馈系统在干扰作用下的误差比开环系统的要小近 100 倍。难怪瓦特的发动机最终获得了成功。

这个结果是误差方程的一个具体应用。根据式(4-4)，开环状态下的误差 $E_{ol}=-GW$，根据式(4-12)，反馈状态下的误差 $E_{cl}=-\mathcal{S}\,GW=\mathcal{S}\,E_{ol}$。这样，在任何情况下，只要因数$\mathcal{S}$小于 1，对同样的干扰信号输入，闭环系统的误差都会比开环系统的误差小。

引入反馈后，系统在恒定干扰作用下的误差比开环状态下的误差小一个因数$\mathcal{S}=\frac{1}{1+DG(0)}$，式中 $DG(0)$ 表示当 $s=0$ 时的环路增益。

---

① 在这里我们假设 $G(0)$ 是有限的。

4.1.2 布莱克问题：系统增益对参数变化的灵敏度

20世纪20年代，H. S. Black在贝尔实验室工作，他要设计一种合适的电子放大器作为转发器，用于电话公司的长距离电话线中。其中一个基本的问题就在于电子元件的参数漂移。他要设计的放大器必须能够在参数漂移的情况下保持一个相当精确的增益。他的解决方案就是反馈放大器。为了阐明他的这一发现，我们比较一下在参数改变时开环控制和闭环控制的灵敏度。参数的变化可能由外界环境引起（例如温度变化），也可能由器件老化引起，或者是从一开始我们就使用了有误差的参数值。假设设备的增益在操作中偏离了它的初始设定值 A，变成了 $A+\delta A$，以分数的形式表示，即偏离了 $\frac{\delta A}{A}$。开环控制器的增益假设固定为 $D_{ol}(0)=K_{ol}$。因此表面上的总增益为 $T_{ol}=K_{ol}A$①，而实际上系统的总增益为

$$T_{ol}+\delta T_{ol}=K_{ol}(A+\delta A)=K_{ol}A+K_{ol}\delta A=T_{ol}+K_{ol}\delta A$$

这样，$\delta T_{ol}=K_{ol}\delta A$。为了便于比较，我们以分数的形式来表示系统增益 T_{ol} 的改变量。对于假设的 A 的改变量，我们计算 $\delta T_{ol}/T_{ol}$。代入以上式子，得到

$$\frac{\delta T_{ol}}{T_{ol}}=\frac{K_{ol}\delta A}{K_{ol}A}=\frac{\delta A}{A} \tag{4-25}$$

上式表明，A 值10%的偏差将会导致 T_{ol} 有10%的偏差。H. W. Bode把 $\delta T/T$ 与 $\delta A/A$ 的比值称为增益对参数 A 的**灵敏度（sensitivity）** $\mathcal{S}$。由此可知，对于开环系统，$\mathcal{S}=1$。

在反馈系统中（见式(4-23)）考虑参数 A 具有同样的改变量，得到新的稳态反馈增益为

$$T_{cl}+\delta T_{cl}=\frac{(A+\delta A)K_{cl}}{1+(A+\delta A)K_{cl}}$$

式中 T_{cl} 表示闭环增益。我们运用微积分学的微分知识直接计算闭环增益的灵敏度。闭环稳态增益为

$$T_{cl}=\frac{AK_{cl}}{1+AK_{cl}}$$

又因为变量的一阶微分和变量的一阶导数成正比，于是

$$\delta T_{cl}=\frac{dT_{cl}}{dA}\delta A$$

因此，系统的传递函数 T 对参数 A 的灵敏度，可由下式给出

$$\frac{\delta T_{cl}}{T_{cl}}=\left(\frac{A}{T_{cl}}\frac{dT_{cl}}{dA}\right)\frac{\delta A}{A}$$

$$=(\text{灵敏度})\frac{\delta A}{A}$$

根据上式，灵敏度可表示为

$$\mathcal{S}_A^T \triangleq T_{cl}\text{对参数}A\text{的灵敏度}\triangleq\frac{A}{T_{cl}}\frac{dT_{cl}}{dA}$$

---

① T_{ol} 表示开环传递函数，T_{cl} 表示闭环传递函数。注意不要与前面用于表示 s 域干扰转矩的 T_{d} 混淆。

或

$$S_{K}^{T} = \frac{A}{AK_{cl}/(1+AK_{cl})}\frac{(1+AK_{cl})K_{cl}-K_{cl}(AK_{cl})}{(1+AK_{cl})^2}$$
$$=\frac{1}{1+AK_{cl}} \tag{4-26}$$

这个结果解释了前面我们称之为灵敏度的原因，同时也证明了反馈的另一个主要优点：

对于被控设备增益的变化，闭环控制的总传递函数增益变化的灵敏度比开环控制下的变化小一个因数 $\mathcal{S}=\dfrac{1}{1+DG}$。

与抑制干扰的情形一样，如果环路增益满足 $1+DG=100$，那么设备参数 A 改变10%只会引起闭环系统的稳态增益改变0.1%。在环路增益为100的情况下，开环控制器受设备增益改变的影响将比闭环系统敏感100倍。

迄今为止，不管是参考输入还是干扰输入，我们这一节的结果都是在输入信号为常量的情况下计算得到。事实上，如果参考输入或干扰输入的信号是正弦信号，我们也会得到类似的结果。这一点非常重要，因为有些时候这种信号会很自然地产生，例如电子系统就很容易受到电力线60Hz的工频（美国的工频）干扰。而且，更为复杂的信号也可以看成是由一定频带内的正弦信号叠加而成，这样我们就可以利用叠加原理一次一个频率地对系统进行分析。例如，我们知道人耳所能听到的声音大约在60Hz～15 000 Hz范围内。因此，一个高保真的音频系统，其反馈放大器和扩音器必须能够精确地跟随在这一频带内的所有正弦信号。在如图4-5所示的反馈系统中，假设控制器的传递函数为 $D(s)$，被控过程的传递函数为 $G(s)$，那么对于频率为 ω_o 的正弦信号，系统的稳态开环增益为 $|D(j\omega_o)G(j\omega_o)|$，整个反馈系统的误差为

$$|E(j\omega_o)|=|R(j\omega_o)|\left|\frac{1}{1+D(j\omega_o)G(j\omega_o)}\right|$$

这样，当输入信号是频率为 ω_o 的正弦信号时，要把误差减小到1%，我们必须令 $|1+DG|\geqslant 100$ 或近似为 $|D(j\omega_o)G(j\omega_o)|\gtrsim 100$。因此，一个好的音频放大器必须在 $2\pi 60\leqslant\omega\leqslant 2\pi 15\,000$ 的范围内满足这一环路增益。在第6章讲述基于频域响应的设计方法时，我们会再次涉及这个概念。

4.1.3 传感器的噪声引起的矛盾

最后，我们可以看到，在反馈系统的误差传递函数中有一项是开环系统所没有的。因为这一项是关于传感器的，开环系统并不需要传感器。这一项的误差传递函数是 $E_{cl}=\mathcal{T}V$，显然，如果 $\mathcal{T}$ 越小，这一项误差也就越小。不巧的是，要减小由 W 引起的误差，就要减小 $\mathcal{S}$，而要减小由 V 引起的误差，就要减小 $\mathcal{T}$。根据方程(4-11)，同时减小 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 是不可能的。解决这个两难问题的一般方法是频率分离。参考信号和干扰信号的能量通常集中在低于某一频率的频带内，我们把这个频率记为 ω_c。另一方面，我们可

以小心地设计传感器，使得传感器的噪声 V 在低于 ω_c 的低频范围内保持为足够小的值。[①] 这样，在 R 和 W 比较大而 V 比较小的频带内，我们的设计应该使$\mathcal{S}$比较小；而对于更高的频率，因为传感器的噪声不能避免，我们又应该使 $\mathcal{T}$ 比较小（即$\mathcal{S}$比较大）。这种折中的思想在后续章节的控制器设计中会有更多的应用。

4.1.4　雷达问题：跟随一个变化的参考信号

除了抑制干扰，很多系统需要跟随变化的参考信号，例如跟踪雷达就是这样的一个系统。在一个典型的雷达系统中，抛物面形状的天线不断地发射电脉冲，系统接收从目标飞行器反射回来的回波，并计算天线的坐标和指向目标的向量之间的偏差。控制要求就是让天线指向各个角落以保持这些指向目标的向量平行。整个系统的动态特性是很重要的。一个有着常量增益的开环控制器对这种参考输入或干扰输入都无能为力。除非这个开环控制器包含一个动态的输入滤波器 $H_r(s)$，它对参考信号的动态响应才会有相应的变化，但设备的动态特性仍然会影响系统对干扰信号的响应，而设备的这种特性一般不会随着干扰信号调整。相反地，任何一种反馈都能够有效地改变系统对参考输入或干扰输入的动态响应。在开环速度控制的例子中，式(4-17)用一个开环时间常数 τ 来描述设备的运动。在引入了比例反馈控制后，系统的运动由式(4-23)描述，其特征方程为

$$1+GK_{cl}=0 \tag{4-27}$$

$$1+\frac{AK_{cl}}{\tau s+1}=0 \tag{4-28}$$

$$\tau s+1+AK_{cl}=0 \tag{4-29}$$

$$s=-\frac{1+AK_{cl}}{\tau} \tag{4-30}$$

由上式可知，闭环时间常数是关于反馈增益 K_{cl} 的函数，即 $\tau_{cl}=\dfrac{\tau}{1+AK_{cl}}$，和开环的时间常数相比，显然已经减小了。一般情况下，闭环系统的响应的快速性会随着反馈增益的增大而提高，如果不考虑其他的因素，我们所希望的就是尽可能提高系统响应的快速性。但是，我们很快可以看到，系统的增益越大或阶数越高，其响应的阻尼性就越差，随着增益一直增大，系统最终会发散。因此，如果要减小系统受干扰的影响或降低系统对设备参数变化的灵敏度，我们可以增大系统的增益，但同时要清楚地知道，为保持系统的稳定性，就要对系统增益有一定的限制。减小稳态误差和提高系统动态响应的效果，两者本身是一对矛盾，解决这一矛盾也就是控制系统设计的一大问题。这一节我们得出以下结论：

反馈可以改变系统的动态响应，提高系统的快速性，但会降低系统的稳定性。

---

① 这也就意味着设计一个控制系统的时候很大一部分经费是花在传感器上的。

4.2 稳态误差的控制：系统类型

在 4.1 节的速度控制的例子中，我们假设参考输入和干扰输入都是常数，并设 $D(0)$和 $G(0)$是有限常数。在这一节我们将研究 $D(s)$和 $G(s)$两者之一或两者都在 $s=0$ 处有极点的情况。例如，一个有名的控制器结构由如下形式的方程描述

$$u(t) = k_p + k_I \int^t e(\tau)\mathrm{d}\tau + k_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4-31}$$

这就是比例积分微分(PID)控制，与之相应的传递函数为

$$D(s)=k_p+\frac{K_I}{s}+k_D s \tag{4-32}$$

在大部分情况下，参考输入不会是常数，但如果考虑的时间足够长以至系统能够充分进入稳定状态，那么参考输入可以近似地表示成多项式的形式。例如，一个天线装置在跟踪一颗人造卫星发射升空时的仰角，随着人造卫星逐渐接近顶部，天线运动的时域记录将是一条 S 形的曲线，如图 4-6 所示。如果我们关心的是跟踪器响应时的运动速度，那么在跟踪器运动的大部分时间内，其运动轨迹可以近似为关于时间的线性函数(称为斜坡函数或速度输入)。在电梯的位置控制中，斜坡函数作为参考输入指引电梯以恒定的速度运动到下一层。而在某些情况下，系统的输入还可以近似为具有恒定加速度的函数。在这一节我们研究的就是稳定系统在这一类多项式输入作用下的稳态误差。

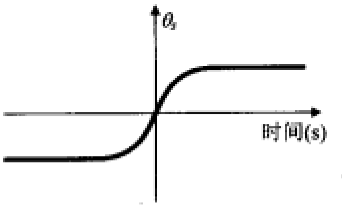


图 4-6 跟踪人造卫星的信号

我们以时域的多项式来表示系统输入，然后研究对于不同次数的多项式输入信号系统的稳态跟踪误差。我们将可以看到，当多项式输入信号的次数低于一定值的时候，系统的稳态误差将会是零，而对于更高次数的输入，系统的响应将是发散的。根据这种使得系统的稳态误差为非零有限常数的输入多项式的次数，我们可以对各种稳定系统进行划分**系统类型(system type)**。在速度控制的例子中，当应用比例控制的时候，系统对阶跃信号输入的响应有恒定且有限的误差，而阶跃函数的次数是零次的，因此该系统称为 0 型系统。如果系统对斜坡输入或一次的多项式输入的响应误差是有限的非零常数，这样的系统就称为 1 型系统，如此类推。系统类型可以根据参考输入划分也可以根据干扰输入划分，在本节中两种分类方法我们都会考虑。确定一个系统的类型先要计算系统误差的传递函数，然后利用终值定理计算系统的稳态值。对于单位反馈的系统，其类型的确定是最为容易的，因此我们先研究这种系统。

4.2.1 参考输入作用下的系统类型：单位反馈的情形

单位反馈的情形如图 4-5 所示，系统的误差由式(4-9)给出。如果我们只考虑系统的输入只有参考信号，并令 $W=V=0$，那么，利用环路增益的符号，方程可以简化为

$$E=\frac{1}{1+L}R=\mathcal{S}R \tag{4-33}$$

为研究各种多项式输入信号，我们设 $r(t)=t^k 1(t)$，其拉普拉斯变换为 $R=\frac{1}{s^{k+1}}$。作为一种通用的术语，阶跃输入(即 $k=0$)也称为"位置"输入，斜坡输入(即 $k=1$)称为"速度"输入，如果 $k=2$，则称之为"加速度"输入，这些都不管各种实际信号的具体单位。对误差方程应用终值定理得到

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=e_{ss}=\lim_{s\to 0}E(s) \tag{4-34}$$

$$=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+L}R(s) \tag{4-35}$$

$$=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+L}\frac{1}{s^{k+1}} \tag{4-36}$$

我们首先考虑系统的环路增益 L 在原点没有极点的情况，并令输入信号为阶跃函数，$R(s)=\frac{1}{s}$。在这种情况下，由式(4-36)推出

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+L}\frac{1}{s} \tag{4-37}$$

$$=\frac{1}{1+L(0)} \tag{4-38}$$

因此这个系统输入 0 型系统，我们定义常数 $L(0)\stackrel{\Delta}{=}K_p$ 为"位置误差常数"。如果 L 在原点处有一个极点，我们研究阶跃输入响应和斜坡输入响应。直接计算式(4-36)是一种方法，但在这种情况下，如果能够很好地描述控制器及被控设备在 s 趋近于 0 时的行为，那就会有助于我们理解。为了达到这一目的，我们选出函数 $L(s)$ 中除了处于原点的极点(s)以外所有的因式，并以 $L_o(s)$ 表示，则 $L_o(s)$ 在 $s=0$ 处是有限的，我们定义常数 $L_o(0)=K_n$，环路传递函数可以写为

$$L(s)=\frac{L_o(s)}{s^n} \tag{4-39}$$

例如，如果 L 没有积分环节，那么 $n=0$。如果系统有一个积分环节，那么 $n=1$，如此类推。把式(4-39)代入方程(4-36)，得到

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+\frac{L_o(s)}{s^n}}\frac{1}{s^{k+1}} \tag{4-40}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{s^n}{s^n+K_n}\frac{1}{s^k} \tag{4-41}$$

从这个等式我们可以看出，如果 $n>k$，则 $e=0$；如果 $n<k$，则 $e\to\infty$。如果 $n=k=0$，则 $e_{ss}=\frac{1}{1+K_0}$；如果 $n=k\neq 0$，则 $e_{ss}=\frac{1}{K_n}$。当 $n=k=0$ 时，系统输入为 0 次多项式输入，或者是阶跃输入或位置输入，常数 K_0 为"位置误差常数"，写作 K_p，系统类型输入 0 型。当 $n=k=1$ 时，系统输入是 1 次多项式输入，或者称为斜坡输入或速度输入，常数 K_1 为"速度误差常数"，写作 K_v，系统类型输入 1 型。同理，我们可以定义 2 型系统甚至更高类型的系统。各型系统的误差信息集中在如下的表格当中：

表 4-1 各类型系统在输入信号作用下的稳态误差

类型	输入		
	阶跃(位置)	斜坡(速度)	抛物线(加速度)
0 型	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1 型	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
2 型	0	0	$\frac{1}{K_a}$

一种常见的情况是系统有一个简单的积分控制，因而成为 1 型系统。在这种情况下，当系统输入为斜坡信号时，K_v 和稳态误差常数的关系如图 4-7 所示。回顾式(4-39)所给的环路增益表达式，我们很容易知道以上几个误差常数可以通过计算 L 在原点处的极点的次数 n(即单位反馈系统中环路积分环节的个数)，然后应用以下几条简单的公式中合适的一个来计算得到。

$$K_p = \lim_{s\to 0} L(s), n=0 \tag{4-42}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sL(s), n=1 \tag{4-43}$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2L(s), n=2 \tag{4-44}$$

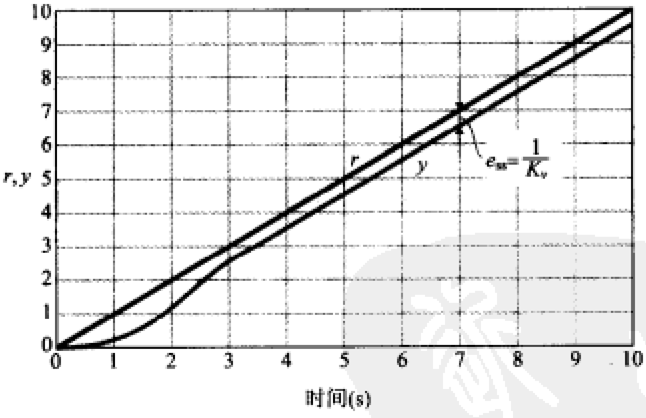


图 4-7 斜坡响应和 K_v 的关系

例 4.1 系统类型应用于速度控制

速度控制的实例如图 4-4 所示，在比例反馈的情况下控制器由 $D(s)=k_p$ 表示，被控设备的传递函数为 $G=\frac{A}{\tau s+1}$。试确定系统的类型以及相关的误差常数。

解：根据题意，$L=\frac{k_pA}{\tau s+1}$，因为 $n=0$，环路传递函数在 $s=0$ 处没有极点，应用式(4-42)可得，该系统为 **0** 型系统，误差常数属于位置误差常数，其值为 $K_p=k_pA$。

例 4.2 应用积分控制的系统的类型

速度控制的实例如图 4-4 所示，采用 PI 反馈，被控设备的传递函数为 $G=\frac{A}{\tau s+1}$，控制器传递

函数为 $D_c=k_p+\frac{k_I}{s}$。试确定系统的类型以及相关的误差常数。

解:根据题意,环路传递函数 $L(s)=\frac{A(k_p s+k_I)}{s(\tau s+1)}$,因为系统是单位反馈系统,$L(s)$ 在 $s=0$ 处有一个极点,所以系统类型属于1型。由式(4-43)可得,系统的速度误差常数为 $K_v=\lim_{s\to 0} sL(s)=Ak_I$。

系统类型的定义有助于我们迅速地区分系统跟随各种多项式输入信号的能力。在单位反馈的结构中,如果一个1型系统的过程参数发生了变化而系统的零极点并没有消去,这样虽然系统的速度误差常数会随之变化,但是对于恒定输入的作用,系统响应的稳态误差将仍然是零,系统也还属于1型系统。对于2型系统或是更高型的系统也有相似的结论。这样,我们可以说,对于单位反馈结构的系统,系统类型是一种与参数摄动有关的**鲁棒特性**(**robust property**)。鲁棒性是我们更喜欢单位反馈而不是其他类型的控制结构的主要原因。

4.2.2　参考输入作用下的系统类型:一般情形

在图4-4的系统中,如果反馈增益 $H=\frac{H_y}{H_r}$ 不是单位1,那么在单位反馈情形中得出的公式都不再适用,我们需要推导出更一般的结论。这里介绍两种计算方法。第一种方法是,如果我们将 H 先加1.0再减1.0,重新画出系统方框图如图4-8所示,则这种一般的情形转化成了单位反馈的情形。图4-8所示的框图的环路传递函数为 $L=\frac{DG}{1+(H-1)DG}$,应用单位反馈的相关公式可得系统的误差同样为 $E=\frac{1}{1+L}R=\mathcal{S}R$。

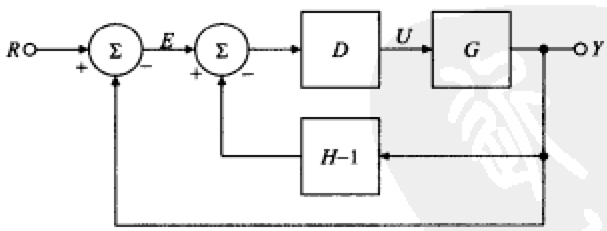


图4-8　变形得到的等效单位反馈框图

另一种方法是直接运用闭环传递函数进行计算,即我们前面定义的补灵敏度函数 $\mathcal{T}(s)$。由图4-4得到传递函数

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\mathcal{T}(s)=\frac{DG}{1+HDG} \tag{4-45}$$

因此,系统误差为

$$E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)-\mathcal{T}(s)R(s)$$

由此得到参考输入到误差的传递函数

$$\frac{E(s)}{R(s)}=1-\mathcal{T}(s)$$

系统误差的拉普拉斯变换为

$$E(s)=[1-\mathcal{T}(s)]R(s)=\mathcal{S}R$$

我们假设应用终值定理所需的条件是满足的，也就是说 $sE(s)$ 的极点均在左半 s 平面。于是应用终值定理得到系统的稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}s[1-\mathcal{T}(s)]R(s) \tag{4-46}$$

以多项式信号作为测试输入，误差的 s 域描述为

$$E(s)=\frac{1}{s^{k+1}}[1-\mathcal{T}(s)]$$

再次应用终值定理得到系统的稳态误差

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}s\frac{1-\mathcal{T}(s)}{s^{k+1}}=\lim_{s\to0}\frac{1-\mathcal{T}(s)}{s^k} \tag{4-47}$$

式(4-47)极限值的计算结果可能是0或非零常数，也可能是无穷大。如果式(4-47)的解是非零常数，则系统被称为是 k 型的。例如，如果 $k=0$，式(4-47)的解是非零常数，等于(通过定义) $\frac{1}{1+K_p}$，因此，系统是0型系统。同样地，如果 $k=1$，式(4-47)的解是非零常数，则系统是1型系统，并且对位置输入的稳态误差为0，对单位速度参考输入的误差为常数，等于(通过定义) $1/K_v$。1型系统是迄今为止在实际中用得最普遍的类型。1型或更高类型的闭环直流增益是1.0，这也就意味着 $T(0)=1$。

例 4.3 系统类型在速度反馈系统中的应用

考虑一个电动机位置控制的问题，该系统在电动机的转动轴上安装了一个测速器，测速器的输出电压(与转动轴的转动速度成正比)作为控制的一部分反馈到控制器，因此系统反馈不是单位反馈。对应于图4-4的框图的各参数如下：

$$G(s)=\frac{1}{s(\tau s+1)}$$
$$D(s)=k_p$$
$$H(s)=1+k_t s$$

试确定在参考输入下系统的类型以及相关的误差常数。

解：系统误差为

$$E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)-\mathcal{T}(s)R(s)=R(s)-\frac{DG(s)}{1+HDG(s)}R(s)$$
$$=\frac{1+(H(s)-1)DG(s)}{1+HDG(s)}R(s)$$

由式(4-47)得出系统稳态误差

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}sR(s)[1-\mathcal{T}(s)]$$

当参考输入为多项式形式时，$R(s)=1/s^{k+1}$，因此

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}\frac{[1-\mathcal{T}(s)]}{s^k}=\lim_{s\to0}\frac{1}{s^k}\frac{s(\tau s+1)+(1+k_ts-1)k_p}{s(\tau s+1)+(1+k_ts)k_p}$$
$$=0,\qquad k=0,$$
$$=\frac{1+k_tk_p}{k_p},\quad k=1$$

由上可得，系统属于1型系统，速度误差常数为 $K_v=\frac{k_p}{1+k_tk_p}$。注意到如果 $k_t>0$，速度误差

常数将会比单位反馈时的误差常数 k_p 小。因此可以得出结论：如果应用速度反馈来改善系统的动态响应，则会增大系统的稳态误差。

4.2.3　干扰输入作用下的系统类型

在大部分的控制系统中，总会有这样或那样的干扰存在。实际上，这些干扰有时候可以近似为多项式时间函数，例如阶跃函数或斜坡函数。这也就是说，和参考输入作用的分类方法类似，我们可以根据系统抑制干扰输入的能力对系统进行类型划分。在干扰输入作用下的系统类型表明了系统在稳态时所能抑制的多项式干扰输入的次数。知道了系统的类型，我们就可以定性地知道系统在如阶跃信号或斜坡信号之类的多项式干扰输入作用下的稳态响应。因为系统类型决定于从干扰输入到误差输出的传递函数，所以系统类型也就严格地依赖于干扰进入系统的位置。

因为当参考输入为零时，系统的输出就是误差，所以从干扰输入 $W(s)$ 到误差 $E(s)$ 的传递函数是

$$\frac{E(s)}{W(s)}=\frac{-Y(s)}{W(s)}=T_w(s) \tag{4-48}$$

和参考输入作用一样，如果阶跃干扰输入导致了稳态误差为非零常数，那么系统就属于 **0** 型系统。如果斜坡干扰输入导致了误差的稳态值为非零常数，那么系统就属于 **1** 型系统。和推导式(4-41)的过程类似，我们假设有常数 n 以及函数 $T_{o,w}(s)$，并令其满足 $T_{o,w}(0)=\frac{1}{K_{n,w}}$，则干扰到误差的传递函数可以写成

$$T_w(s)=s^nT_{o,w}(s) \tag{4-49}$$

于是，系统对 k 次多项式的干扰输入的稳态误差为

$$\begin{aligned}y_{ss}&=\lim_{s\to0}\left[sT_w(s)\frac{1}{s^{k+1}}\right]\\&=\lim_{s\to0}\left[T_{o,w}(s)\frac{s^n}{s^k}\right]\end{aligned} \tag{4-50}$$

根据式(4-50)，如果 $n>k$，那么误差为0，如果 $n<k$，则误差将会发散；如果 $n=k$，则系统类型为 k，误差由 $\frac{1}{K_{n,w}}$ 给出。

例 4.4　人造卫星运行姿态的控制

一个人造卫星的运行姿态的控制系统如图 4-9a 所示，其中

J＝惯性力矩；

W＝干扰转矩；

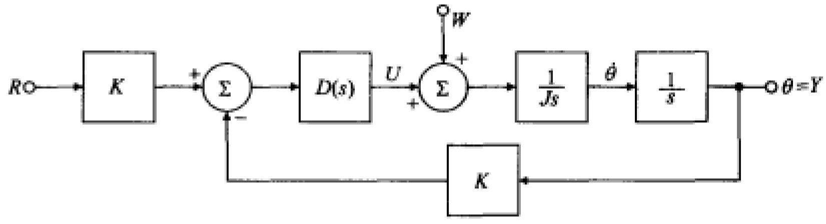
H_y＝传感器增益；

$D_c(s)$＝补偿器。

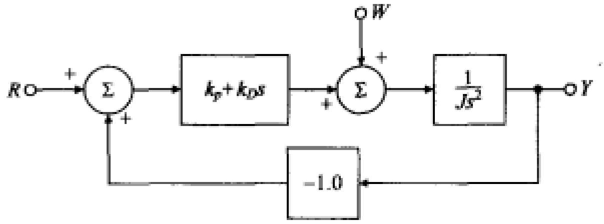
设输入滤波器和传感器的比例因子相等，若系统采用 PD 控制，则系统框图可以重新画为单位反馈的形式，如图 4-9b 所示，若系统采用 PID 控制则如图 4-9c 所示。假设采用以上控制后系统是稳定的，试确定：

(a) 当系统为图 4-9b 所示的 PD 控制系统时，在干扰作用下的系统类型以及误差响应。

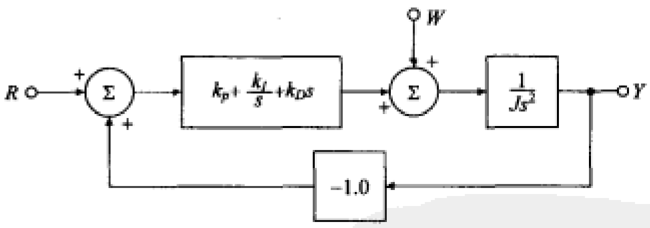
(b) 当系统为图 4-9c 所示的 PID 控制系统时，在干扰作用下的系统类型以及误差响应。



(a) 基本系统



(b) PD控制



(c) PID控制

图 4-9 人造卫星运行姿态控制

解：

(a) 观察图 4-9b 所示系统，被控设备在 s 域的原点处有两个极点，在参考输入的作用下系统是 2 型系统。从干扰到误差的传递函数是

$$T_w(s) = \frac{1}{Js^2 + k_Ds + k_p} \tag{4-51}$$

$$= T_{o,w}(s) \tag{4-52}$$

根据本节对常数 n 和 $T_{o,w}(s)$ 的定义，上式中 $n=0$，$K_{o,w}=k_p$。系统类型为 **0 型**，误差常数是 k_p，因此系统对单位阶跃干扰输入的误差为 $\frac{1}{k_p}$。

(b) 采用 PID 控制时，系统的前向增益有 3 个零极点，所以对于参考输入系统属于 3 型系统，但是干扰传递函数为

$$T_w(s)=\frac{s}{Js^3+k_Ds^2+k_ps+k_I} \tag{4-53}$$

$$n=1 \tag{4-54}$$

$$T_{o,w}(s)=\frac{1}{Js^3+k_Ds^2+k_ps+k_I} \tag{4-55}$$

由上可得，系统为 1 型系统，误差常数是 k_I，因此在单位斜坡干扰输入下系统的误差为 $\frac{1}{k_I}$。

例 4.5　统类型在直流电机的位置控制中的应用

一个直流电机的简化模型如图 4-10 的单位反馈系统所示，其中干扰转矩记作 $W(s)$。

(a) 采用比例控制器

$$D(s)=k_p \tag{4-56}$$

试确定在干扰输入作用下系统的类型以及稳态误差特性。

(b) 设控制方式为 PI 控制，其传递函数给出如下

$$D(s)=k_p+\frac{k_I}{s} \tag{4-57}$$

试确定在干扰输入作用下系统的类型以及稳态误差特性。

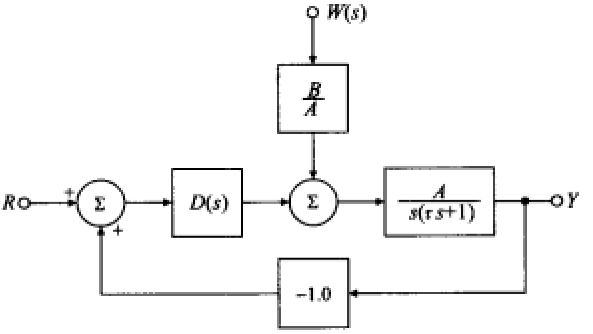


图 4-10　单位反馈的直流电机

解：

(a) 从 W 到 E（其中 $R=0$）的闭环传递函数为

$$T_w(s)=\frac{-B}{s(\tau s+1)+Ak_p}$$
$$=s^0T_{o,w}$$
$$n=0$$
$$K_{o,w}=\frac{-Ak_p}{B}$$

根据式(4-50)，我们可以知道系统属于 0 型系统，对单位阶跃的转矩输入的稳态误差是 $e_{ss}=\frac{-B}{Ak_p}$。根据前面章节的介绍，该系统对参考输入而言属于 1 型系统。这个例子说明，对于不同的输入（参考输入或干扰输入），同一个系统的类型可能是不同的。

(b) 如果控制器是 PI 控制器，则干扰误差传递函数是

$$T_w(s)=\frac{-Bs}{s^2(\tau s+1)+(k_ps+k_I)A} \tag{4-58}$$

$$n=1 \tag{4-59}$$

$$K_{v,w}=\frac{Ak_I}{-B} \tag{4-60}$$

因此,系统是 1 型系统,对单位斜坡干扰输入的误差是

$$e_{ss} = \frac{-B}{Ak_I} \tag{4-61}$$

4.3 动态误差的控制:PID 控制

我们已经在 4.1 节介绍了反馈控制的基本特性,在 4.2 节研究了系统对多项式形式的参考输入和干扰输入的稳态响应。在 4.1 节我们还研究得出比例控制改变简单的速度控制系统的时间常数。这一节将通过一种标准控制结构来分析更为复杂的控制方式对系统特征方程的影响。最基本的反馈控制是对误差的恒定比例控制(**P**)。如 4.2 节所指出的,如果加入一项对误差的积分项(**I**),则将对系统类型及系统在多项式输入作用下的稳态误差产生主要影响。在经典控制结构中还有最后一项是对误差的微分项(**D**)。这三项加起来,就形成了经典的比例积分微分(**PID**)控制器,这在过程控制和机器人工业中得到了广泛的应用。

4.3.1 比例控制(P)

当反馈控制信号与系统误差成线性比例时,我们称之为**比例反馈**(**proportional feedback**)。这也是 4.1 节的速度控制系统中控制器所使用的控制方式,其中控制器的传递函数为

$$\frac{U(s)}{E(s)} = D_c(s) = k_p \tag{4-62}$$

我们在 4.1.4 节介绍过,当采用比例控制时反馈控制系统的时间常数将减小一个因数 $1+Ak_p$。如果被控设备是二阶的,例如一个不能忽略线圈电感效应的直流电动机,那么传递函数可以写成

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + a_1 s + a_2} \tag{4-63}$$

在这种情况下,若控制器为比例控制,则系统的特征方程为

$$1 + k_p G(s) = 0 \tag{4-64}$$

$$s^2 + a_1 s + a_2 + k_p = 0 \tag{4-65}$$

设计者可以控制的是式中的常数项即系统的自然频率,但不能同时控制方程的阻尼系数。如果 k_p 选得比较大以得到合适的稳态误差,那么阻尼系数可能会太低而不能获得满意的瞬态响应。

4.3.2 比例加积分控制(PI)

上述控制器再加入一个积分项就构成了**比例加积分**(**Proportional plus Integral, PI**)控制,控制器的时域描述如下

$$u(t) = k_p e + k_I \int_{t_0}^{t} e(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4-66}$$

因此图 4-5 中的 $D_c(s)$ 变成

$$\frac{U(s)}{E(s)}=D_c(s)=k_p+\frac{k_I}{s} \tag{4-67}$$

比例积分反馈控制最主要的优点在于，当系统达到稳态的时候，即使作为控制器输入的误差信号为 0，其输出值也可以是非零常数。这是因为控制信号中的积分项是对 $e(t)$的过去所有值的累加。事实上，除非输入为 0，否则积分项将一直处于变化之中，所以，如果系统达到了稳定的状态，那么积分器的输入信号必然是 0。这个特点意味着，即使系统误差为 0，系统受到的恒定干扰 w（见图 4-4）也能够被积分器的输出抵消。

将 PI 控制应用到速度控制的例子中，则拉普拉斯变换后的控制器方程为

$$U=k_p(\Omega_{ref}-\Omega_m)+k_I\frac{\Omega_{ref}-\Omega_m}{s} \tag{4-68}$$

加上控制器后系统的方程为

$$(\tau s+1)\Omega_m=A\left(k_p+\frac{k_I}{s}\right)(\Omega_{ref}-\Omega_m)+TW \tag{4-69}$$

两边乘以 s 然后合并同类项得到

$$(\tau s^2+(Ak_p+1)s+Ak_I)\Omega_m=A(k_ps+k_I)\Omega_{ref}+AsW \tag{4-70}$$

基于 PI 控制器本身的动态特性，应用这种控制器将在更为复杂的层面改变系统的动态特性，而不仅仅像比例控制一样起到简单的加速作用。为了对此有更好的理解，我们考虑在速度控制中使用 PI 控制，如式(4-70)所示，系统的特征方程是

$$\tau s^2+(Ak_p+1)s+Ak_I=0 \tag{4-71}$$

上述方程的两个根可能都是复数，如果是这样的话，则系统的自然频率是 $\omega_n=\sqrt{\frac{Ak_I}{\tau}}$，阻尼系数是 $\zeta=\frac{Ak_p+1}{2\tau\omega_n}$。这两个参数都与控制器的增益有关。如果被控设备是二阶的，则系统的特征方程是

$$1+\frac{k_ps+k_I}{s}\frac{A}{s^2+a_1s+a_2}=0 \tag{4-72}$$

$$s^3+a_1s^2+a_2s+Ak_ps+Ak_I=0 \tag{4-73}$$

根据上式可知，通过控制器的参数我们可以设定两个系数，但不能设定三个。如果要设定三个系数，我们还需要微分控制。

4.3.3　比例积分微分控制(PID)

上面介绍的经典控制器的最后一项是微分控制(D)，完整的三项控制器由下面的方程描述

$$D_c(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=k_p+\frac{k_I}{s}+k_Ds \tag{4-74}$$

在过程控制工业中常用以下的等价形式：

$$D_c(s)=k_p\left[1+\frac{1}{T_Is}+T_Ds\right] \tag{4-75}$$

式中“积分速率” T_I（单位：秒）、“微分速率” T_D（单位：秒）表示了相应的物理意义，设计

者必须选择合适的参数来调整控制器。在我们的设计当中，式(4-74)的形式是很少用的。微分控制项的作用效果决定于误差输入的变化速率。因此，含有微分控制的控制器会表现出带有预测性质的响应，这可以由以下事实得到证明：当输入为斜坡误差信号 $e(t)=t1(t)$ 时，PD 控制器的输出将会比纯比例控制器的输出超前 $\frac{k_D}{k_p}\triangleq T_D$ 秒，如图 4-11 所示。

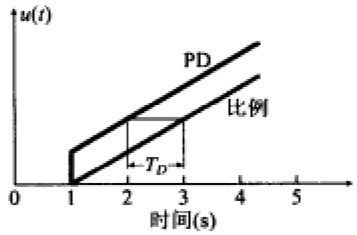


图 4-11　微分控制的预测性质

因为微分控制对突变信号的响应非常强烈，所以"D"项又常常放在反馈回路中，如图 4-12a，例如在电动机的转动轴上安装的测速器。要注意的是系统的闭环特征方程仍然不变，和微分项置于前向通道中一样，即图 4-12b 所示的系统，如果图中 $k_D=k_pk_t$，则两种结构的特征方程都可由式(4-74)表示，但是两种结构中由参考输入到输出的传递函数的零点是不同的。将微分环节放在反馈回路，系统的参考输入没有参与微分，因此当参考输入发生突然的变化时，我们可以得到更为平稳的控制器输出。如果把微分环节放在前向通道，理论上参考输入的阶跃变化将引起控制信号产生一个强烈的初始脉冲。

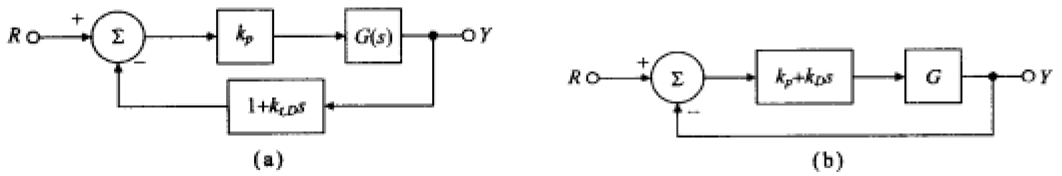


图 4-12　速度反馈的不同配置方法

为了阐明 PID 控制中微分环节的作用效果，我们以速度控制为例，假设被控设备为二阶。这样，系统的特征方程为

$$s^2+a_1s+a_2+A\left(k_p+\frac{k_I}{s}+k_Ds\right)=0$$

$$s^3+a_1s^2+a_2s+A(k_ps+k_I+k_Ds^2)=0 \tag{4-76}$$

合并同类项得到

$$s^3+(a_1+Ak_D)s^2+(a_2+Ak_p)s+Ak_I=0 \tag{4-77}$$

这里我们要指出的一个要点是，这个特征方程有三个参变量 k_P、k_I 和 k_D，其三个根决定了系统动态响应的特性，通过选择这三个参变量，理论上可以唯一而且任意地配置系统的特征根。如果没有微分项，则特征方程只有两个自由的参变量，但却有三个根，这就限制了我们选择特征方程的根。为了更好地阐述 PID 控制的作用效果，我们将举一个以具体数据描述的例子。

例 4.6　电动机速度的 PID 控制

直流电机的速度控制，系统参数①如下：

① 通过把 L_a 和 J_m 的真实值各乘以 1000，将以上参数按比例地调整为以毫秒为测量单位的。

$$J_m = 1.13\times10^{-2}\mathrm{N\cdot m\cdot s^2/rad}, b = 0.028\ \mathrm{N\cdot m\cdot s/rad}, L_a = 10^{-1}\ \mathrm{H},$$
$$R_a = 0.45\Omega, K_t = 0.067\ \mathrm{N\cdot m/A}, K_e = 0.067\ \mathrm{V\cdot s/rad}。\tag{4-78}$$

选择以下控制器参数：

$$k_p = 3,\quad k_I = 15\ \mathrm{s}^{-1},\quad k_D = 0.3\ \mathrm{s}。\tag{4-79}$$

当系统输入为阶跃的干扰输入或阶跃的参考输入时，试讨论 P、PI 和 PID 控制对系统响应的影响。如果控制器的某个参数没有使用，则令其为 0。

解：图 4-13a 画出了在阶跃干扰输入作用下 P、PI 和 PID 反馈控制对系统响应的影响。请注意加入积分环节会加剧系统的振荡，但可以消除稳态误差；加入微分环节可以减小系统振荡同时保持系统稳态误差为 0。图 4-13b 画出了在阶跃参考输入作用下 P、PI 和 PID 反馈控制对系统响应的影响，其结果和干扰输入的情形相似。为了计算系统的阶跃响应，我们先按 s 的降幂的次序把系统闭环传递函数的分子和分母的系数写成向量的形式，然后应用 MATLAB 的阶跃响应函数得到系统的响应曲线。例如，在输入了参数值后，以下几行命令可以得到 PID 控制对阶跃干扰输入的响应曲线图。

```
numG = [La Ra 0];
denG = [Jm*La Ra*b + Ke*Ke + Ke*kD Ra*Ke*Ke + Ke*kp Ke*ki];
sysG = tf(numG,denG);
y = step(sysG).
```

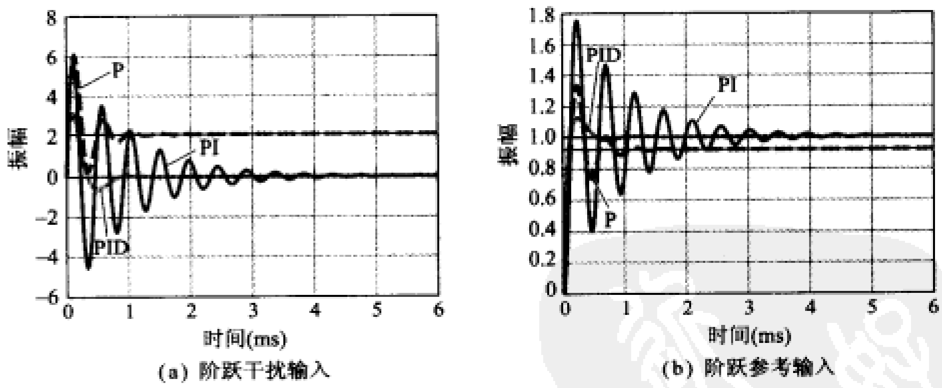


图 4-13　P、PI 和 PID 控制的响应

4.4　基本反馈概念的扩展

4.4.1　控制器的数字实现

随着计算机的性能不断提高，而价格不断降低，越来越多的嵌入式的应用环节通过数字逻辑来实现其功能，例如将计算机用作反馈系统中的控制器。与采用硬件实现控制信号的计算相比，在硬件设计确定以后，采用软件实现可以使设计者在修改控制器的控制规则时有更大的随意性。在大多数情况下，这也就意味着硬件和软件的设计

几乎可以完全独立地进行，因此可以节省大量的时间。另外，采用了数字计算机后，在数字控制器的函数中实现二元逻辑以及非线性操作都是很容易的。专门设计用于实时信号处理的处理器（即通常所说的数字信号处理器 DSP）就非常适合用作实时控制器。然而，设计以数字处理器实现的系统需要运用一些更为复杂的新概念，这些我们将在第 8 章予以介绍，例如 z 变换，它可以直接把线性连续模拟设计转变为相应的离散设计。数字控制器和模拟控制器的不同之处在于，数字控制器的信号必须经过**采样**（**sampled**）和**量化**[①]（**quantized**）。用于数字逻辑的信号首先必须采样，然后通过模数转换器，即 A/D 转换器[②]，转化成相应的量化值。当数字计算器把下一个控制信号值计算出来之后，该数字量又需要经过数模转换器（即 D/A）转化为相应的电压，并进行保持或外推插值，这样才能把控制信号应用于过程的执行器。数字控制器输出的控制信号在下一个采样周期到来之前都是保持不变的。因为多了采样环节，所以系统对数字控制器的速度及带宽要求也比模拟器件更加严格。我们会在第 8 章介绍一些离散设计方法以使得这些限制减至最小。选择采样周期的一个比较合理的规则是，在系统阶跃响应的上升时间内应该对离散控制器的输入信号采样大约 6 次。如果根据采样环节的影响对控制器进行相应的调整，那么在上升时间内的采样次数可以减小到 2～3 次。这就对应于采样频率达到系统闭环带宽的 10～20 倍。对控制器信号的量化同时也给系统引进了额外的噪声，为了使这种噪声的干扰保持在可以接受的范围，A/D 转换器通常要具备 10～12 位的精度。在初步分析的时候，我们通常忽略量化噪声的影响。图 4-14 所示的是一个含有数字控制器的系统的简化框图。

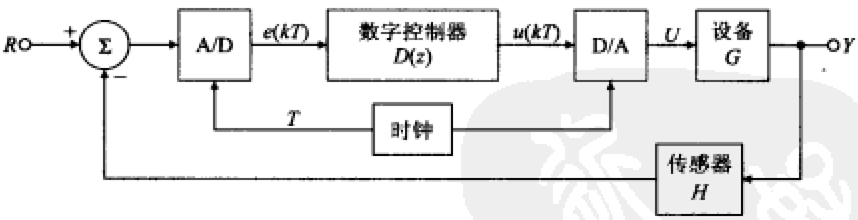


图 4-14　数字控制器的框图

为了介绍数字控制，我们先介绍一个简单的技巧，用于建立与给定连续控制器等效的离散控制器（这里只考虑采样而不考虑量化）。这种方法要求采样周期必须足够小，以使得重建的控制信号接近于原始的模拟控制器产生的控制信号。我们还假设用于数字逻辑中的数字都有足够的位数，因此在 A/D 和 D/A 过程中产生的量化噪声都可以被忽略。虽然有很多分析工具可以用来证明这些要求都能够满足，但这里我们仅仅通过仿真来检测我们的结果，因为我们知道这么一句话：“证明布丁的方法就是吃掉它。”

---

① 一个控制器如果它操作的信号经过了采样但没有量化，则称它是离散的；如果它操作的信号经过了采样和量化，则称它是数字的。

② 读作“A 到 D”。

建立与给定模拟控制器等效的离散控制器，也就等价于为控制器输入的采样值建立复现方程，使之近似于描述模拟控制器的微分方程。也就是说，我们知道了模拟控制器的传递函数，然后要找一个离散控制器来代替这个模拟控制器。这个离散控制器接受采样器的采样信号，并利用以前的控制信号值 $u(kT_s)$，以及当前的和过去的输入采样值 $e(kT_s)$，计算出下一个控制信号，然后送往执行器。例如 **PID** 控制器，其传递函数为

$$U(s)=\left(k_p+\frac{k_I}{s}+k_D s\right)E(s) \tag{4-80}$$

上式与下面的三项时域表达式等价

$$u(t)=k_p e(t)+k_I\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau+k_D\dot{e}(t) \tag{4-81}$$

$$=u_P+u_I+u_D \tag{4-82}$$

因为系统是线性的，所以下一个控制样值可以一项一项地计算。其中比例项是

$$u_P(kT_s+T_s)=k_P e(kT_s+T_s) \tag{4-83}$$

积分项可以通过把积分分为两部分来计算，其中第二部分表示对一个采样周期的积分，然后把第二部分作简单的近似：

$$u_I(kT_s+T_s)=k_I\int_0^{kT_s+T_s}e(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4-84}$$

$$=k_I\int_0^{kT_s}e(\tau)\mathrm{d}\tau+k_I\int_{kT_s}^{kT_s+T_s}e(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4-85}$$

$$=u_I(kT_s)+\{\text{一个周期内 } e(\tau) \text{ 所包围的面积}\} \tag{4-86}$$

$$\cong u_I(kT_s)+k_I\frac{T_s}{2}\{e(kT_s+T_s)+e(kT_s)\} \tag{4-87}$$

式(4-87)中的面积由以 T_s为高，$e(kT_s+T_s)$ 和 $e(kT_s)$ 为底的梯形近似得到，如图 4-15 的虚线所示。

其中的面积也可由以幅值 $e(kT_s)$ 和宽 T_s构成的矩形近似得到，如图 4-15 中的**实线所包围的**部分所示，$u_I(kT_s+T_s)=u_I(kT_s)+k_I T_s e(kT_s)$。我们将在第 8 章详细介绍这两种方法以及其他方法。

至于微分项，u 和 e 的角色刚好和积分项中的相反。根据式(4-87)和式(4-81)，作同样的近似后我们可以立刻写出

$$\frac{T_s}{2}\{u_D(kT_s+T_s)+u_D(kT_s)\}=k_D\{e(kT_s+T_s)-e(kT_s)\} \tag{4-88}$$

对于线性模拟系统，使用了拉普拉斯变换之后，其传递函数以及很多关系的描述都得到大大简化。在离散系统中，我们对照连续系统的微分算子 s 以及拉普拉斯变换，引进预测算子 z 以实现相应的离散变换。这里我们定义算符 z 为**前移算子**，这是基于以下事实：如果 $U(z)$ 是 $u(kT_s)$ 的 z 变换，那么 $zU(z)$ 就是 $u(kT_s+T_s)$ 的 z 变换。根据这

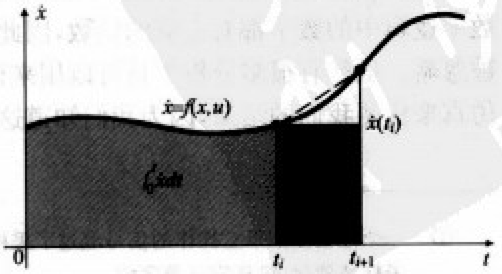


图 4-15　数值积分的图形解释

一定义，积分项可以写作：

$$zU_I(z)=U_I(z)+k_I\frac{T_s}{2}[zE(z)+E(z)] \tag{4-89}$$

$$U_I(z)=k_I\frac{T_s}{2}\frac{z+1}{z-1}E(z) \tag{4-90}$$

又由式(4-88)，微分项与积分项互为倒数关系：

$$U_D(z)=k_D\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}E(z) \tag{4-91}$$

因此，完整的离散 PID 控制器由下式描述：

$$U(z)=\left(k_p+k_I\frac{T_s}{2}\frac{z+1}{z-1}+k_D\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}\right)E(z) \tag{4-92}$$

比较模拟控制器和离散控制器的积分项和微分项，我们容易发现：只要把模拟传递函数中出现的每一个算符 s 都用 $\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$ 代替就得到了相应的 z 域的离散近似。这就是将模拟控制器离散化的**梯形准则**[①]**(trapezoid rule)**：

与 $D_a(s)$ 等价的离散表示为 $$D_d(z)=D_a\left(\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}\right)。 \tag{4-93}$$

例 4.7 离散化

模拟控制器的传递函数为

$$D(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{11s+1}{3s+1} \tag{4-94}$$

试求出与之等价的离散表示式，假设采样周期 $T_s=1$。

解：因为与 s 相对应的离散表示式是 $\frac{2(z-1)}{z+1}$，所以离散的传递函数为

$$D_d(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=D(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}} \tag{4-95}$$

$$=\frac{11\left[\frac{2(z-1)}{z+1}\right]+1}{3\left[\frac{2(z-1)}{z+1}\right]+1} \tag{4-96}$$

化简，得到离散传递函数

$$D_d(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{23z-21}{7z-5} \tag{4-97}$$

根据 z 为前移算子的定义，我们可以将式(4-97)化为离散差分方程。首先去分母，得

$$(7z-5)U(z)=(23z-21)E(z) \tag{4-98}$$

将 z 视为移位算子，我们可以将式(4-98)等效为如下的差分方程：

$$7u(k+1)-5u(k)=23e(k+1)-21e(k) \tag{4-99}$$

为简单起见，我们用$(k+1)$代替了式中的 kT_s+T_s。为了计算下一个(即时间为 kT_s+T_s)控制信号，我们把上式化为：

---

① 这个规则又称 Tustin 方法，Tustin 是一名英国的工程师，他运用这种方法研究非线性电路的响应。把 z 看作前移算子，我们得到与之相应的差分方程。

$$u(k+1)=\frac{5}{7}u(k)+\frac{23}{7}e(k+1)-\frac{21}{7}e(k) \tag{4-100}$$

现在我们应用这些结论来解决一个控制问题。MATLAB 集成的 Simulink 给我们提供了连续系统和离散系统仿真的方法，因此我们可以方便地对比连续控制器和离散控制器的响应。

例 4.8 离散控制器应用于速度控制

一个电动机的速度控制系统，其被控设备的传递函数为

$$\frac{Y}{U}=\frac{45}{(s+9)(s+5)} \tag{4-101}$$

控制器采用 PI 控制，传递函数为

$$D(s)=\frac{U}{E}=1.4\frac{s+6}{s} \tag{4-102}$$

闭环系统的上升时间大约是 0.2 s，超调量约为 20%。请设计一个等效的离散控制器，并比较两个系统的阶跃响应和控制信号。(a) 若采样周期为 0.07 s(即在上升时间内约采样 3 次)，比较两个系统的响应。[①] (b) 若采样周期 $T_s=0.035$ (对应于上升时间内约采样 6 次)，比较两个系统的响应。

解：

(a) 根据式(4-93)，采样周期 $T_s=0.07$，将 $\frac{2}{0.07}\frac{z-1}{z+1}$ 代替 $D(s)$ 中的 s，得到等效的离散方程如下：

$$D_d(z)=1.4\frac{\frac{2}{0.07}\frac{z-1}{z+1}+6}{\frac{2}{0.07}\frac{z-1}{z+1}} \tag{4-103}$$

$$=1.4\frac{2(z-1)+6*0.07(z+1)}{2(z-1)} \tag{4-104}$$

$$=1.4\frac{1.21z-0.79}{(z-1)} \tag{4-105}$$

根据上式，我们得到控制方程(其中采样周期 T_s 已经省略而没有在式中表达)

$$u(k+1)=u(k)+1.4*[1.21e(k+1)-0.79e(k)] \tag{4-106}$$

(b) 同理，当 $T_s=0.035$ 时，离散传递函数为

$$D_d=1.4\frac{1.105z-0.895}{z-1} \tag{4-107}$$

因此，相应的差分方程为

$$u(k+1)=u(k)+1.4[1.105e(k+1)-0.895e(k)]$$

为了对两个系统进行仿真，我们画出了 Simulink 的框图，如图 4-16 所示，系统的阶跃响应也在图 4-17a 给出。控制器的控制信号分别画于图 4-17b 中。注意到当采样周期为 0.07 时，离散控制器引起的超调量是最大的；而当 $T_s=0.035$ 时，数字控制器和模拟控制器的作用效果符合得比较好。

① 这一过程类似于第 3 章中我们通过传递函数求取相应的常微分方程的过程。

对于含有较多零点和极点的控制器，如果还是用式(4-93)的代入法来进行连续系统的离散化，则计算过程可能会相当繁琐。幸好，MATLAB 提供了一条命令来完成这种工作。假设连续系统的传递函数由 $D_c(s)=\frac{\text{num}D}{\text{den}D}$ 给出，用 MATLAB 语言表示，即 sysDa＝tf(numD, denD)，若采样周期为 T_s，则相应的离散传递函数可由下式得到

$$\text{sysDd} = \text{c2d}\,(\text{sysDa},\ T_s,\ \text{'t'}). \tag{4-108}$$

在上式中，多项式的表示方法自然是 MATLAB 的表示法。c2d 函数的最后一个参数't'表示离散化过程采用梯形法，至于函数的其他选项可以通过查看 MATLAB 帮助文件(help c2d)获取相关信息。举个例子，对于例 4-8，当 $T_s=0.07$ 时，控制器离散化过程的命令如下：

```
numDa = [1 6];
denDa = [1 -1];①
sysDa = tf(numD,denD)
sysDd = c2d( sysDa,0.07,'t')
```

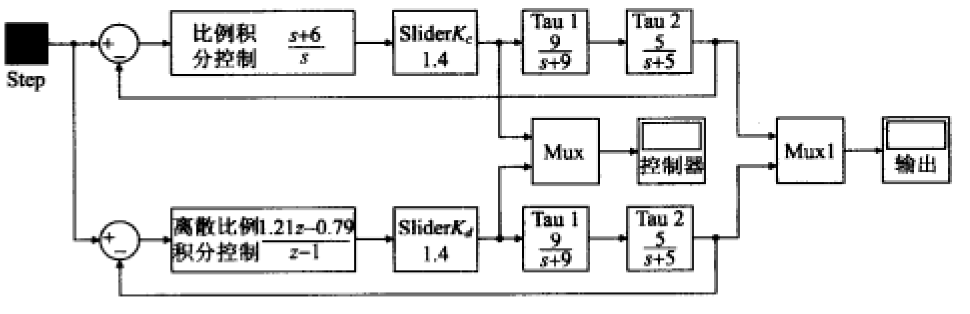


图 4-16 控制器分别为连续控制器和离散控制器的 Simulink 框图

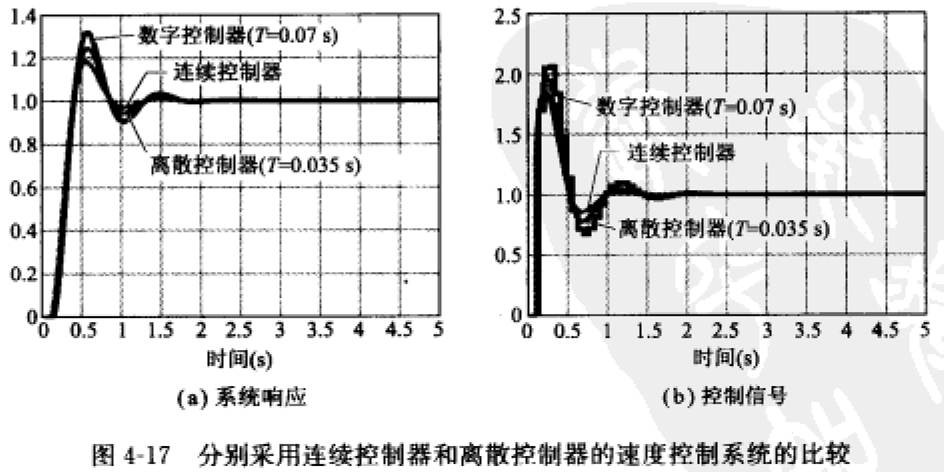


图 4-17 分别采用连续控制器和离散控制器的速度控制系统的比较

① 怀疑此句有误，应为 den Da＝[1,0]。——译者注

▲4.4.2　PID控制器参数的Z-N整定法

在以后章节我们将会看到，有很多复杂的方法用于设计控制器，以使得系统满足各种稳态和瞬态特性，跟随参考输入信号，抑制干扰信号。这些方法都要求设计者知道以动态方程描述的动态系统模型，或者知道相当大频率范围内的具体频率响应。然而，这些数据都是难以获得的，事实上这些困难已经促进了系统模型识别等复杂技术的发展。因此，很早以前工程师就开始研究其他方法以避开这些限制。

Callender等人在1936年提出了一种设计PID控制器的方法。这种方法是基于对被控设备参数的估计值，给出了用于适合控制器整定的参数值，而设备参数的估计可以由操作工程师通过对被控过程进行实验得到。后来(1942年、1943年)，J. G. Ziegler和N. B. Nichols对这种方法进行了扩展。他们注意到很大一部分过程控制系统的阶跃响应都表现为一条**过程反应曲线(process reaction curve)**，如图4-18所示，曲线可由实验的阶跃响应数据画出。类似图4-18的S形曲线是很多系统都具有的一种性质，我们近似地认为它是以下传递函数的阶跃响应曲线：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Ae^{-st_d}}{\tau s+1}\tag{4-109}$$

这是一个一阶系统，并且含有纯时间滞后 t_d 秒。式(4-109)的各个常数可由过程的阶跃响应确定。过曲线的拐点作一条曲线的切线，则切线的斜率 $R=A/\tau$，切线与时间轴的交点表示延迟时间 $L=t_d$。

Ziegler和Nichols给出了两种整定PID参数的方法。第一种方法选择的控制器参数要达到的目标是：闭环系统阶跃响应的瞬态部分的衰减比约为4∶1。也就是说，系统的振荡幅值在一个周期内减小为原值的1/4，如图4-19所示。4∶1的衰减比大约对应于$\zeta=0.21$，这时系统响应的快速性以及系统的稳定性都比较好，是一种比较合理的折中。两位作者用模拟计算机仿真了系统的方程，并逐步调整控制器的参数，直到系统动态响应的幅值在一个周期内衰减到25%。Ziegler和Nichols整定的调节器参数由下式给出定义

$$D_c(s)=k_p\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)\tag{4-110}$$

参数的Z-N(Ziegler-Nichols)整定方法见表4-2。

表4-2　调节器 $D(s)=k_p(1+1/T_I s+T_D s)$ 的Z-N整定法(衰减比为4∶1)

控制器类型	最佳增益
比例调节器	$k_p=1/RL$
比例积分调节器	$\begin{cases}k_p=0.9/RL,\\T_I=L/0.3\end{cases}$
比例积分微分调节器	$\begin{cases}k_p=1.2/RL,\\T_I=2L,\\T_D=0.5L\end{cases}$

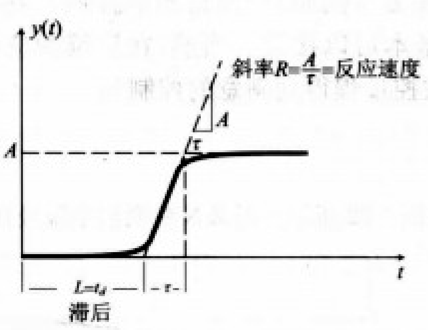


图 4-18 过程反应曲线

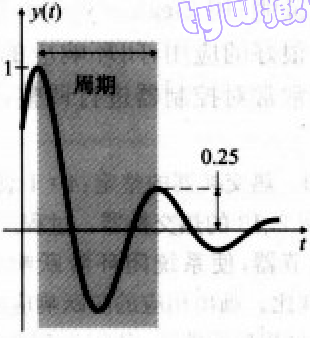


图 4-19 4：1 衰减比

另一种方法是**稳定边界法(ultimate sensitivity method)**，这种方法并非建立于系统的阶跃响应，而是基于系统处于临界稳定状态时的振荡幅值和振荡周期。其具体步骤为：先取比例增益为足够小的任意值，并令控制器的积分环节和微分环节为零，然后逐渐增大比例增益，直到系统进入连续振荡的状态，要注意的是必须保证振荡的幅值没有超出执行部件的饱和值。此时，控制器的增益定义为 K_u(称为**临界增益(ultimate gain)**)，振荡周期定义为 P_u(称为**临界周期(ultimate period)**)。两个参数的确定如图 4-20 和图 4-21 所示。P_u应该在系统的振荡幅值趋近于最小的时候测量。现在，我们可以按照表 4-3 给出的方法整定控制器的参数。

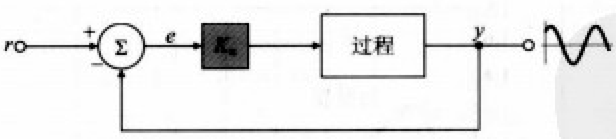


图 4-20 临界增益和临界周期的确定

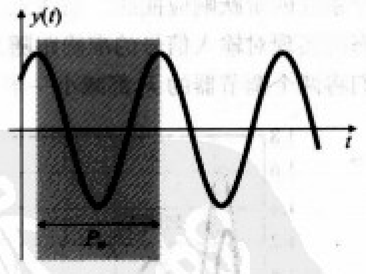


图 4-21 临界稳定系统

表 4-3 调节器 $D(s)=k_p(1+1/T_Is+T_Ds)$ 的 Z-N 整定法(基于稳定边界法)

控制器类型	最佳增益
比例调节器	$k_p=0.5K_u$
比例积分调节器	$\begin{cases} k_p=0.45K_u \\ T_I=\dfrac{P_u}{1.2} \end{cases}$
比例积分得分调节器	$\begin{cases} K_p=0.6K_u \\ T_I=\dfrac{1}{2}P_u, \\ T_D=\dfrac{1}{8}P_u \end{cases}$

经验证明，用 Ziegler-Nichols 法则（简称 Z-N 法则）整定得到的控制器在很多系统中得到了很好的应用，闭环响应的效果也基本可以接受。当然，在后续的应用中操作员还应该常常对控制器进行调整，以使得被控过程得到满意的控制①。

例 4.9　热交换器的整定：4：1 衰减比

考虑例 2.13 的热交换器。过程反应曲线如图 4-22 所示。用 Z-N 法则给系统设计比例调节器和 PI 调节器，使系统闭环阶跃响应满足 4：1的衰减比。画出相应的阶跃响应曲线。

解：由过程反应曲线，我们得到曲线斜率的最大值 $R\cong\frac{1}{90}$，滞后时间为 $L\cong 13$ s。根据表 4-2 所给的 Z-N 整定法，得到调节器的各参数如下：

比例调节器：$k_p=\frac{1}{RL}=\frac{90}{13}=6.92$

PI 调节器：$k_p=\frac{0.9}{RL}=6.22$，

$T_I=\frac{L}{0.3}=\frac{13}{0.3}=43.3$

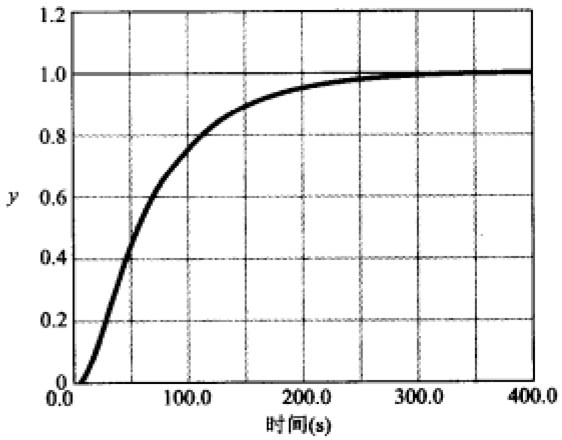


图 4-22　测量所得的过程反应曲线

图 4-23a 是分别应用不同的调节器的两个系统的阶跃响应曲线。请注意采用比例调节器的系统在稳态时仍然有余差，而 PI 调节器在稳态时实现对输入信号的准确跟随。两个系统的振荡都比较激烈，而且超调量也比较大。如果我们将两个调节器的 k_p 都减小一半，则超调量和振荡都会大大减小，如图 4-23b 所示。

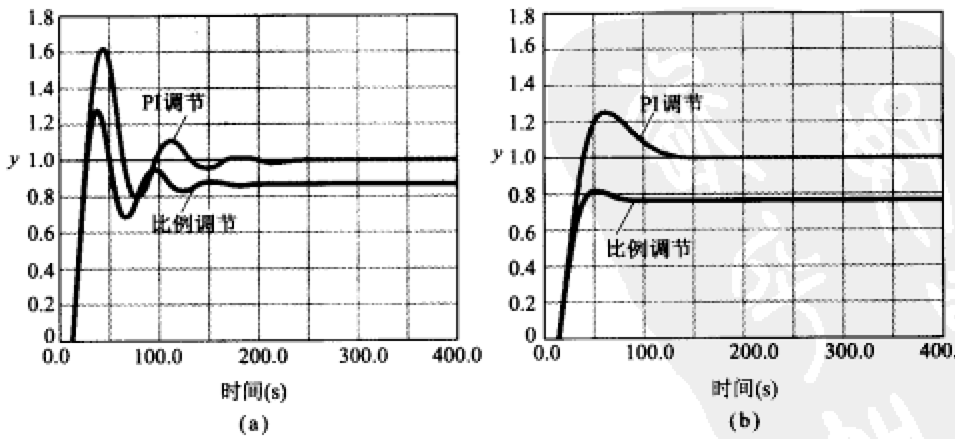


图 4-23　闭环阶跃响应

① PID 控制器的整定早在 1936 年就成为了一个研究的课题，直到今天也还有很多人员继续研究。例如这是一篇近期发表的文章：H. Panagopoulous, K. J. Åstroöm, and T. Hagglund, Proceedings of the American Control Conference, San Diego, CA, June 1999。

例 4.10 热交换器的整定:稳定边界法

对上例的热交换器使用比例反馈控制,直到系统对一个短脉冲输人的响应呈现出不衰减的振荡,图 4-24 是此时系统的振荡图像。临界比例增益是 $K_u=15.3$,临界周期测出为 $P_u=42$ s。用 Z-N 法则的稳定边界法设计比例调节器和 PI 调节器,并画出相应的阶跃响应曲线。

解:根据表 4-3 可得

比例调节器:$k_p=0.5K_u=7.65$

PI 调节器:$k_p=0.45K_u=6.885$,$T_I=\frac{1}{1.2}P_u=35$

闭环系统的阶跃响应曲线如图 4-25a 所示。显然,系统的响应与例 4.9 所得的响应曲线非常接近。同样,如果我们把 k_p 缩小一半,则超调量也会大大减小,如图 4-25b 所示。

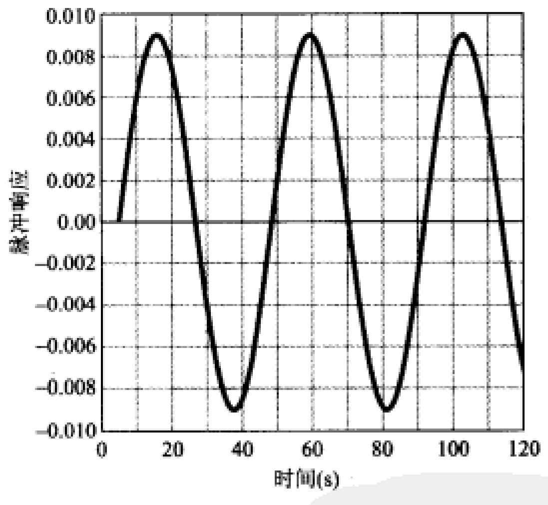


图 4-24 热交换器的临界周期

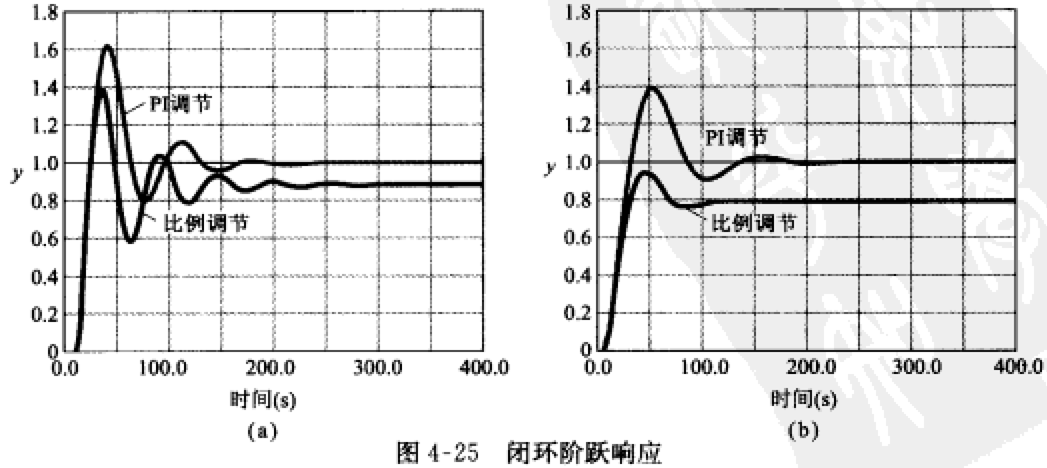


图 4-25 闭环阶跃响应

▲4.4.3 误差常数的 Truxal 公式

在这一章我们利用系统的传递函数得出了计算各型系统的误差常数的公式。实际应用中最常见的是1型系统，其误差常数 K_v为速度误差常数。Truxal(1955)推导出一种计算速度误差常数的方法，其计算公式只要求知道系统的闭环零极点，因此就把系统的稳态误差和动态响应联系了起来。因为控制系统的设计经常要考虑或进行折中的就是这两个特性，所以 Truxal 公式在这方面就显得比较重要了。公式的推导比较简单。假设1型系统闭环传递函数$\mathcal{T}(s)$ 以如下形式表示

$$\mathcal{T}(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \tag{4-111}$$

对于单位反馈系统(如果不是单位反馈系统，我们可以用4.2.2节的方法将系统化为单位反馈系统)，因为1型系统阶跃响应的稳态误差是0，所以直流增益为1，即

$$\mathcal{T}(0)=1 \tag{4-112}$$

系统误差为

$$E(s)\triangleq R(s)-Y(s)=R(s)\left[1-\frac{Y(s)}{R(s)}\right]=R(s)[1-\mathcal{T}(s)] \tag{4-113}$$

对于单位斜坡输入，系统的误差为

$$E(s)=\frac{1-\mathcal{T}(s)}{s^2} \tag{4-114}$$

应用终值定理，得到

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}\frac{1-\mathcal{T}(s)}{s} \tag{4-115}$$

根据洛必达法则，上式可化为

$$e_{ss}=-\lim_{s\to0}\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}s} \tag{4-116}$$

即

$$e_{ss}=-\lim_{s\to0}\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{K_v} \tag{4-117}$$

式(4-117)表示，$1/K_v$与传递函数在原点的斜率有关，在6.1.2节我们还会得到同样的结果。又由式(4-112)，我们可以把式(4-117)改写成

$$e_{ss}=-\lim_{s\to0}\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{\mathcal{T}} \tag{4-118}$$

即

$$e_{ss}=-\lim_{s\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\ln\mathcal{T}(s)] \tag{4-119}$$

将式(4-111)代入式(4-119)，我们得到

$$e_{ss}=-\lim_{s\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\ln\left[K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}\right]\right\} \tag{4-120}$$

$$=-\lim_{s\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[K+\sum_{i=1}^{m}\ln(s-z_i)-\sum_{i=1}^{n}\ln(s-p_i)\right] \tag{4-121}$$

即

$$\frac{1}{K_v}=\left|-\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}=\sum_{i=1}^{n}-\frac{1}{p_i}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{z_i} \tag{4-122}$$

由式(4-122)，随着系统闭环极点远离原点，K_v将不断增大。对于其他误差系数，我们同样会得到类似的关系，这些留在本章的习题中进行讨论。

例 4.11 Truxal 公式

三阶 1 型系统有闭环极点$-2\pm2\mathrm{j}$和-0.1。系统只有一个闭环零点。如果要求$K_v=10$，请问零点应为多少?

解：由 Truxal 公式，有

$$\frac{1}{K_v}=-\frac{1}{-2+2\mathrm{j}}-\frac{1}{-2-2\mathrm{j}}-\frac{1}{-0.1}+\frac{1}{z}$$

即

$$0.1=0.5+10+\frac{1}{z}$$

因此，闭环零点应为$z=-0.1$。

▲4.4.4 时间响应对参数变化的灵敏度

我们已经研究了动态系统的稳态增益对系统误差的影响，证明了反馈控制减小系统误差的能力。既然很多控制特性都是在阶跃响应的基础上提出来的，那么系统的时间响应对参数变化的灵敏度也就有较高的研究价值。例如，通过观察灵敏度图我们可以得出，增加一个参数的值是否会增加或减小系统响应的超调量。① 以下的分析过程同时也是小信号线性化的很好的实例。

假设θ为系统的一个参数，我们研究系统输出$y(t,\theta)$的灵敏度。先计算当参数θ有一个小的扰动$\delta\theta$时系统受到的影响。根据泰勒展开式，我们得到系统的响应为

$$y(t,\theta+\delta\theta)=y(t,\theta)+\frac{\partial y}{\partial\theta}\delta\theta+\cdots \tag{4-123}$$

忽略上式的二阶以及更高阶的无穷小量，取其一阶近似得到系统参数扰动的影响

$$\delta y(t)=\frac{\partial y}{\partial\theta}\delta\theta \tag{4-124}$$

这个函数也可以由系统直接推导得出，Penkins 等人于 1991 年给出了相应的推导。假设系统的响应与参数θ是线性关系，因此总的传递函数$\mathcal{T}(s,\theta)$可以看作由一组子传递函数组成，而这些子传递函数以对参数θ的依赖性作为定义的标准。图 4-26 表示的是传递函数的框图，图中$T_{ij}(s)$表示上面定义的子传递函数。图中我们标出了参数θ及其输出信号Z。根据这个框图，我们立即可以写出Y和Z分别与参考输入的关系等式：

① 我们将在后面章节介绍，MATLAB 的根轨迹界面 rltool 可以作为设计者完成这项工作的计算机辅助工具。

$$Y = T_{11}R + T_{21}\theta Z \tag{4-125}$$

$$Z = T_{12}R + T_{22}\theta Z \tag{4-126}$$

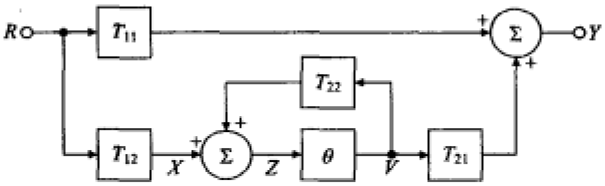


图 4-26　表示系统输出 y 对参数 θ 的依赖性的框图

在参数摄动作用下，方程成为

$$Y + \delta Y = T_{11}R + T_{21}(\theta + \delta\theta)(Z + \delta Z) \tag{4-127}$$

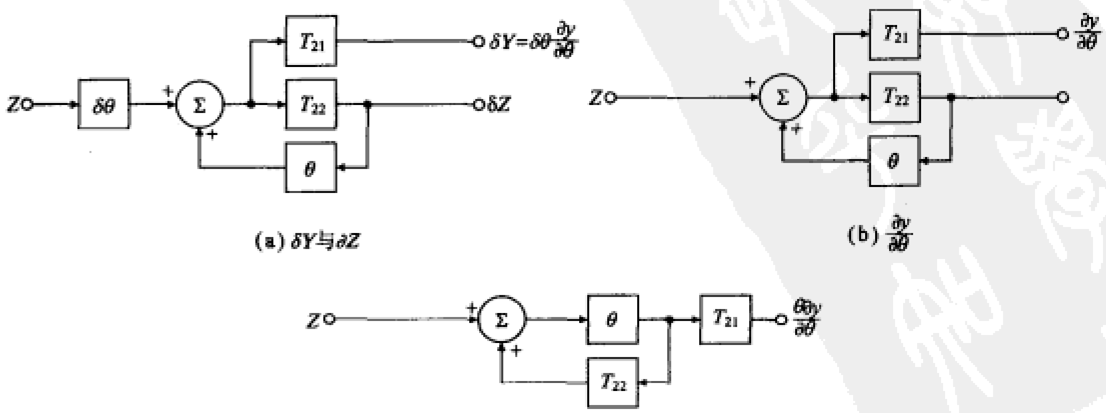
$$Z + \delta Z = T_{12}R + T_{22}(\theta + \delta\theta)(Z + \delta Z) \tag{4-128}$$

把上式的乘积项计算出来，忽略极小项 $\delta\theta\delta Z$，得到 Y 和 Z 的变化量

$$\delta Y = T_{21}(Z\delta\theta + \theta\delta Z) \tag{4-129}$$

$$\delta Z = T_{22}(Z\delta\theta + \theta\delta Z) \tag{4-130}$$

如果以框图来表示上述方程的解我们可能会更容易理解，如图 4-27a 所示。框图的输出是 $\delta Y = \frac{\partial y}{\partial \theta}\delta\theta$，注意图中的输入 Z 乘了一个增益 $\delta\theta$，因此，如果我们消去图中的 $\delta\theta$，则输出可以简化为 $\frac{\delta y}{\delta \theta}$，如图 4-27b 所示。最后，我们计算系统的灵敏度，并以参数改变量的百分数来考虑系统输出的变化，有 $\frac{\partial y}{\partial \ln\theta} = \frac{\frac{\partial y(t,\theta)}{\partial\theta}}{\frac{\partial \ln\theta}{\partial\theta}} = \theta\frac{\partial y}{\partial\theta}$，为此，我们只需将输入 Z 从 θ 框的输出断转移到输入端即可，如图 4-27c。现在我们给出系统最后转化成的框图，如图 4-28 所示。



(a) δY与∂Z　(b) $\frac{\partial y}{\partial\theta}$　(c) $\theta\frac{\partial y}{\partial\theta}$

图 4-27　框图的生成过程

图 4-28 很清楚地显示出，要计算系统输出对一个参数的灵敏度，我们需要模拟出两个系统。第一个系统的输入是系统的参考输入，第二个系统的输入是变量 Z，即原系统中参数 θ 框的输入。这样，我们很容易算出由参考输入到系统输出的传递函数的灵敏度为

$$\frac{T_{12}\theta T_{21}}{(1-\theta T_{22})^2} \tag{4-131}$$

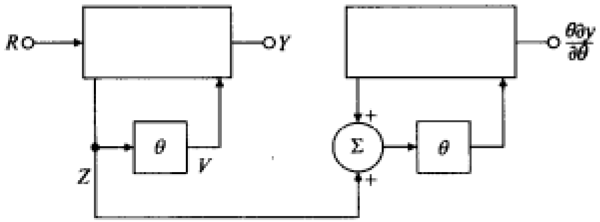


图 4-28 由原传递函数得到的计算 $\theta\frac{\partial y}{\partial\theta}$ 的框图

根据上式可以知道，要使系统的输出信号对参数变化的灵敏度比较低，则必须使含参数的反馈回路有较高的环路增益。

例 4.12 时域灵敏度

速度控制的例子由方程 4-28 描述，计算系统输出对控制增益 K_{cl} 的灵敏度。取各参数值为 $K_{cl}=9$，$\tau=0.01$，$A=1$。

解：为计算系统灵敏度，我们根据图4-24画出框图 4-29，然后应用 MATLAB 建立几个传递函数 $T_{ij}=\frac{n_{ij}}{d_{ij}}$，并应用式(4-131)计算系统灵敏度。为了作比较，我们同时计算图 4-26所示系统的响应以及当参数改变 10%时系统的响应。计算过程的 MATLAB 指令如下：

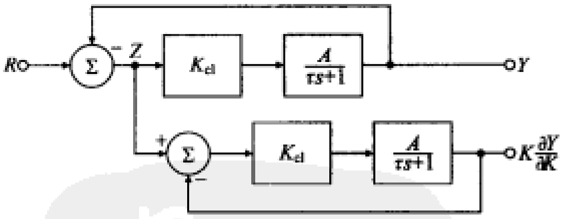


图 4-29 速度控制系统框图：用于计算系统输出的灵敏度

```
% script to compute sensitivity for Fig. 4.29
% First input the data for the component transfer functions Tij
% and the nominal parameter, Kcl for this problem
Kcl = 9; tau = .01;
n11 = 0; d11 = 1;
n12 = 1; d12 = 1;
n22 = [0 -1]; d22 = [tau 1];
n21 = 1; d21 = [tau 1];
% Now compute the numerator and denominator polynomials of the transfer
% functions using the convolution function conv to multiply the polynomials
```

```
% and put them into system transfer function forms with the MATLAB function tf.
% The overall transfer function is
% Y/R = n11/d11 + (n12*n21* d22)/(d12*d21* [d22-Kcl*n22]) = sysy①
% The transfer function from the reference input to the sensitivity is
% Kcl*(dy/dKcl)/R = sysdy
% Now define the numerators and denominators of several intermediate
% intermediate transfer functions
n1 = Kcl*conv(n21,n12);
d1 = conv(d21,d12);
n2 = d22;
d2 = [d22-Kcl*n22];
ny = conv(n1,n2);
dy = conv(d1,d2);
% Now put these together to form two intermediate transfer functions
sysy1 = tf(ny,dy);
sysy2 = tf(n11,d11);
% Now construct the final transfer functions
% The overall transfer function Y/R
sysy = sysy1+sysy2;
% The sensitivity transfer function
ndy = conv(ny,n2);
ddy = conv(dy,d2);
sysdy = tf(ndy,ddy);
% Now use these to compute the step responses and
% plot the output, the sensitivity and a perturbed response
[y,t] = step(sysy);
[yd,t] = step(sysdy);
plot(t,[y yd y+.1*yd]);
```

这些指令可以用于计算任何系统的灵敏度，但要给出相应的系统传递函数，并给出上述程序的具体输入数据。图 4-30 是这个例子的输出曲线灵敏度曲线以及参数改变 10%以后系统输出的结果。

---

① 经过验证，原文的注释语句是错误的，应增加 Kcl 项。原书为：Y/R＝n11/d11＋(n12 * n21 * d22)/(d12 * d21 * [d22－Kcl * n22])＝sysy。——译者注

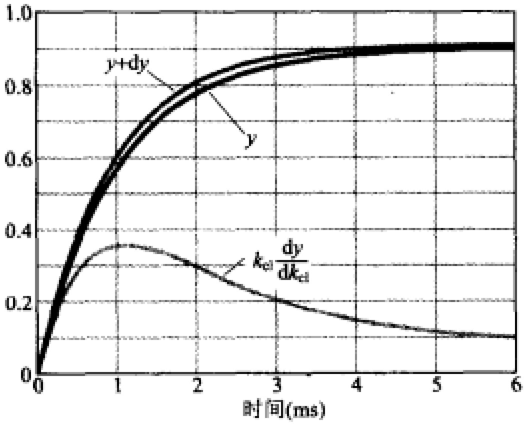


图 4-30 速度控制系统的输出、灵敏度，以及参数改变 10%后的输出曲线

小结

- ☐ 通过定义环路增益 L、灵敏度函数 S，以及补灵敏度函数$\mathcal{T}$，可以简洁地表示反馈系统的误差。
- ☐ 和开环系统相比，加入反馈可以减小系统对干扰的稳态误差，降低系统对参数变化的灵敏度，并提高动态响应的速度。
- ☐ 传感器噪声的存在，造成减小由设备干扰引起的误差和减小由传感器噪声引起的误差之间的矛盾。
- ☐ 给系统划分的类型（k 型）表明在低于 k 次的多项式信号输入的作用下，系统能够达到 0 稳态误差的能力。我们称一个稳定的单位反馈系统对于参考输入的作用是 k 型系统，如果系统的环路增益 L 有 k 个零极点，即可以写成如下形式

$$L(s)=\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^k(s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

误差常数为

$$K_k=\lim_{s\to 0}s^kL(s) \tag{4-132}$$

- ☐ 0 型、1 型和 2 型单位反馈系统对参考输入的稳态误差由表 4-1 给出。
- ☐ 通过计算系统对多项式干扰输入的误差，我们可以划分系统在抑制干扰方面的类型。如果系统对所有低于 k 次的多项式干扰输入的稳态误差都是 0，而对 k 次多项式输入的稳态误差不为 0，我们称系统对干扰输入是 k 型系统。
- ▲☐ 标准的 PID 控制器的描述方程如下：

$$U(s)=\left(k_p+\frac{k_I}{s}+k_Ds\right)E(s)$$

即

$$U(s)=k_p\left(1+\frac{1}{T_Is}+T_Ds\right)E(s)=D(s)E(s)$$

后一种形式是在过程控制工业中普遍应用的形式，同时也是很多系统的基本控制器形式。

- ☐ 增大比例反馈增益可以减小系统稳态误差，但太高的增益几乎都会引起系统不稳定。积分控制提高了系统减小稳态误差的鲁棒性，但通常会降低系统的稳定性。微分控制通常可以增大系统的阻尼并提高系统稳定性。这三种控制联合起来构成了典型的 **PID** 控制器。
- ▲☐ 整定 **PID** 控制器参数的方法由表 4-2 和表 4-3 列出。
- ☐ 描述数字控制器的差分方程可以由给定模拟控制器的传递函数得到：首先用 $\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$代替模拟控制器的传递函数中的 s，然后将 z 看作前移算子进行相关运算，这是因为如果 $U(z)$ 对应 $u(kT_s)$，则 $zU(z)$ 对应 $u(kT_s+T_s)$。
- ☐ 应用 c2d 指令，MATLAB 可以计算系统的离散化方程。

复习题

1. 指出在控制中应用反馈的四个优点。
2. 指出在控制中应用反馈的两个缺点。
3. 一个温度控制系统在恒定输入的作用下误差为 0，在随时间线性变化的输入作用下有 0.5 ℃的误差，上升速率为 40 ℃/s。该控制系统属于什么系统类型，以及相关的误差常数属于什么误差常数[K_p或 K_v或其他]?
4. K_p、K_v和 K_a的单位是什么？
5. 关于参考输入的系统类型如何定义？
6. 关于干扰输入的系统类型如何定义？
7. 为什么系统类型与外部信号进入系统的位置相关？
8. 引进积分控制的主要目的是什么？
9. 加入微分控制的主要目的是什么？
10. 为什么设计者可能希望将微分项置于反馈回路而不是误差回路中？
11. 给出三个使用数字控制器而不使用模拟控制器的原因。
12. 指出两个使用数字控制器的缺点。
13. 在式(4-87)中，如果积分近似可以用高为 $e(kT_s)$、底为 T_s的矩形面积代替，请以离散算子 z 表示拉普拉斯算子 s。

习题

4.1 节习题：控制的基本方程

4-1　系统如图 4-5 所示，图中 D 是控制器的恒定增益，G 是被控过程的恒定增益，各参数值为：$D=5$，$G=7$。假设在控制信号 u 进入被控过程之前加入了恒定干扰 w。

(a) 计算由 w 到 y 的增益，用 D 和 G 表示。

(b) 假设系统设计者已经知道，将系统环路增益 DG 放大 6 倍后系统的各项指标仍然能够实现。如果以最大限度地减小由干扰引起的系统误差 $r-y$ 为目的，请问这 6 倍的额外增益应该置于系统的什么位置？例如，D 或 G 其中之一都可以放大 6 倍，或者 D 放大 2 倍，G 放大 3 倍，以此类推。哪种选择是最好的？

4-2 Bode 定义传递函数 G 对其参数 k 的灵敏度函数为：k 改变的百分数与在 k 变化的作用下 G 改变的百分数之比。我们定义 Bode 函数的倒数为

$$S_k^G=\frac{\mathrm{d}G/G}{\mathrm{d}k/k}=\frac{\mathrm{d}\ln G}{\mathrm{d}\ln k}=\frac{k}{G}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}k}$$

这样，当 k 改变一定的百分比时，S 给出了 G 改变的百分比。在设计控制系统时，我们通常关心的是频率为 0(即 $s=0$)时的系统灵敏度。这个习题的目的是检验反馈对灵敏度的影响。我们比较图 4-31 所示的三种拓扑结构，每个图都表示由三级增益为 $-K$ 的放大器组成一个增益为 (-10) 的信号放大器。

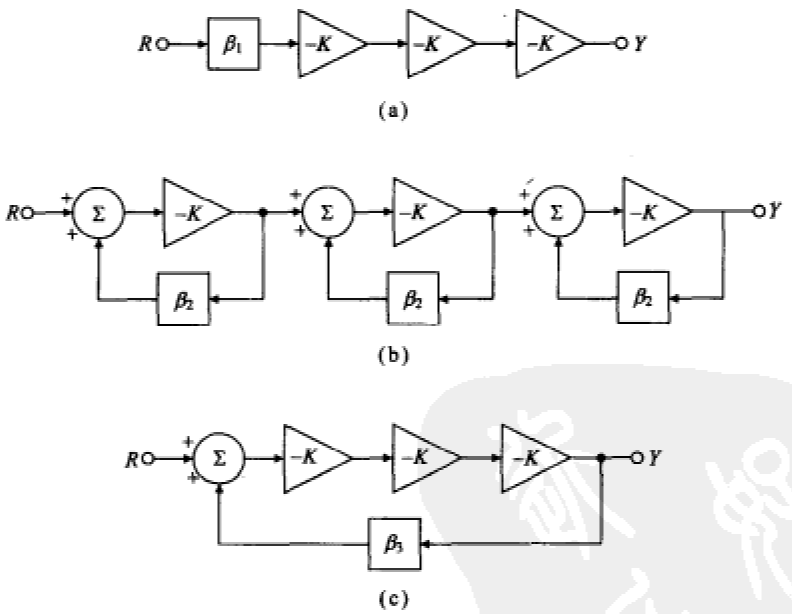


图 4-31 三个放大器的拓扑结构(题 4-2)

(a) 对图 4-31 中的每个结构，如果 $K=10$，计算 β_i 使系统满足 $Y=-10R$。

(b) 对每个结构计算 S_K^G，其中 $G=Y/R$[利用(a)计算出的 β 值]。请问哪种情况下的灵敏度最小？

(c) 计算图 4-31b 和图 4-31c 的系统对 β_2 和 β_3 的灵敏度。运用你得到的结果，讨论对传感器和执行器的精度要求。

4-3 比较图 4-32 的两个系统结构灵敏度，计算当放大器增益改变时系统总增益的变化量。应用以下关系

$$S=\frac{\mathrm{d}\ln F}{\mathrm{d}\ln K}=\frac{K}{F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}K}$$

作为标准。选择 H_1 和 H_2 以使系统的标称值输出满足 $F_1=F_2$，并假设 $KH_1>0$。

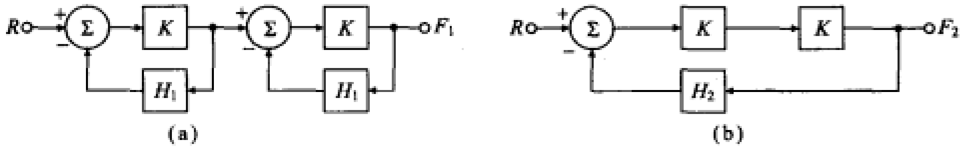


图 4-32　题 4-3 的框图

4-4　单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{A}{s(s+a)}$$

(a) 计算系统闭环传递函数对参数 A 变化的灵敏度。

(b) 计算系统闭环传递函数对参数 a 变化的灵敏度。

(c) 如果反馈回路的单位增益变成另一个值 $\beta\neq1$，计算系统闭环传递函数关于 β 的灵敏度函数。

(d) 假设 $A=1,a=1$，用 MATLAB 的半对数命令，画出以上各灵敏度函数对 $s=j\omega$ 的值。讨论参数 Aa 和 β 的变化在不同频率 ω 时对系统的影响，特别注意直流($\omega=0$)的情形。

4.2 节习题：稳态误差的控制

4-5　二阶设备

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(5s+1)}$$

(a) 当系统采用 P、PD 和 PID 控制器时(系统结构见图 4-5)，确定系统关于多项式参考输入的系统类型及误差常数。其中令 $k_p=19,k_I=0.5,K_D=\frac{4}{19}$。

(b) 采用与(a)相同的控制器，确定系统关于干扰输入的系统类型及误差常数，其中，多项式干扰 $w(t)$ 在设备的输入端进入系统。

(c) 该系统跟随参考信号的能力更好还是抑制干扰的能力更好？简单给出理由。

(d) 用 MATLAB 分别画出系统跟随参考输入和抑制干扰信号的阶跃响应和斜坡响应，验证(a)和(b)的结论。

4-6　系统设备的传递函数为 $G(s)=1/s(s+1)$。要求加入一个动态控制器，使得 $\omega_n=2$ rad/s，$\zeta\geqslant0.5$。下面给出了几个动态控制器：

(1) $D(s)=(s+2)/2$

(2) $D(s)=2\,\frac{s+2}{s+4}$

(3) $D(s)=5\,\frac{(s+2)}{s+10}$

(4) $D(s)=5\,\frac{(s+2)(s+0.1)}{(s+10)(s+0.01)}$

(a) 对以上各控制器，用 MATLAB 比较在参考阶跃输入的作用下，系统的瞬时和稳态响应。哪个控制器可以使系统的上升时间最小并且超调量最小？

(b) 对斜坡参考输入，哪个系统的稳态误差最小？

(c) 比较各系统的最大控制作用，也就是计算在单位阶跃的参考输入作用下，设备输入信号 $u(t)$ 的最大值。

(d) 根据你在(a)到(c)得到的结果，从以上四个选项中选择一个对系统最合适的控制器。

4-7 某控制系统有以下特性：上升时间 $t_r \leqslant 0.010$ s，超调量 $M_p \leqslant 16\%$，单位斜坡响应的稳态误差 $e_{ss} \leqslant 0.005$。

(a) 在 s 平面上简略画出系统主二阶极点可以配置的区域，以满足系统的要求。

(b) $Y/R = G/(1+G)$，为使闭环系统满足题设特性，$G(s)$ 在接近 $s=0$ 的区域必须满足什么条件；也就是说 $G(s)$ 在低频处需要有什么响应特性？

4-8 考虑题 4-35 的系统，计算下面的稳态误差：

(a) 对单位阶跃参考输入；

(b) 对单位斜坡参考输入；

(c) 对单位阶跃干扰输入；

(d) 对单位斜坡干扰输入。

(e) 用 MATLAB 验证(a)、(b)和(c)的结果。请注意系统的斜坡响应可以由一辅助系统的阶跃响应获得，该辅助系统即在原系统的参考输入端加入一个积分器。

4-9 图 4-33 所示系统，证明系统属于 1 型系统，并计算 K_v。

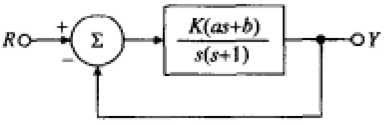


图 4-33 题 4-9 的控制系统

4-10 含有速度反馈的直流电机控制系统如图 4-34a 所示。

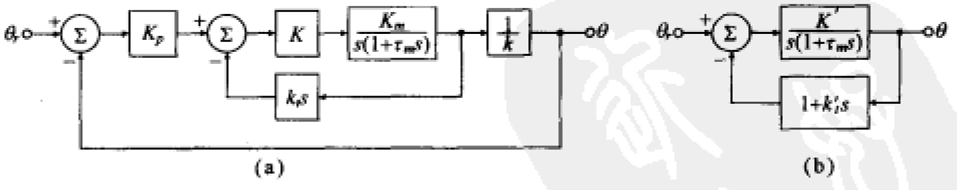


图 4-34 题 4-10 的控制系统

(a) 求出 K' 和 k'_t，使得图 4-34b 的系统和图 4-34a 的系统的传递函数相同。

(b) 确定系统关于 θ_r 的系统类型并计算系统误差常数 K_V，用参数 K' 和 k'_t 表示。

(c) 加入带正参数 k_t 的速度反馈后系统误差常数 K_V 是增大了还是减小了？

4-11 图 4-35 所示的系统，其中

$$D(s) = K\frac{(s+a)^2}{s^2+\omega_o^2}$$

(a) 证明如果系统是稳定的，则系统可以跟随正弦参考输入 $r=\sin\omega_o t$，稳态误差为 0。(注意由 R 到 E 的传递函数并考虑当频率为 ω_o 时的增益。)

(b) 如果 $\omega_o=1, a=0.25$，应用劳斯判据求出 K 的取值范围，以使闭环系统保持稳定。

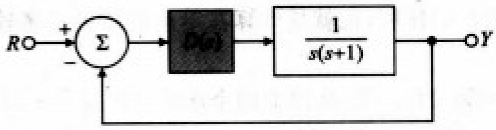


图 4-35 题 4-11 的控制系统

4-12 如图 4-36 所示的系统，控制对象为一个无阻尼的摆的角度。

(a) 要使系统在斜坡参考输入的作用下产生恒定的稳态误差，请问 $D(s)$ 必须要满足什么条件？

(b) 假设传递函数 $D(s)$ 满足系统的稳定性以及(a)的条件，请问系统能够抑制什么类型的干扰并实现稳态误差为 0？

(c) 试证明，虽然 PI 控制器能够满足(a)要求的条件，但它不能得到稳定的系统。PID 控制器能够满足(a)的条件并使系统稳定吗？如果可以，k_p、k_I 和 k_D 需要满足什么约束？

(d) 简单定性地讨论控制器参数 k_P、k_I 和 k_D 产生微小变动对系统阶跃响应的上升时间和超调量的影响。

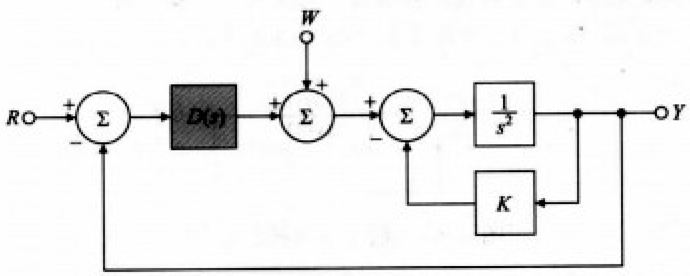


图 4-36 题 4-12 的控制系统

4-13 单位反馈系统的输入输出传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\mathcal{T}(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

给出系统对多项式参考输入的系统类型以及相关的误差常数，用 ζ 和 ω_n 表示。

4-14 一个二阶系统

$$G(s)=\frac{1}{s^2+2\zeta s+1}$$

我们要将传递函数 $D(s)=K(s+a)/(s+b)$ 与 $G(s)$ 级联起来构成单位反馈的结构。

(a) 不考虑稳定性，为使系统为 1 型系统，K、a 和 b 要满足的约束条件是什么？

(b) 如果考虑系统稳定性，为使系统为 1 型系统，K、a 和 b 要满足的约束条件是什么？

(c) 为使系统为 1 型系统，并且对所有正的 K 值都稳定，则 K、a 和 b 要满足的约束条件又是什么？

4-15 在电动机位置控制系统中，被控设备的传递函数由下式给出

$$G(s)=\frac{A}{s(s+a)}$$

如果我们可以选择参数 A 和 a 的值，那么它们等于多少可以使系统的 $K_v=20$，$\zeta=0.707$ 。

4-16 系统如图 4-37a 所示。

(a) 系统属于什么类型？当输入为斜坡信号 $r(t)=r_0t1(t)$，计算系统的稳态跟随误差。

(b) 更改后的系统如图 4-37b 所示，求使系统对参考输入为 2 型系统的 H_f 值，并计算误差常数 K_a。

(c) 系统属于 2 型系统的性质对 H_f 的变化是否具有鲁棒性(例如，如果 H_f 发生轻微变化系统是否仍然是 2 型的)？

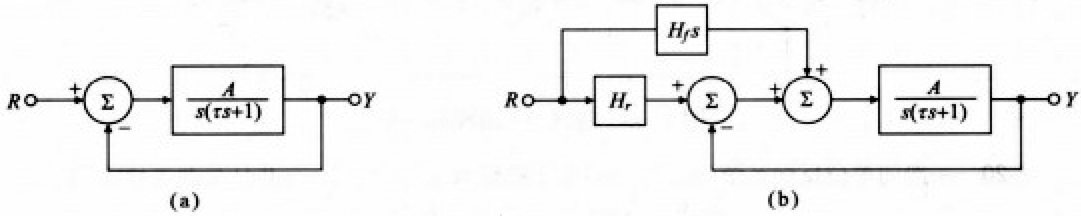


图 4-37 题 4-16 的控制系统

4-17 一个人造卫星运行姿态的控制系统，已知受控对象的传递函数为 $G=1/s^2$，采用单位反馈控制结构，控制器传递函数为 $D(s)=\dfrac{10(s+2)}{s+5}$。

(a) 求出系统对参考输入的系统类型以及相应的误差常数。

(b) 如果有一个干扰转矩加在控制信号中，因此进入被控过程的信号为 $u+w$，求出系统对干扰的系统类型以及相应的误差常数。

4-18 电动机位置补偿控制系统如图 4-38 所示。假设传感器的动态特性为 $H(s)=1$。

(a) 系统能够跟随阶跃参考输入 r 并使稳态误差为 0 吗？如果可以，给出速度误差常数的值。

(b) 系统能够抑制阶跃干扰信号 w 并使稳态误差为 0 吗？如果可以，给出速度误差常数的值。

(c) 如果系统设备的极点 −2 发生变化，计算系统闭环传递函数的灵敏度。

(d) 在一些情况下，传感器有具体的动态特性。取 $H(s)=20/(s+20)$，重新计算(a)、(b)和(c)，并比较相应的速度误差常数。

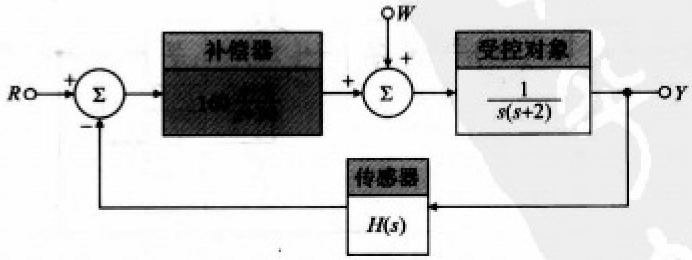


图 4-38 题 4-18 的控制系统

4-19 PI 控制系统如图 4-39 所示。

(a) 确定由 R 到 Y 的传递函数。

(b) 确定由 W 到 Y 的传递函数。

(c) 为使系统稳定，用劳斯判据求出(k_P, k_I)的取值范围。

(d) 求出系统对参考输入的系统类型以及相应的误差常数。

(e) 求出系统对干扰的系统类型以及相应的误差常数。

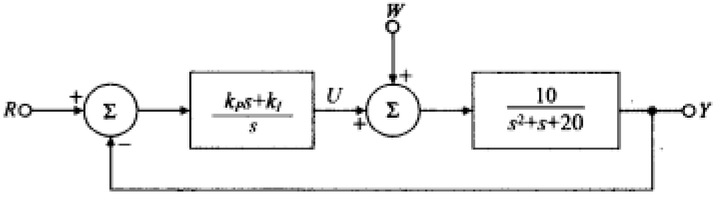


图 4-39　题 4-19 的控制系统

4-20　一般的单位反馈系统(见图 4-40)有干扰输入 w_1、w_2 和 w_3，并且是渐进稳定的。

$$G_1(s)=\frac{K_1\prod_{i=1}^{m_1}(s+z_{1_i})}{s^{l_1}\prod_{i=1}^{m_1}(s+p_{1_i})},\quad G_2(s)=\frac{K_2\prod_{i=1}^{m_2}(s+z_{2_i})}{s^{l_2}\prod_{i=1}^{m_2}(s+p_{2_i})}$$

证明系统对干扰输入 w_1，w_2 和 w_3 分别是 0 型、l_1 型和(l_1+l_2) 型系统。

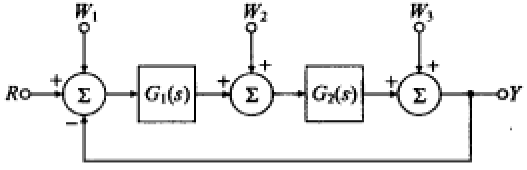


图 4-40　有干扰输入的单输入单输出单位反馈系统

4-21　某个采用积分控制的汽车速度控制系统如图 4-41 所示。

(a) 假设参考速度输入为 0($v_c=0$)，求输出速度 v 对气流干扰 w 的传递函数。

(b) 若 w 为单位斜坡函数，求系统输出 v 的稳态响应。

(c) 指出系统对参考输入的系统类型，并求出相应的误差常数值。

(d) 指出系统对干扰 w 的系统类型，并求出相应的误差常数。

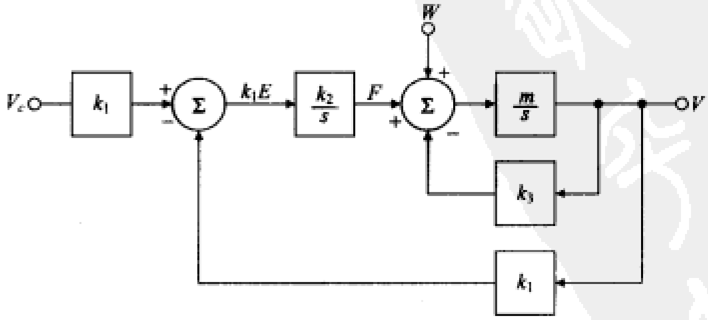


图 4-41　采用积分控制的系统

4-22　如图 4-42 所示的反馈系统，当 $K=5$ 时，求 α 的值使系统类型为 1 型。求出相应的速度误差常数。证明用这个 α 值的系统类型鲁棒性不好，计算当 $K=4$ 和 $K=6$ 时系统阶跃响应的误差 $e=r-y$。

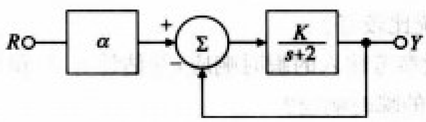


图 4-42 题 4-22 的控制系统

4-23 位置控制系统的闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_0 s+b_1}{s^2+a_1 s+a_2}$$

(a) 选择各参数(a_1,a_2,b_0,b_1)，以使系统满足以下特性：

i. 上升时间 $t_r<0.1$ s。

ii. 超调量 $M_p<20\%$。

iii. 调整时间 $t_s<0.5$ s。

iv. 阶跃响应的稳态误差为 0。

v. 对斜坡参考输入 0.1 m/s 的稳态误差不大于 1 mm。

(b) 通过 MATLAB 仿真证明你的结果。

4-24 给定系统如图 4-43a 所示，其中受控对象参数 a 常受到扰动。

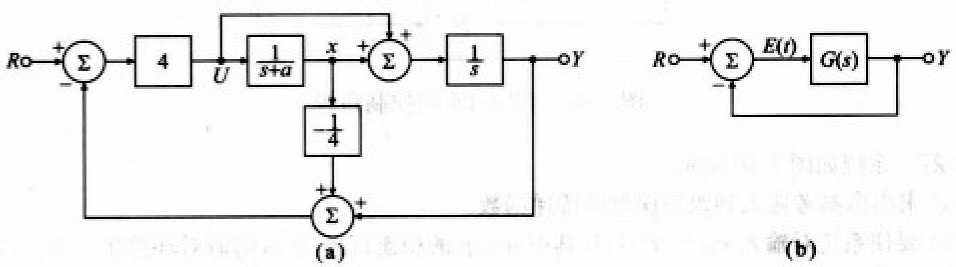


图 4-43 题 4-24 的控制系统

(a) 计算 $G(s)$，使图 4-43b 所示系统和图 4-43a 所示系统有相同的输入输出传递函数。

(b) 假设 $a=1$ 是受控对象参数的标称值。求出系统的类型以及误差常数。

(c) 假设 $a=1+\delta a$，式中 δa 表示受控对象参数的微小变化。求出摄动系统的系统类型以及误差常数。

4-25 两个反馈系统如图 4-44 所示。

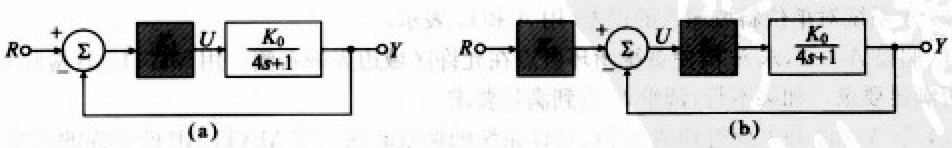


图 4-44 题 4-25 的两个反馈系统

(a) 确定 K_1，K_2 和 K_3 的值使系统满足：

i. 对阶跃输入的稳态误差都为 0(即两个系统都是 1 型系统)。

ii. 当 $K_0=1$ 时，系统速度误差常数为 $K_v=1$。

(b) 假设 K_0 产生微小摄动：$K_0\to K_0+\delta K_0$。这对系统的类型有什么影响？哪个系统的类型

具有鲁棒性？你认为哪个系统比较好？

(c) 估计两个系统对阶跃参考输入的瞬时响应，并估计 t_s、t_r 和 M_P。只考虑系统参数的标称值，你认为哪个系统具有较好的瞬时响应？

4-26　给定系统如图 4-45 所示，其中反馈增益 β 常受到扰动。试给系统设计一个控制器，使系统输出 $y(t)$ 精确地跟随参考输入 $r(t)$。

(a) 令 $\beta=1$，给定以下三种控制器 $D_i(s)$：

$$D_1(s)=k_p,\qquad D_2(s)=\frac{k_p s+k_I}{s},\qquad D_3(s)=\frac{k_p s^2+k_I s+k_2}{s^2}.$$

选择控制器(以及控制器参数)以使系统为 1 型系统，单位斜坡参考输入的稳态误差小于 $\frac{1}{10}$。

(b) 又假设在系统的反馈回路出现衰减，用图中的模型表示得到 $\beta=0.9$，对你在(a) 选择的 $D_i(s)$ 求出系统对斜坡输入的稳态误差。

(c) 如果 $\beta=0.9$，(b)中系统的系统类型是什么？相应的误差常数是多少？

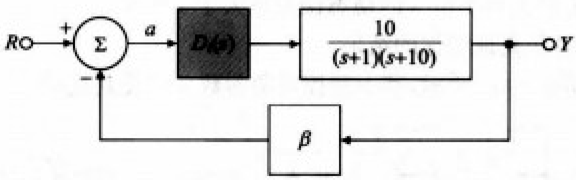


图 4-45　题 4-26 的控制系统

4-27　系统如图 4-46 所示。

(a) 求出由参考输入到跟踪误差的传递函数。

(b) 要使系统对输入 $r(t)=t^n1(t)$(其中 $n<q$)的稳态误差为 0，则需对环路极点 $P_1,P_2,\cdots,P_q$ 如何配置？

4-28　设计一个反馈控制系统(见图 4-47)，满足以下特性：(1)对斜坡参考输入的稳态误差低于 10%，(2)阶跃响应的最大超调量低于 5%，(3)1%的调整时间小于 3s。

(a) 计算闭环传递函数。

(b) 在复平面上简单画出系统闭环零点可以配置的区域。

(c) 特性(1)意味着 A 可能为何值？

(d) 特性(3)对闭环极点的要求是什么？

(e) 求系统对单位斜坡输入的误差，用 A 和 k_t 表示。

(f) 假设 $A=32$，求 k_t 值使系统闭环极点在允许区域边界的右侧。用 MATLAB 检验 k_t 的选择是否满足要求。如果不行，调整 k_t 直到满足要求。

(g) 令 $A=32$ 和上面得到的 k_t 值，估计系统的调整时间。用 MATLAB 验证你的答案。

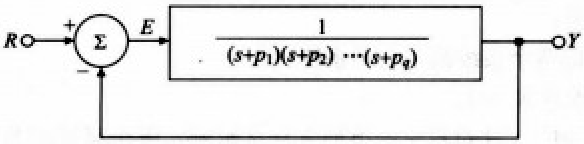


图 4-46　题 4-27 的控制系统

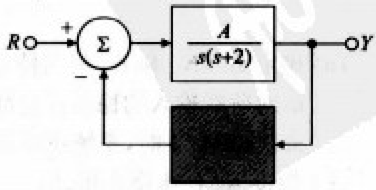


图 4-47　题 4-28 的控制系统

4-29 磁带驱动的速度控制系统传递函数由图 4-48 给出。其中速度传感器的响应速度足够快，可以忽略其动态过程，图中显示的是等效的单位反馈系统。

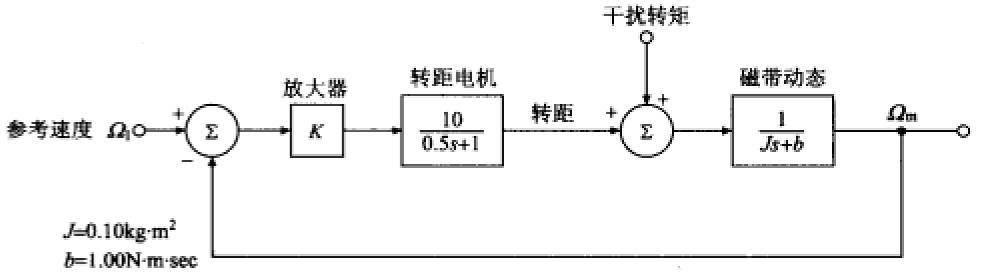


图 4-48 磁带驱动的速度控制系统

(a) 假设 $\omega_r=0$，求系统对阶跃干扰转矩 1N·m 的稳态误差。为使稳态误差 $e_{ss}\leqslant 0.001$ rad/s，放大器的增益 K 必须是多少？

(b) 在复平面上画出闭环系统的根，并用(a)中得出的 K 值，精确地画出系统对阶跃输入 ω_r 的时间响应 $\omega(t)$。这些根满足要求吗？为什么？

(c) 若要求 1%的调整时间 $t_s\leqslant 0.1$ s，超调量 $M_p\leqslant 5\%$，在复平面画出系统闭环极点应在的区域。

(d) 给出 PD 控制器的参数 k_p 和 k_D 以满足上述系统要求。

(e) 应用(d)的控制器后系统对干扰的稳态误差如何变化？怎样能够将干扰转矩引起的稳态误差完全抑制？

4-30 本章前面部分介绍了一个直流电机的线性 ODE 模型，电机的电枢电感可以忽略 ($L_a=0$)，干扰输入为 w。这里我们以稍微不同的形式重新介绍这个模型：

$$\frac{JR_a}{K_t}\ddot{\theta}_m+K_e\dot{\theta}_m=v_a+\frac{R_a}{K_t}w$$

其中 θ_m 单位为弧度。两边同时除以 $\ddot{\theta}_m$ 的系数，得到

$$\ddot{\theta}_m+a1\,\dot{\theta}_m=b_0v_a+c_0w$$

式中，

$$a_1=\frac{K_tK_e}{JR_a},\quad b_0=\frac{K_t}{JR_a},\quad c_0=\frac{1}{J}$$

应用旋转电位计我们可以测量角度 θ 和参考角度 θ_r 的偏差，即 $e=\theta_{ref}-\theta_m$。用测速器我们可以测量电机速度 $\dot{\theta}_m$. 对偏差 e 和电机速度 $\dot{\theta}_m$ 给系统加入反馈，形式如下：

$$v_a=K(e-T_D\dot{\theta}_m)$$

式中，K 和 T_D 是需要确定的控制器参数。

(a) 画出上述系统的框图，在图中用变量 θ_m 和 $\dot{\theta}_m$ 表示电机。

(b) 假设 $a_1=65, b_0=200, c_0=10$。如果没有负载转矩($w=0$)，$v_a=100$ V 能够产生多大的速度(单位：rpm)。

(c) 用(b)中的参数值，求 k_p 和 k_D，使系统在负载转矩为 0 时，对 θ_{ref} 的阶跃变化的瞬时响应有大约 17%的超调量，调整到小于稳态值 5%以内的时间小于 0.05 s。

(d) 推导系统对参考输入角度的稳态误差的表达式，假设 $\theta_{ref}=1$ rad，计算(c)设计的系统的稳态误差。

(e) 当 $\theta_{ref}=0$ 时，推导系统对恒定干扰转矩的稳态误差表达式。假设 $w=1.0$，计算(c)设计的系统的稳态误差。

4-31　为汽车设计一自动速度控制系统。假设(1)车的质量 m 为 1000 kg，(2)加速器给出控制 U，加速器每运动 1 度就给汽车提供 10 N 的压力，(3)空气阻力引起的摩擦力正比于速度，比例系数为 10 N·s/m。

(a) 求由控制输入 U 到汽车速度的传递函数。

(b) 假设速度的改变由下式给出

$$V(s)=\frac{1}{s+0.002}U(s)+\frac{0.05}{s+0.02}W(s)$$

式中 V 的单位是 m/s，U 的单位是度，W 是路面的坡度。设计一比例控制器 $U=-k_pV$，在坡度为恒定值 2%的时候，使速度误差小于 1 m/s。

(c) 讨论对这个问题采用积分控制的优点(如果有的话)。

(d) 假设纯比例控制(即没有比例项)对系统控制是有利的，选择反馈增益使特征方程的根具有临界阻尼($\zeta=1$)。

4-32　汽车速度控制系统如图 4-49 所示。

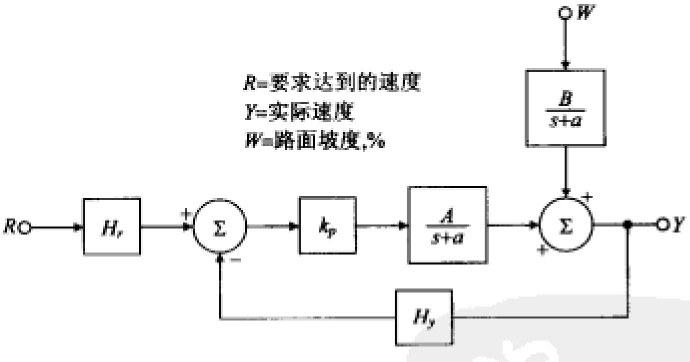


图 4-49　汽车速度控制系统

(a) 求由 $W(s)$ 到 $Y(s)$ 和由 $R(s)$ 到 $Y(s)$ 的传递函数。

(b) 假设要求达到的速度是恒定参考值 r_o，因为 $R(s)=r_o/s$。又假设路面是水平的，因为 $w(t)=0$。计算各增益 K、H_r 和 H_f 的值，满足

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=r_o$$

分别考虑开环($H_y=0$)和反馈($H_y\neq 0$)的情况。

(c) 假设系统除参考输入以外，还有坡度干扰 $W(s)=w_o/s$，重新计算(b)题。特别地，求出在坡度改变的情况下，前馈和反馈情形速度的变化量。运用你得到的结果解释：(1) 为什么反馈是必须的；(2) 如何 k_p 以减小稳态误差。

(d) 假设 $w(t)=0$，增益 A 产生微小变动成为 $A+\delta A$。求出在增益改变后前馈和反馈情形的速度误差。系统的各个增益参数又该如何选择以减小 δA 的影响？

4-33　系统的脉冲响应为 $h(t)$，证明速度误差常数可由下式计算

$$\frac{1}{K_v}=\int_0^{\infty} th(t)\mathrm{d}t$$

加速度误差常数由下式计算

$$\frac{1}{K_v} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty t^2 h(t)\mathrm{d}t$$

4-34　如图 4-50 所示的多变量系统。假设系统是稳定的。求出有各个干扰输入到各个输出的传递函数，并确定对恒定的干扰 y_1 和 y_2 的稳态值。我们定义一个多变量系统对 w_i 的多项式输入是 k 型系统，如果对低于 k 次的多项式信号的任意组合输入，系统的每个输出的稳态值都为 0，对 k 次的多项式信号输入，系统至少有一个输出的稳态值是非零常数。这样，该系统对干扰输入 w_1 和 w_2 的系统类型分别是什么？

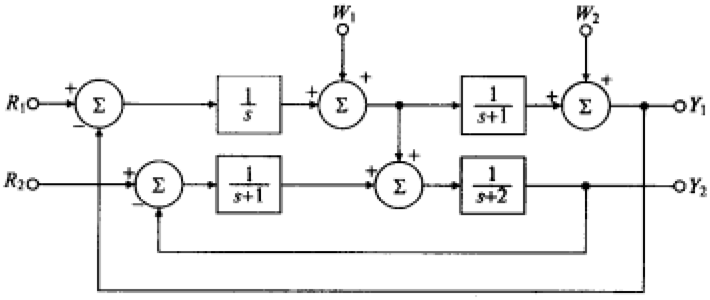


图 4-50　多变量系统

4.3 节习题：动态误差控制：PID 控制

4-35　直流电机速度控制系统（见图 4-51）由以下微分方程描述

$$\dot{y} + 60y = 600v_a - 1500w$$

式中，y 为电机速度，v_a 为电枢电压，w 为负载转矩。假设电枢电压用 PI 控制规则计算得出

$$v_a = -\left(k_p e + k_I\int_0^t e\mathrm{d}t\right),$$

其中，$e = r - y$。

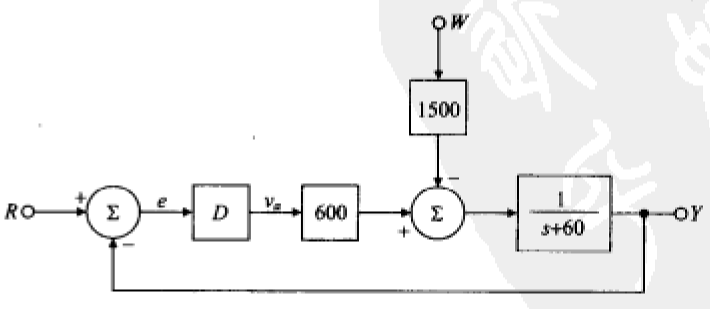


图 4-51　直流电机速度控制框图

（a）计算由 W 到 Y 的传递函数，用 k_p 和 k_I 表示。

（b）计算 k_p 和 k_I 的值，使闭环系统的特征方程的根为 $-60\pm60\mathrm{j}$。

4-36　如图 4-52 所示系统，由一个预滤波器和一个单位反馈系统构成。

（a）确定由 R 到 Y 的传递函数。

（b）确定系统对阶跃输入的稳态误差。

(c) 讨论(K_r, a)的不同值对系统响应的影响。

(d) 对以下三种情形：

(1) $A=1, \tau=1$；(2) $A=10, \tau=1$；(3) $A=1, \tau=2$，

用 MATLAB 求出 K_r和 a 的值，以满足(如果可以)

i. 上升时间小于 1.5s；

ii. 超调量小于 20%；

iii. 调整时间小于 10 s；

iv. 稳态误差小于 5%。

如果以上特性很容易实现，那么使上升时间尽可能小。如果以上要求不能满足，就按照上面所给的顺序尽可能多地实现各要求。

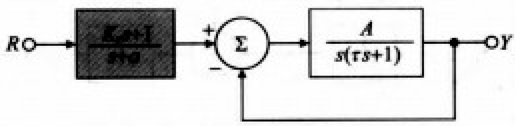


图 4-52　题 4-36 的单位反馈系统

4-37　人造卫星飞行姿态的控制问题如图 4-53 所示，各参数的标称值如下：

$J=$ 10 航天器惯量，N·m·s^2/rad；

$\theta_r=$ 参考人造卫星飞行姿态，rad；

$\theta=$ 实际人造卫星飞行姿态，rad；

$H_y=$ 1 传感器比例因子，V/rad；

$H_r=$ 1 参考传感器比例因子，V/rad；

$w=$ 干扰转矩，N·m。

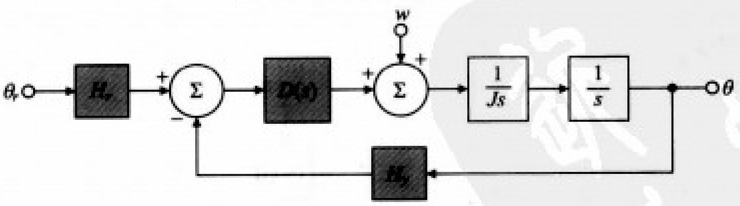


图 4-53　人造卫星飞行姿态控制

(a) 采用比例控制 P，$D(s)=k_p$，求出使系统稳定的取值范围。

(b) 采用 **PD** 控制，令 $D(s)=(k_p+k_D s)$，确定系统对参考输入的系统类型和误差常数。

(c) 采用 **PD** 控制，令 $D(s)=(k_p+k_D s)$，确定系统对干扰输入的系统类型和误差常数。

(d) 采用 **PI** 控制，令 $D(s)=(k_p+k_I/s)$，确定系统对参考输入的系统类型和误差常数。

(e) 采用 **PI** 控制，令 $D(s)=(k_p+k_I/s)$，确定系统对干扰输入的系统类型和误差常数。

(f) 采用 **PID** 控制，令 $D(s)=(k_p+k_I/s+k_D s)$，确定系统对参考输入的系统类型和误差常数。

(g) 采用 **PID** 控制，令 $D(s)=(k_p+k_I/s+k_D s)$，确定系统对干扰输入的系统类型和误差常数。

▲4.4 节习题：基本反馈概念的扩展

▲4-38 计算习题 4-6 的控制器的等效离散控制器，应用式(4-93)的梯形准则。令 $T_s=0.05$：

(a) $D_1(s)=(s+2)/2$

(b) $D_2(s)=2\dfrac{s+2}{s+4}$

(c) $D_3(s)=5\dfrac{(s+2)}{s+10}$

(d) $D_4(s)=5\dfrac{(s+2)(s+0.1)}{(s+10)(s+0.01)}$

▲4-39 求出与题 4-38 各离散控制器相对应的差分方程

(a) 对 $D_1(s)$。

(b) 对 $D_2(s)$。

(c) 对 $D_3(s)$。

(d) 对 $D_4(s)$。

▲4-40 一台造纸机的单位阶跃响应如图 4-54a 所示，其中系统的输入是流到造纸网上的原材料，输出是基本重量(厚度)。延迟时间和瞬时响应的斜率可由图中确定。

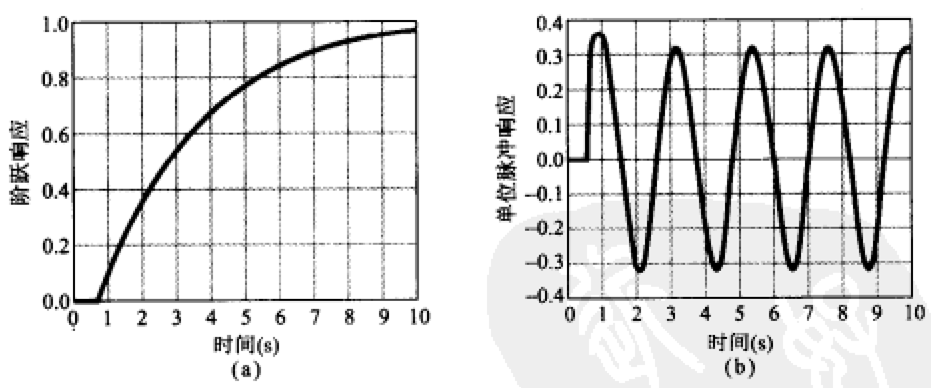


图 4-54 造纸机响应数据

(a) 用 Z-N 动态响应法求出比例、PI 和 PID 控制器的参数。

(b) 用比例反馈控制，控制设计者已经得到闭环系统的单位脉冲响应，如图 4-54b 所示。此时增益 $K_u=8.556$，系统处于稳定边缘。用 Z-N 的稳定边界法确定比例、PI 和 PID 控制器的参数。

▲4-41 已知造纸机的传递函数

$$G(s)=\frac{e^{-2s}}{3s+1}$$

其中输入是流到造纸网上的原材料，输出是基本重量或厚度。

(a) 用 Z-N 整定法确定 PID 控制器的参数。

(b) 当 $K_u=3.044$ 时，系统刚好处于临界稳定状态，单位脉冲响应见图 4-55。用Z-N整定法

求出 PID 控制器的最佳参数。

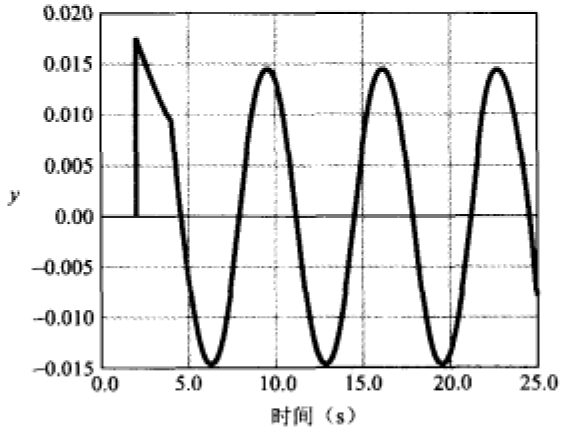


图 4-55　造纸机的单位脉冲响应　（题 4-55）

▲**4-42**　证明 2 型系统的加速度误差常数可由下式计算

$$\frac{1}{K_a}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{z_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i^2}\right)$$

式中，z_i 和 p_i 分别表示闭环零点和闭环极点。

▲**4-43**　一个单位反馈系统，采用比例控制，$D=k_p$，过程传递函数为 $G(s)=\frac{A}{s(\tau s+1)}$。

(a) 如果要计算在阶跃参考输入下，系统输出响应对参数 τ 变化的灵敏度，请画出用于计算该灵敏度的框图。

(b) 如果 $A=\tau=k_p=1$，根据由(a)得到的框图，用 MATLAB 计算并画出系统灵敏度。

第 5 章　根 轨 迹 法

根轨迹法介绍

在第 3 章中我们叙述了阶跃响应的特征，如上升时间、超调量和调整时间。由于二阶系统传递函数的极点配置取决于系统的固有频率(ω_n)、阻尼比(ζ)和特征根的实部(σ)。我们也考查了给特征方程增加极点或零点时的系统的暂态响应变化。在第 4 章中我们看到，通过反馈可以改善系统稳态误差，还可以通过改变系统极点配置来影响动态响应。在这一章中我们将会介绍一项特殊的技术，这种技术将展示通过修改系统的参数会如何改变闭环系统的特征根进而影响系统的动态响应。这就是所谓的根轨迹法，是由伊凡思(W. R. Evans)发展起来的，他给出了绘制**根轨迹**(**Root locus**)的方法，并首先命名了它。随着相关仿真软件以及 MATLAB 的发展，这些手工描绘根轨迹的详细规则已经不那么重要了，但是我们认为对于一个控制系统设计者来说，当他想要去理解所提出的动态补偿法是怎么影响根轨迹或者要草绘一条根轨迹来指导设计过程的时候，这些规则还是很必要的。基于这样的考虑，学习伊凡思的根轨迹法还是很重要的。

根轨迹法通常用于研究环路增益变化时所带来的影响，事实上，这种方法比较常用，而且可以用于描述引入线性实参数的多项式的根。例如用于绘制参数改变的特征方程的特征根，而这个参数可能是速度反馈传感器的增益，或者其他的实际物理参数如电机转动惯量、电枢电感等。总之，根轨迹法可以刻画用 z 变换描述的数字控制系统的特征方程，z 变换这一内容，我们在第 4 章中已经介绍过，在第 8 章中有更深入的讨论。

全章概述

在 5.1 节中，我们将通过列举一些简单反馈系统的根轨迹，来开始我们的介绍。而在 5.2 节中我们将看到怎样一步步把一个方程变换为适合于绘制根轨迹的适当形式和一些有助于画图的重要规则。在 5.3 节中，这些步骤用于粗略描绘一些典型控制系统的根轨迹，以观察影响最终轨迹的因素，MATLAB 可以用于细致地描绘特殊的根轨迹。在 5.4 节中，我们将会讨论怎样选择特殊的参数值来改变系统极点配置以获得期望的系统动态性能，MATLAB 在这一过程中会提供许多很有用的帮助。但是当单

独调整选定参数不能满足设计要求时，可以考虑研究其他参数或者使用5.5节介绍的动态品质调整方法（比如超前补偿、滞后补偿或超前滞后补偿）来达到设计要求。在接下来的5.6节中，将通过一个小型飞机姿态控制的例子来阐述如何使用根轨迹法。最后，在5.7节中，根轨迹法将进一步推广到负参数系统、多参数系统和简单时滞系统的设计中。

5.1　基本反馈系统的根轨迹

我们从图5-1中的基本反馈系统开始根轨迹法的介绍，对于这个系统，其闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=T(s)=\frac{D(s)G(s)}{1+D(s)G(s)H(s)} \tag{5-1}$$

特征方程为

$$1+D(s)G(s)H(s)=0 \tag{5-2}$$

其特征根也就是传递函数的极点。

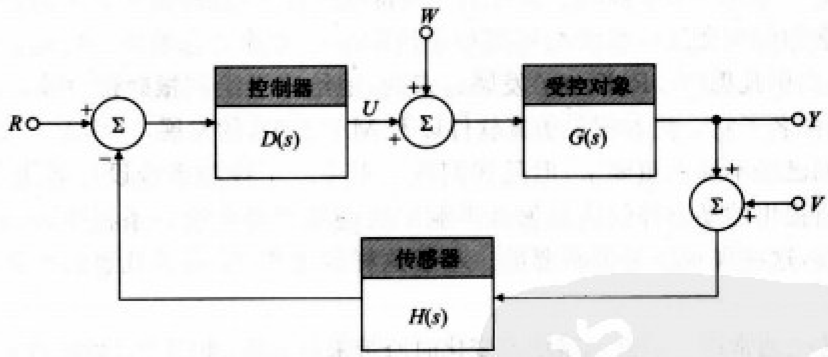


图5-1　基本闭环系统的框图

把这个方程转换成适合于以方程的根作为参数的形式来进行研究。首先把方程化为多项式的形式，然后选择一个我们感兴趣的参数并称之为 K。假定我们可以找到子多项式 $a(s)$ 和 $b(s)$，将特征多项式化为 $a(s)+Kb(s)$ 的形式，再定义传输函数 $L(s)=\dfrac{b(s)}{a(s)}$，这样上面的特征方程可以写为①：

$$1+KL(s)=0 \tag{5-3}$$

假设（通常也是这样）这个参数是控制器的增益，而 $L(s)$ 是 $D(s)G(s)H(s)$ 的最简分数，Evans 建议我们绘制出式(5-3)的所有根随 K 从0变化到无穷过程中的轨迹，然后使用所得的结果来帮助我们选择最好的 K 值，除此之外，通过研究根轨迹中增加

① 在通常情况下，$L(s)$ 是闭环系统的回路传递函数，K 是控制器增益。而根轨迹法很适合于能够化为式(5-3)形式的参数与系统。

零极点的作用，就可以确定对回路中 $D(s)$ 动态补偿的效果，这样我们就有了一个工具，不仅可以选择特殊的参数值，还可以调整动态补偿效果。式(5-3)中所有由 K 值决定的根的分布轨迹称为根轨迹，而那些用于构造这些根轨迹的规则，则称为 **Evans 根轨迹法(root-locus method of Evans)**。

我们从绘制一条根轨迹来展开对根轨迹法的讨论。这里要用式(5-3)形式的方程并以 K 为自变量，为了设置研究过程中所使用的符号，我们假定所研究的传输函数 $L(s)$ 是一个有理函数，分子为 m 次的**首一多项式**[①] $b(s)$，分母为 n 次的首一多项式 $a(s)$，则有 $n \geqslant m$，[②]

$$\begin{aligned} b(s) &= s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m \\ &= (s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m) \\ &= \prod_{i=1}^{m}(s-z_i) \\ a(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= \prod_{i=1}^{n}(s-p_i) \end{aligned} \tag{5-4}$$

分子 $b(s)=0$ 的根是传输函数 $L(s)$ 的**零点(zero)**，记为 z_i；分母 $a(s)=0$ 的根为 $L(s)$ 的**极点(pole)**，记为 p_i，特征方程的根依因式分解形式记为 $r_i(n>m)$，则

$$a(s) + Kb(s) = (s-r_1)(s-r_2)\cdots(s-r_n) \tag{5-5}$$

这样我们就可以把式(5-3)用更多、更易于使用的等价形式表达出来，注意下面几个多项式均具有相同的根：

$$1 + KL(s) = 0 \tag{5-6a}$$

$$1 + K\frac{b(s)}{a(s)} = 0 \tag{5-6b}$$

$$a(s) + Kb(s) = 0 \tag{5-6c}$$

$$L(s) = -\frac{1}{K} \tag{5-6d}$$

上面的式(5-6)通常被称为特征方程的**根轨迹形式(root-locus form)**或者 **Evans 形式(Evans form)**，所谓的根轨迹是指式(5-6)中由正实数 K[③] 决定的所有 s 值的集合，由于式(5-6)的根就是闭环系统特征方程的根，也是系统的闭环极点，因此根轨迹法也可视为通过参数 K 的变化来推断闭环系统动态性能的方法。

例 5.1　电机位置控制系统的根轨迹

在第 2 章中我们见到过一个标准的直流电机电压—位置传递函数为：

---

① 首一多项式(monic polynomial)意味着式中 s 次数最高项的系数为 1 。

② 如果 $L(s)$ 是一个实际系统的传递方程，就必然有 $n \geqslant m$，否则系统会对一个有限大的输入作出无限大的响应；如果选择参数使 $n<m$，那么我们可考虑等价的方程：$1+K^{-1}L(s)^{-1}=0$ 。

③ 如果 K 为正值，那么轨迹称为“正轨迹”，我们将在稍后来考虑其微小的差别。如果 K 为负值，则产生“负轨迹”。

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)}=\frac{Y(s)}{U(s)}=G(s)=\frac{A}{s(s+c)}$$

要求解系统闭环极点的根轨迹，如图 5-1 所示。将输出 $\Theta_m(s)$ 反馈至输入端来构造闭环系统，令与 A 相关的 $D(s)=H(s)=1$，也就是 $c=1$。

解：按照我们的符号表达法，求得

$$L(s)=\frac{1}{s(s+1)},\quad b(s)=1,\quad m=0,\quad z_i=\Phi$$

$$K=A,\quad a(s)=s^2+s,\quad n=2,\quad p_i=0,-1 \tag{5-7}$$

由式(5-6)，我们知道根轨迹是下面二次方程的根的图像

$$a(s)+Kb(s)=s^2+s+K=0 \tag{5-8}$$

使用二次方程的求根法则，我们可以很快求出式(5-8)的根为

$$r_1,r_2=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{1-4K}}{2} \tag{5-9}$$

相应的根轨迹图见图 5-2。当 $0\leqslant K\leqslant\frac{1}{4}$ 时，根为 $-1\sim0$ 之间的实数；当 $K=\frac{1}{4}$ 时，有重根 $-\frac{1}{2}$；当 $K>\frac{1}{4}$ 时，根为复数，实部恒等于 $-\frac{1}{2}$，虚部则显著地与 K 的平方根成正比。图 5-2 中的虚线对应于阻尼比 ζ 为 0.5 的根，$L(s)$ 在 $s=0$ 和 $s=1$ 的极点用符号"×"标出，根轨迹与阻尼比为 0.5 的曲线的交点用"•"标出，这样我们就可以算出那些根轨迹与阻尼比 $\zeta=0.5$ 的曲线的交点，已知 $\zeta=0.5$，则 $\theta=30°$，那么根的虚部的大小就为实部的大小的 $\sqrt{3}$ 倍。已知实部绝对值为 $\frac{1}{2}$，根据式(5-9)，可以得到

$$\frac{\sqrt{4K-1}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

得到：$K=1$

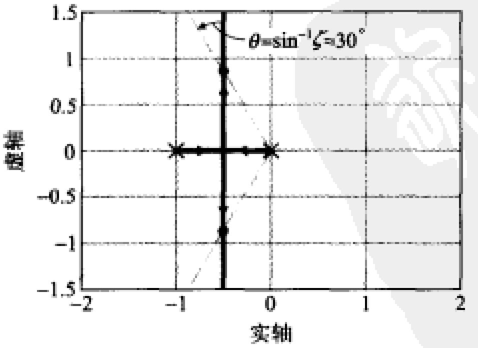


图 5-2　$L(s)=1/[s(s+1)]$的根轨迹

我们联系方程(5-8)与根轨迹图 5-2 来考查这一简单曲线的性质。首先，方程有两个特征根，因此根轨迹也就有两个分支，$K=0$ 时，两个分支分别从 $L(s)$ 的极点出发(也就是 0 和 -1 点)。正如所需要的，$K=0$ 时这是个开环系统，特征方程为 $a(s)=0$。两个分支随着 K 值的增大而相互靠近，终于在 $s=-\frac{1}{2}$ 处相交，然后再从实轴上的交

点分开，在这个**分离点**(**breakaway point**)之后，两个根以相同的实部对称地向无穷远处延伸，这样，这两个根的和就恒等于−1。从设计的观点来看，我们发现可以通过改变参数 K 的值使系统得到在图 5-2 中根轨迹上的闭环极点。如果恰好根轨迹上的点对应于满意的系统暂态响应，我们就可以通过求得相应的 K 值来完成我们的设计，否则我们就只能求助于更复杂的控制器了。但要注意的是，正如我们在前面所指出的，根轨迹法不仅仅局限于研究系统增益(例 5.1 中的 $K=A$)，同样的思想可以应用到线性地引入到系统特征方程中的任何参数上。

例 5.2 根轨迹与开环极点配置

考虑例 5.1 中所列出的特征方程，令 $D(s)=H(s)=1$、$A=1$，然后在方程中选择我们所感兴趣的 c 作为参数，于是得到

$$1+G(s)=1+\frac{1}{s(s+c)} \tag{5-10}$$

求出这个与 c 相关的根轨迹。

解：闭环特征方程的多项式形式为

$$s^2+cs+1=0 \tag{5-11}$$

基于式(5-6)有关零极点的多种形式表达，令

$$\begin{aligned} L&=\frac{s}{s^2+1}, \quad b(s)=s, \quad m=1, \quad z_i=0 \\ K&=c, \quad a(s)=s^2+1, \quad n=2, \quad p_i=+\mathrm{j},-\mathrm{j} \end{aligned} \tag{5-12}$$

这样，特征方程的根轨迹形式就转换为

$$1+c\frac{s}{s^2+1}=0$$

式(5-11)的解可以很容易地算得

$$r_1, r_2=-\frac{c}{2}\pm\frac{\sqrt{c^2-4}}{2} \tag{5-13}$$

这些解的轨迹在图 5-3 中绘出，同样地在其中"×"表示极点(也就是 $a(s)=0$ 的根)，符号"○"表示零点(即 $b(s)=0$ 的根)。我们注意到，当 $c=0$ 时，有两个"×"表示的根在虚轴上，相应的系统为临界等幅振荡，此后阻尼比 ζ 随着 c 值从零开始增加，$c=2$ 时，有重根 $s=-1$，根轨迹的两个分支在这里分离，然后沿着实轴上向相反的方向延伸。多条根轨迹汇合进入实轴的重根点，称为**会合点**(**breakin point**)。

当然，绘制二次方程的根轨迹，这很容易做到，因为我们可以很方便地求解特征方程，得到式(5-9)和式(5-13)中所列出的根表达式，然后将根轨迹视为参数 K 的函数而直接绘制出图像。其实，更有用的是，根轨迹法更适合于分析那些很难得到简洁的根式表达的高阶系统。Evans 发展了这些粗略绘制根轨迹的规则，随着 MATLAB 软件越来越容易使用，这些原则对于绘制特殊的根轨迹已经变得不再重要，在软件中输入 rlocus(sys)命令就可以得到想要的根轨迹。但是尽管如此，在控制设计中我们所关注的不仅仅只是描绘细致的根轨迹，除此之外，还要改变系统的动力性质，通过修正系统

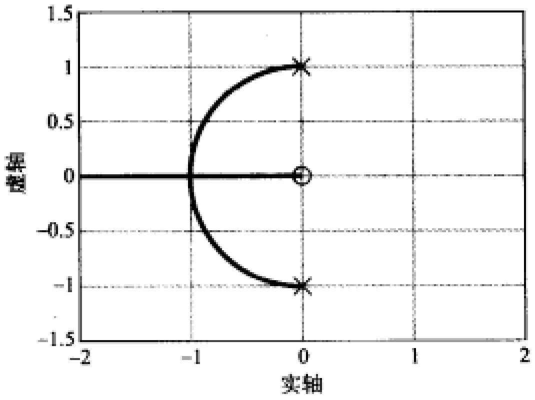


图 5-3　系统 $1+G(s)=1+1/[s(s+c)]=0$ 以 c 为参数的根轨迹

以满足更好的动态响应性能，达到更好的控制性能。为了实现这个目标，粗略地绘制出根轨迹以便能够评价可选择的补偿方法的结果，将会非常有用。而且通过绘制粗略的根轨迹可以很快地判断出计算机所绘出的结果与我们想要 MATLAB 给出的结果是否一致。事实上这里总会出现一些常规错误或者可能会忽略了一些软件使用的规则，当然还有令人防不胜防的 GIGO 法则[①]。

5.2　绘制根轨迹的指导原则

我们从根轨迹的准确定义来开始本节，由式(5-6a)的形式，我们这样来定义根轨迹：

所谓的根轨迹是指，当参数 K 从 0 变化到 $+\infty$ 过程中，满足方程 $1+KL(s)=0$ 的 s 值的集合，这里 $1+KL(s)=0$ 一般是某个系统的特征方程，在这种情况下，这些在根轨迹上的根也就是该系统的闭环极点。

现在我们考查式(5-6)，如果 K 是个正实数，那么 $L(s)$ 就是负实数，换句话说，如果我们把 $L(s)$ 写成用幅值和相位来表示的极坐标形式，那么 $L(s)$ 的相位就等于 180° 以满足式(5-6b)，这样我们可以确定根轨迹的**相位条件(phase condition)**为：

$L(s)$ 的根轨迹是 s 平面上 $L(s)$ 的相位等于 180° 的所有点的集合。如果我们定义从检测点到某一零点的角度为 Ψ_i，从某个极点到检测点的角度为 ϕ_i，那么也可以得到根轨迹的第二定义为：s 平面上满足下面条件的所有点，其中 l 取整数

$$\sum \Psi_i - \sum \phi_i = 180° + 360°(l-1) \tag{5-14}$$

根轨迹的第二定义的巨大优点在于，当手工计算一个高阶多项式的根非常困难时，计算传递函数的相位则要相对简单一些，通常情况下 K 值为正实数，称为正轨迹或者 180° 轨迹；而当 K 为负实数，$L(s)$ 就只能是正实数，相位为 0°，称为**负轨迹或 0°轨迹**。

---

① GIGO(Garbage in, Garbage out)，输入的是垃圾，输出的也必定是垃圾。

依据根轨迹的第二定义，原则上我们可以通过计算传递函数确定相位值为 180° 的点来粗略地绘制复杂高阶系统的根轨迹，我们将通过下面的例子来说明计算步骤：

$$L(s)=\frac{s+1}{s(s+5)[(s+2)^2+4]} \tag{5-15}$$

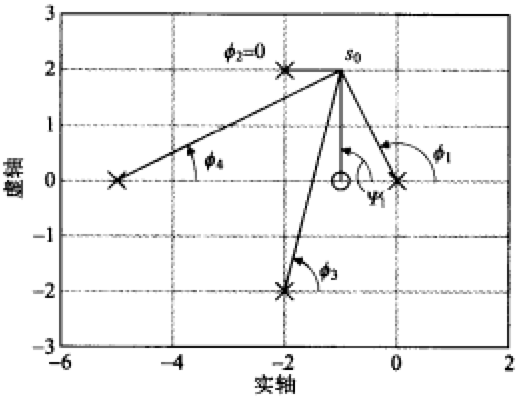


图 5-4 式(5-15)的相角计算

在图 5-4 中，$L(s)$ 的极点用"×"来表示，零点用符号"○"来表示，假定我们选择检测点 $s_0=-1+2j$，要检验 s_0 是否在根轨迹上并有相应 K 值，我们可以考虑：如果这个点在根轨迹上，那么 $\angle L(s_0)=180°+360°(l-1)$，$l$ 取整数，或等价的，从式(5-15)可以得到，

$$\angle(s_0+1)-\angle s_0-\angle(s_0+5)-\angle[(s_0+2)^2+4]=180°+360°(l-1) \tag{5-16}$$

从坐标零点到 s_0+1 点的角度可以通过从 -1 零点到测试点 s_0 画一条直线来求取[①]，在图中这条线是垂直于坐标轴的，相位角记为 $\Psi_1=90°$，以同样的方式，可以求得极点 $s=0$ 到测试点 s_0 差向量的相位角为 ϕ_1，复极点 $-2\pm 2j$ 到 s_0 差向量的相位角为 ϕ_2 和 ϕ_3，s_0+5 的差向量的相位角为 ϕ_4，依式(5-16)我们可以得到 $L(s)$ 在 $s=s_0$ 点的总角度值为分子上所有零点的相位角之和减去分母上所有极点的相位角之和，即

$$\begin{aligned}\angle L&=\Psi_1-\phi_1-\phi_2-\phi_3-\phi_4\\&=90°-116.6°-0°-76°-26.6°\\&=-129.2°\end{aligned}$$

由于 $L(s)$ 的总相位角不等于 180°，我们可以断定 s_0 点不在根轨迹上，这样，我们只能选择另外的点再来试。当然，计算某一点的相位值并不是很难，但是要计算整个 s 平面每个点的相位值却是比较困难的。为了让这一方法更好地执行，我们需要更综合的规则来寻求根轨迹，Evans 提出了一整套的规则来达到这一目标，这些规则我们将会通过下面求根轨迹的例子来展示

$$L(s)=\frac{1}{s[(s+4)^2+16]} \tag{5-17}$$

我们首先从正根轨迹开始，这也是最普遍的情况[②]。Evans 规则的前三条相对比较

---

① 复数模与相位的图像求解参见附录 B 的 B.3 节。

② 负轨迹将在 5.7 节中进行讨论。

容易记忆，但也是粗略地画出根轨迹所必需的，最后的三条虽然不是很常用，但也会在一些场合用到，另外我们通常假定可以使用 MATLAB 或者其他同类软件来绘制所求根轨迹的精细图像。

5.2.1　绘制正(180°)根轨迹规则

规则一：根轨迹的 n 条分支从 $L(s)$ 的极点出发，其中有 m 条分支结束于 $L(s)$ 的零点。

方程 $a(s)+Kb(s)=0$ 中，当 $K=0$，这个方程简化为 $a(s)=0$，其根也就是极点，当 K 趋向于无穷大时，s 的取值为 $b(s)=0$ 或者 $s\to\infty$，因为在 m 个零点上 $b(s)=0$，因此将有 m 条根轨迹结束于这些零点，而其他 $s\to\infty$ 的情况将在规则三中讨论。

规则二：奇数个零极点左侧的实轴是根轨迹的一部分。

我们在实轴上取一个测试点 s_0 如图 5-5 所示，可以求得 s_0 与两个共轭复极点的差向量的两个相位角 ϕ_1 与 ϕ_2 相抵消，这样，s_0 与共轭复数之间的相位角就变为零。由于实数零点或极点与右侧检测点的差向量的相位角为 0°，而与左侧检测点的差向量的相位角为 180°，因此，要使所有的角度之和为 $180°+360°(l-1)$，实轴上的检测点就只能处在奇数个的零点与极点的左侧，如图 5-5 所示。

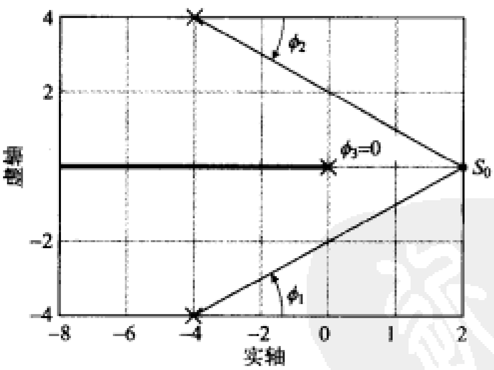


图 5-5　规则二：奇数个零极点左侧的实轴是根轨迹的一部分

规则三：对于极大的 s 与 K 值，$n-m$ 条根轨迹将以从实轴上的 $s=\alpha$ 点出发，倾斜角为 φ_l 的直线作为渐近线向无穷远处发散，在这里

$$\phi_l=\frac{180°+360°(l-1)}{n-m},\quad l=1,2,\cdots,n-m$$

$$\alpha=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m} \tag{5-18}$$

当 $K\to\infty$ 时，方程

$$L(s)=-\frac{1}{K}$$

仅当 $L(s)=0$ 时成立。这将分为两种完全不同的情况：在第一种情况下，如在规则一中所述，有 m 个根可以使 $L(s)$ 的值为零；在第二种情况下 $s\to\infty$ 时 $L(s)$ 的值也

将为零，基于假定，n 的值大于 m，渐近线则反映了 $s\to\infty$ 时 $n-m$ 个根的位置，对于极大的 s 值，下面的等式

$$1+K\frac{s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}=0 \tag{5-19}$$

可以近似为①

$$1+K\frac{1}{(s-\alpha)^{n-m}}=0 \tag{5-20}$$

这是一个 $(n-m)$ 个极点重合在 $s=\alpha$ 点的特征方程。另外，为了更形象化地理解这一结果，我们可以想象这么一幅画面：假设在 s 非常大的点上来看极点与零点，我们将可以看到它们已经与 s 平面的原点叠合在一起，这样 m 个零点将会抵消 m 个极点的作用，而剩余的 $n-m$ 个极点看起来也已经重合到一起，我们就可以认为对于极大的 K 与 s 值，式(5-19)的根轨迹与式(5-20)的是渐近相同的，我们将求出这个 α 值和渐近系统的最终轨迹。为了要找到这条轨迹，我们选择目标点 s_0 为 $s_0=Re^{j\phi}$，其中 R 设为充分大的值，而 ϕ 是可变的参数，由于所有的极点可以视为与坐标原点叠合，只要这 $(n-m)$ 个相同的相位角之和等于 180°，那么传递函数的相位角也是 180°，因此，每个 ϕ_l 可以由下式确定：

$$(n-m)\phi_l=180^\circ+360^\circ(l-1)$$

其中 l 的取值为整数，这样，这些根轨迹的渐近线就由 $(n-m)$ 条不同的射线所组成，其偏角由下式决定

$$\phi_l=\frac{180^\circ+360^\circ(l-1)}{n-m}, \qquad l=1,2,\cdots,n-m \tag{5-21}$$

对于式(5-17)描述的系统，$n-m=3$，$\phi_{1,2,3}=60^\circ$、180°和 300° 或 $\pm60^\circ$、180°。

这些渐近线从实轴上的 $s_0=\alpha$ 点出发，要确定 α 值，我们将用到多项式的一些简单性质：假设首一多项式 $a(s)$ 的系数为 a_i，根为 p_i，如式(5-4)中所示，对多项式进行因式分解，得到

$$s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n=(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)$$

如果我们把等式右边的因式相乘展开，可以得到 s^{n-1} 项的系数为 $-p_1-p_2-\cdots-p_n$，而在方程左边同幂项的系数为 a_1，因此 $a_1=-\sum p_i$，也就是说，首一多项式中次高项的系数等于其根之和的相反数，而这些根也就是 $L(s)$ 的极点。我们把这一结论应用于多项式 $b(s)$，求得系统零点之和的相反数等于 b_1，把结果记录为

$$-b_1=\sum z_i \tag{5-22}$$
$$-a_1=\sum p_i$$

然后我们再把这一结论应用到从式(5-19)得到的闭环系统的特征多项式上，可以得到

$$\begin{aligned}&s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n+K(s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m)\\&=(s-r_1)(s-r_2)\cdots(s-r_n)=0\end{aligned} \tag{5-23}$$

---

① 这个近似结果可通过用 $b(s)$ 除 $a(s)$ 来与 $(s-\alpha)^{n-m}$ 的展开式的高次项进行比较得到。

注意：多项式的所有根之和是 s^{n-1} 项系数的相反数。如果 $m<n-1$，这一结果将与 **K 值无关**。因此，假定 $L(s)$ 的极点比零点至少多两个，那么就有 $a_1=-\sum r_i$，这样我们就确定：如果 $m<n-1$，那么多项式所有根的中心并不随 K 值而变化，而且开环系统与闭环系统的和都为 $-a_1$，可以表示为

$$-\sum r_i=-\sum p_i \tag{5-24}$$

当 K 趋向无穷大时，我们可以看到有 m 个根趋向零点，而另外的 $(n-m)$ 个根趋近于渐近系统 $1/(s-\alpha)^{n-m}$ 的 $n-m$ 个分支，该系统的极点之和为 $(n-m)\alpha$。总结这些结果，我们可以得出结论：特征多项式的所有根之和等于趋向于无穷的根之和加上趋向于 $L(s)$ 的零点的根之和

$$-\sum r_i=-(n-m)\alpha-\sum z_i=-\sum p_i$$

求解 α，我们可以得到

$$\alpha=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m} \tag{5-25}$$

注意：在和式 $\sum p_i$ 与 $\sum z_i$ 中，其虚部总是为零，这是因为复数极点与复数零点都是共轭复数对，这样就只需要考虑式(5-25)的实部。对于式(5-17)

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{-4-4+0}{3-0}\\&=-\frac{8}{3}\\&=-2.67\end{aligned}$$

偏角为 $\pm60^\circ$ 的渐近线在图 5-6 中以虚线标出，注意渐近线与虚轴交于点 $\pm(2.67)\mathrm{j}\sqrt{3}=\pm4.62\mathrm{j}$。而 180° 的渐近线已经依据规则二绘出。

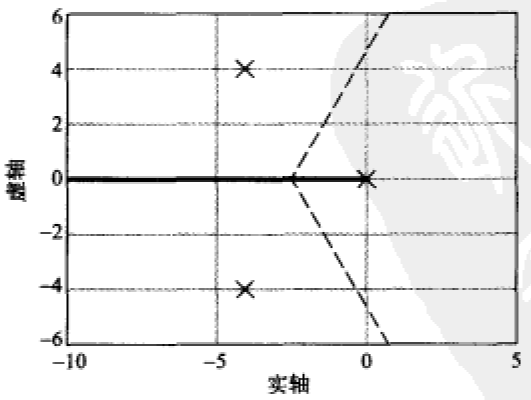


图 5-6　从 α 点等间隔向外辐射的 $(n-m)$ 条渐近线

规则四：根轨迹的分支从 q 重极点离开的出射角为

$$q\phi_{l,\mathrm{dep}}=\sum\psi_i-\sum_{i\neq l}\phi_i-180^\circ-360^\circ(l-1) \tag{5-26}$$

进入 q 重极点的入射角为：

$$q\psi_{l,\mathrm{arr}}=\sum\phi_i-\sum_{i\neq l}\psi_i+180^\circ+360^\circ(l-1) \tag{5-27}$$

设想系统有一个靠近虚轴的极点，那么我们就很有必要知道从极点出发的根轨迹是向稳定的左半轴延伸还是向不稳定的右半轴延伸。如果要计算根轨迹从极点离开的出射角，就要先设想有一个非常靠近极点的 s_0 点，并把从极点到 s_0 的差向量的相位角定义为 $\phi_{l,dep}$，然后把式(5-14)中的其他项移到方程的右边。我们通过靠近极点 $-4+4j$ 的 s_0 点作为例子来说明这一过程，并计算 $L(s_0)$ 相位角，图 5-7 中简单表示了这一过程。然后定义从极点 $-4+4j$ 到点 s_0 差向量的相位值为 ϕ_1，使所选的 s_0 点充分接近这个极点，这样到 s_0 点与到极点的 ϕ_2、ϕ_3 就可以看作是相同的，因此 $\phi_2=90°$、$\phi_3=135°$，这样就可以由幅值条件求出 ϕ_1，根据幅值条件，无论 ϕ_1 取何值都必须使相位角总和为 180°。其计算方法如下（$l=1$）：

$$\phi_1=-90°-135°-180° \tag{5-28}$$

$$=-405° \tag{5-29}$$

$$=-45° \tag{5-30}$$

由共轭复数图像的对称性可知，从极点 $-4-4j$ 出发的轨迹离开极点的出射角为 $+45°$。

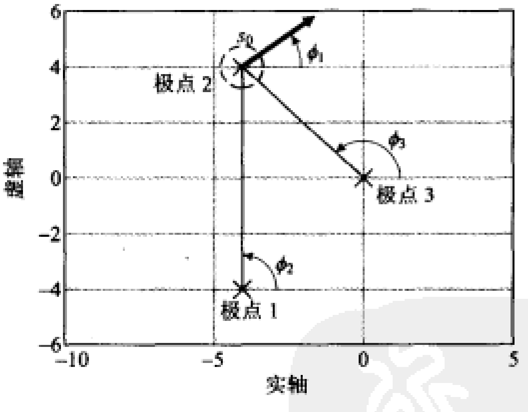


图 5-7 极点出射角与零点入射角的计算

如果 $L(s)$ 有零点，从极点到零点的差向量的相位角就要加到式(5-28)的左边，在通常情况下，从式(5-28)我们可以看到单极点的出射角为

$$\phi_{1,dep}=\sum\psi_i-\sum_{i\neq 1}\phi_i-180° \tag{5-31}$$

其中 $\sum\phi_i$ 是到其余极点的相位角之和，$\sum\psi_i$ 是到所有零点的相位角之和。对于 q 重极点，我们要计算到这个极点的相位角 q 次，这样式(5-31)就化为：

$$q\phi_{l,dep}=\sum\psi_i-\sum_{i\neq l}\phi_i-180°-360°(l-1) \tag{5-32}$$

这里极点 l 具有 q 值，这是因为在这样的 q 重极点上共有 q 条根轨迹的分支从极点离开。

在图 5-8 中可以看到，在较小的 K 值下计算出射角的过程。当然，这一过程对于 $L(s)$ 中 K 值极大，根轨迹接近零点时也是有效的。这个结论可以归纳为公式

$$q\psi_{l,arr}=\sum\phi_i-\sum_{i\neq l}\psi_i+180°+360°(l-1) \tag{5-33}$$

其中，$\sum\varphi_i$ 是到所有极点差向量的角度之和，$\sum\psi_i$ 是到其余零点差向量的角度之和，l 取值仍为整数。

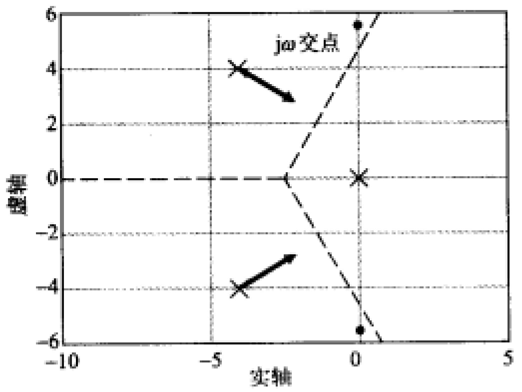


图 5-8　劳斯判据求出的根轨迹与虚轴交点

▲规则五：根轨迹与虚轴的交点恰好是劳斯判据中特征根从左半平面的负值向右半平面正值变化的临界点。

只要满足 $n-m>2$，就至少会有一条根轨迹的分支会穿越虚轴，知道了这些点就可以更好地绘出根轨迹。我们知道特征方程只要有处在**右半平面**（**right half-plane, RHP**）的根，就意味着此闭环系统是不稳定的，这可以由劳斯判据来检验。这样我们就可以把 K 值作为一个参数代入劳斯表进行计算，然后求 K 的临界值。在这里，如果 K 值有一定的增量就会使特征根进入右半平面，这个 K 值也与根轨迹与虚轴的交点相对应。给出这样的事实：如果 K 值已知，那么方程就有一个根形如 $s_0=\mathrm{j}\omega_0$，对于低阶系统，求这个穿越频率 ω_0 并不太难。以三阶系统为例，其特征方程为如下：

$$1+\frac{K}{s[(s+4)^2+16]}=0$$

上式等价于：

$$s^3+8s^2+32s+K=0 \tag{5-34}$$

劳斯阵列为：

$$\begin{array}{lcc} s^3: & 1 & 32 \\ s^2: & 8 & K \\ s^1: & \dfrac{8\times 32-K}{8} & 0 \\ s^0: & K & \end{array}$$

在这个例子中，当 $0<K<8\times 32=256$ 时，方程没有根在右半平面；当 $K=0$ 时，显然有一个 $s=0$ 的根在坐标轴上；而 $K<256$ 时方程没有正实根；当 $K>256$ 时，劳斯判据表明方程有两个处在右半平面的根；当 $K=256$ 时，方程有一个 $s=\mathrm{j}\omega_0$ 的根，将这些值代入式(5-34)，可以得到：

$$(\mathrm{j}\omega_0)^3+8(\mathrm{j}\omega_0)^2+32(\mathrm{j}\omega_0)+256=0 \tag{5-35}$$

式(5-35)要成立，那么式中的实部与虚部都必须为零。这点告诉我们：①

$$-8\omega_0^2+256=0$$

还有

$$-\omega_0^2+32\omega_0=0 \tag{5-36}$$

方程(5-36)的解为：$\omega_0=\pm\sqrt{32}=\pm5.66$，这两个点如图 5-9 中所示，我们注意到渐近线交虚轴于点 $s=4.62j$，这个值要小于实际轨迹与虚轴的交点。

▲**规则六**：当式(5-37)成立时，根轨迹上的点将有重根

$$(b\frac{da}{ds}-a\frac{db}{ds})=0 \tag{5-37}$$

根轨迹上每个分支将以下面的角度间隔射入这个 q 重根点：

$$\frac{180°+360°(l-1)}{q} \tag{5-38}$$

也会以相同的角度间隔射出这个重根点。

就像大多数多项式，高于一阶的特征多项式很可能会具有重根，如在图 5-2 中的二阶系统，当 $K=\frac{1}{4}$ 时，其根轨迹就有两个相同的根在点 $s=-\frac{1}{2}$，两条水平的分支在这个点上汇合，而两条垂直的分支则在这个点上从实轴离开，在 $K>\frac{1}{4}$ 时取得复数值。这些分支分别以 0°和 180° 入射，而以 +90° 和 −90° 出射。通常当 $K=K_1$时，$s=r_1$点有多重根，其特征方程可以写为

$$a(s)+K_1b(s)=(s-r_1)^qf(s) \tag{5-39}$$

这里 $f(s)$ 表示了其余因子式的乘积，我们将上式对 s 求微分，可以得到

$$\frac{da}{ds}+K_1\frac{db}{ds}=q(s-r_1)^{q-1}(s-r_2)(\cdots)+(s-r_1)^q\frac{df(s)}{ds} \tag{5-40}$$

现在，我们设式中的 $s=r_1$，则其结果为零，也就是说在一个多重根点上，多项式的微分值为零，多项式的值也为零，在原来的方程中，在这个点上

$$K_1=-\frac{a(s)}{b(s)}\bigg|_{s=r_1} \tag{5-41}$$

将上面的各式联立，得到一个点的微分值为零的充要条件为：

$$\left[b\frac{da}{ds}-a\frac{db}{ds}\right]\bigg|_{s=r_1}=0 \tag{5-42}$$

对于例 5.1 中的二阶系统

$$b=1,\qquad \frac{db}{ds}=0$$

$$a=s^2+s,\qquad \frac{da}{ds}=2s+1$$

将以上各式代入式(5-42)，可以求得

$$2s_0+1=0 \tag{5-43}$$

① 注意在这个例子里，我们可以把未知的 K 值代入式(5-35)，然后不通过劳斯判据就能计算得到 $K=256$。

$$s_0 = -\frac{1}{2} \tag{5-44}$$

这一结果与我们先前在图 5-2 中观察到的分离点相符合。对于式(5-17)所给出的三阶系统，其多项式

$$b=1, \qquad \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}=0$$

$$a=s[(s+4)^2+16]=s^3+8s^2+32s$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s}=3s^2+16s+32$$

其可能存在的重根值，将由下式给出：

$$3s^2+16s+32=0$$

可简化为：

$$s_0 = -2.67 \pm 1.89\mathrm{j} \tag{5-45}$$

而事实上，图 5-9 表明这两个点并不存在于根轨迹上，而是额外的解。这个例子表明方程(5-42)并不能指明所求得的重根是否在根轨迹上，微分条件是重根在根轨迹上的必要条件，却不是充分条件。其充分条件是：在 $s=r_1$ 点满足 $a(s)+Kb(s)=0$，再看式(5-39)，经过相似的处理，我们很容易可以看出在 q 重极点处，多项式的 $q-1$ 阶微分值也为零。

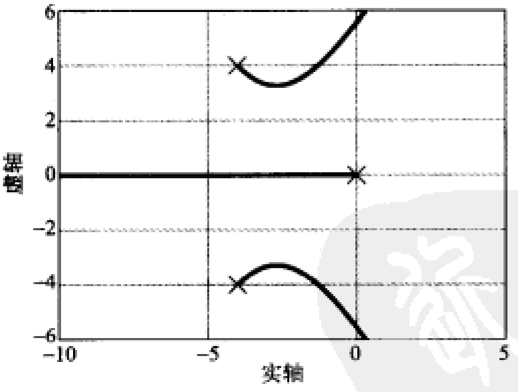


图 5-9 $L(s)=1/[s(s^2+8s+32)]$ 的根轨迹

要计算根轨迹在多重根处的出射角与入射角，我们将使用一个很有用的技巧，称为**延续轨迹(continuation locus)**，设想我们先根据 K 的初始值画一条根轨迹，比如 $0 \leqslant K \leqslant K_1$，然后我们再令 $K=K_1+K_2$，这样我们就可以以 K_2 为参数画出新的根轨迹，这条轨迹作为原轨迹的延续并从原系统 $K=K_1$ 时的根出发。为了考查这一过程是如何进行的，我们回到式(5-2)中的二阶系统，令 K_1 取与分离点相对应的值，即 $K_1=\frac{1}{4}$，然后再令 $K=\frac{1}{4}+K_2$，就可以得到轨迹方程 $s^2+s+\frac{1}{4}+K_2=0$，或者写为

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+K_2=0 \tag{5-46}$$

以上画轨迹的步骤与一般画根轨迹的步骤相同，所不同的是式(5-46)的根轨迹从极点出发的过程与式(5-8)的根轨迹从分离点分开的过程是一致的，应用式(5-32)的规则去求轨迹从重极点离开的出射角，我们可以得到：

$$2\phi_{\text{dep}} = -180^\circ - 360^\circ(l-1) \tag{5-47}$$

$$\phi_{\text{dep}} = -90^\circ - 180^\circ(l-1) \tag{5-48}$$

$$\phi_{\text{dep}} = \pm 90^\circ \text{（分离点的出射角）} \tag{5-49}$$

在这个例子中，系统的根轨迹沿着实轴射入 $s=-\frac{1}{2}$ 点，角度为 0° 和 180°。

图 5-9 中绘出了前文中提到的三阶系统的完整根轨迹，这一结果综合了目前得到的所有结论，包括渐近线与实轴的交点，也即渐近线族的中心，渐近的倾斜角，根轨迹从极点的出射角和与虚轴的交点。事实上要粗略画出根轨迹只要规则一至规则三就足够了，这几条需要我们记住，而规则四和规则五则应用于准确定位比较难绘制的根轨迹，特别是有根靠近虚轴的情况。规则六通常很少用到，但其对重根的描述可以帮助我们去理解从计算机中得来的轨迹，我们将在下一部分详细说明它，也可以定性地描述系统中除去零点或极点时的影响。事实上图 5-9 中根轨迹是用以下 MATLAB 命令做出的：

```
numL = [1];
denL = [1  8  32  0];
sysL = tf(numL,denL);
rlocus(sysL)
```

5.2.2 绘制根轨迹规则总结

规则一：根轨迹的 n 条分支从 $L(s)$ 的极点出发，其中有 m 条分支结束于 $L(s)$ 的零点。

规则二：奇数和个零极点左侧的实轴是根轨迹的一部分。

规则三：对于极大的 s 与 K 值，$n-m$ 条根轨迹将以从实轴上的 $s=\alpha$ 点出发，倾斜角为 ϕ_l 的直线为渐近线向无穷远处发散，在这里

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l-1)}{n-m},\ l=1,2,\cdots,n-m \tag{5-50}$$

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} \tag{5-51}$$

规则四：根轨迹的分支从 q 重极点离开的出射角为

$$q\phi_{l,\text{dep}} = \sum \psi_i - \sum_{i\neq l} \phi_i - 180^\circ - 360^\circ(l-1) \tag{5-52}$$

而进入 q 重零点的入射角为

$$q\psi_{l,\text{arr}} = \sum \phi_i - \sum \psi_i + 180^\circ + 360^\circ(l-1) \tag{5-53}$$

规则五：根轨迹与虚轴的交点恰好是劳斯判据中特征根由左半平面的负值向右半平面正值变化的临界点。

规则六：当多项式的导数值为零或者下式成立时根轨迹上的点将是二重根

$$\left(b\frac{da}{ds}-a\frac{db}{ds}\right)=0 \tag{5-54}$$

进一步地，轨迹上 $q-1$ 阶导数值为零的点为 q 重根。根轨迹上每个分支将以不同的角度进入这个 q 重根点，其角度分别为

$$\frac{180°+360°(l-1)}{q} \tag{5-55}$$

然后再以相同的角度间隔从这个点射出，构成 $2q$ 条间隔相同的一组发射线。这个重根如果在实轴上，这组发射线的方向就由实轴规则决定，而如果是在复平面上就要使用分离规则了。

5.3 根轨迹应用举例

事实上，很多重要的控制过程都可以用含有简单双积分项的传输函数来进行描述：

$$G(s)=\frac{1}{s^2} \tag{5-56}$$

比如卫星姿态控制过程就是用这个方程来描述的；另外，我们知道电脑磁盘驱动器中装配的读写磁头通常安置在摩擦很小的空气轴承上，这样就可以忽略所有摩擦，而只考虑读写头微小的位移；上面的电机由直流电源提供，因此电枢的反向电动势也不会影响转矩。这样这一装置也同样可以用式(5-56)来描述。如果我们用这个装置来构造一个带比例控制器的单位反馈系统，那么与控制器增益相关的根轨迹就是：

$$1+k_p\frac{1}{s^2}=0 \tag{5-57}$$

如果把那些规则应用到这个系统，我们就可以得下面的结论：

规则一：根轨迹有两个分支，且都从 $s=0$ 点出发。

规则二：根轨迹没有处在实轴上的部分。

规则三：两条渐近线从 $s=0$ 点出发，偏角为 $\pm90°$。

规则四：根轨迹的两条分支从 $s=0$ 射出，角度为 $\pm90°$

规则五：无论 k_p 取何值，根轨迹都在虚轴上。

规则六：分离点也是 $s=0$。

结论：系统的根轨迹由虚轴构成，因此无论 k_p 取任何值，系统都会震荡，想要得到更好的控制结果，就必须采用比例加微分控制。

例 5.3 PD 控制的卫星姿态控制系统根轨迹

利用 PD 控制的系统特征方程为：

$$1+[k_p+k_Ds]\frac{1}{s^2}=0 \tag{5-58}$$

为了将这个方程化为根轨迹形式，我们定义 $K=k_D$，然后任意选择增益比①为 $k_p/k_D=1$，这就可以导出根轨迹形式

$$1+K\frac{s+1}{s^2}=0 \tag{5-59}$$

解：我们再来算出各条规则的结果：

规则一：根轨迹有两条分支，且都从 $s=0$ 点出发，其中一条结束于零点 $s=-1$，另一条则将趋向无穷远处。

规则二：实轴上 $s=-1$ 点左侧的部分在根轨迹上。

规则三：由于 $n-m=1$，因此有一条渐近线沿着负实轴方向。

规则四：重极点 在 $s=0$ 上，根轨迹出射的角度为 $\pm 90°$。

规则五：应用劳斯判据，可以得到下表：

$$\begin{array}{lll} s^0 & 1 & K \\ s^1 & K & \\ s^2 & K & \end{array} \tag{5-60}$$

而且可以断定根轨迹不会穿越虚轴。

规则六：方程的重根可以由下式得到

$$\begin{aligned} b&=s+1, \quad \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}=1 \\ a&=s^2, \quad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s}=2s \end{aligned} \tag{5-61}$$

其也是下式的解

$$b\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s}-a\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}=(s+1)2s-s^2=0 \tag{5-62}$$

$$s^2+2s=0 \tag{5-63}$$

$$s_i=0, \quad -2 \tag{5-64}$$

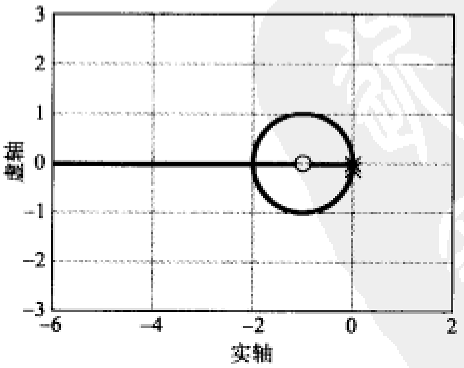


图 5-10　$L(s)=G(s)=(s+1)/s^2$ 的根轨迹

根据规则二，$s=-2$ 也是根轨迹上的点，因此它也是一个重根点，而且也是入射点，我们断定根轨迹的两条分支离开原点后，不进入右半平面，而是分别向上和向下沿着圆形曲线②汇聚到

① 对于一个给定的实际系统，这个数值应该由给定的上升时间或控制器的最大控制信号来决定。

② 假设 $s+1=e^{j\theta}$，由 K 为正数，θ 为实数的某一取值范围内，方程有解来说明该路径是圆形的。

实轴的 $s=-2$ 点，然后在这个点上，一条分支向左延伸趋向无穷，另一条则向右收敛于零点 $s=-1$，图 5-10 中和根轨迹图由下面的命令得到：

```
numS = [1 1];
denS = [1 0 0];
sysS = tf(numS,denS);
rlocus( sysS)
```

比较此例与简单的 $1/s^2$ 的根轨迹，我们可以看出：

增加零点可以将根轨迹拉向左半平面，设计补偿时每个根都有全局影响力。

在前面的例子中，我们考虑的是理想 PD 控制，而事实上，正如我们在前面所提到的，物理上微分运算是不可实现的，实际的 PD 控制可以近似地表示为

$$D(s)=k_p+\frac{k_D s}{s/p+1} \tag{5-65}$$

定义 $K=k_p+pk_D$ 以及 $z=pk_p/K$，可以将上式化为根轨迹的形式，这样[①]

$$D(s)=K\frac{s+z}{s+p} \tag{5-66}$$

当我们应用频率响应进行设计时，这种控制器传递函数被称为超前补偿(lead compensator)，相对地，由电子器件实现频率补偿的装置称为超前网络(lead network)，将传递函数为 $1/s^2$ 的控制器加入系统后，系统传递函数为：

$$1+D(s)G(s)=1+KL(s)=0$$

$$1+K\frac{s+z}{s^2(s+p)}=0$$

例 5.4　修正 PD 控制或超前补偿的卫星控制系统的根轨迹

要评价增加极点的影响，我们仍然设零点 $z=1$，然后考虑 p 取不同的三个值时的情况。我们先从一个比较大的 p 值开始，取 $p=12$，

再来考查下面系统的根轨迹：

$$1+K\frac{s+1}{s^2(s+12)} \tag{5-67}$$

解：同样地，我们可以应用规则绘制根轨迹：

规则一：现在根轨迹上将有三条分支，两条从 $s=0$ 点出发，一条则从 $s=-12$ 点出发。

规则二：实轴上 $-12\leqslant s\leqslant -1$ 段是根轨迹的一部分。

规则三：有 $n-m=3-1=2$ 条根轨迹，中心点在 $\alpha=\dfrac{-12-(-1)}{2}=-11/2$，角度为 $\pm 90°$。

规则四：根轨迹的两条分支在 $s=0$ 处的出射角为 $\pm 90°$。

规则五：由劳斯表可以证实当 K 取值为正时，没有根轨迹的分支会穿越虚轴。

规则六：重根点可以由下面的计算得到

$$b=s+1,\quad \frac{db}{ds}=1$$

① 不要把这里表示零点的 z 和数字离散系统中的符号 z 相混淆。

$$a = s^3 + 12s^2, \quad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s} = 3s^2 + 24s$$

其也是下式的解

$$b\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s} - a\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s} = (s+1)(3s^2+24s) - (s^3+12s^2) = 0$$

$$2s^3 + 15s^2 + 24s = 0$$

$$s_i = 0, \quad -2.31, \quad -5.18$$

这里的方程有个明显的解在 $s=0$ 处，而得到二次方程结果则可以由二次求根公式方便的求解，当然，MATLAB 将会使求解更快一些，输入roots([2 15 24 0])，从根轨迹的观点来看，$s=0$ 处的解明显是个重根点，并由规则二可知其余的两个解也在根轨迹上。这样，我们就可以得出结论：根轨迹的两条分支从 $s=0$ 点垂直的分开后，并未进入右半平面，而是沿着圆弧向左半平面延伸，最后交汇在 $s=-2.31$ 点，在这个点上一条分支向右延伸到零点 $s=-1$，另一条分支则向左与从极点 $s=-12$ 出发的根轨迹相遇，这两条根轨迹在 $s=-5.18$ 处形成重根，在该点分离并趋向于在点 $s=-5.5$ 处与实轴垂直的渐近线，图 5-11 中的根轨迹图可以由下面的 MATLAB 命令绘得：

```
numL = [1 1];
denL = [1 12 0 0];
sysL = tf(numL,denL);
rlocus(sysL)
```

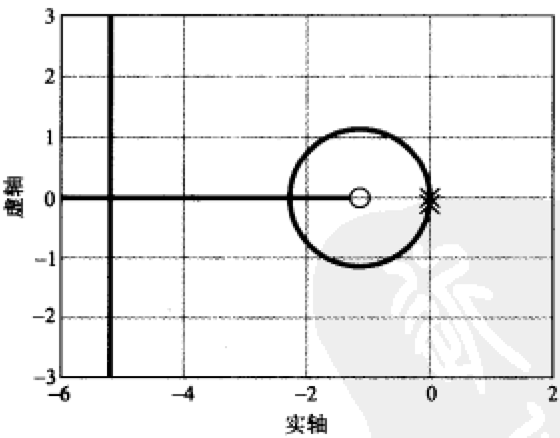


图 5-11　$L(s)=(s+1)/s^2(s+12)$ 的根轨迹

研究这条根轨迹，可以发现，增加极点使 PD 控制的简单圆形轨迹发生形变，但是在靠近原点的地方，根轨迹的形状与先前的情况还是非常相似的，但当增加的极点向右移动时，则情况又会有所不同。

例 5.5　卫星超前补偿控制具有较小极点值时的根轨迹

令 $p=4$，绘制根轨迹

$$1 + K\frac{s+1}{s^2(s+4)} = 0 \tag{5-68}$$

解：同样地，通过规则，我们可以得到：

规则一：根轨迹同样有三条分支，两条从 $s=0$ 点出发，一条则从 $s=-4$ 点出发。

规则二：实轴上 $-4\leqslant s\leqslant -1$ 段是根轨迹的一部分。

规则三：有两条根轨迹，中心点在 $\alpha=-3/2$，角度为 $\pm 90°$。

规则四：根轨迹的两条分支在 $s=0$ 处射出，角度为 $\pm 90°$。

规则五：由劳斯阵列同样可以证实，没有根轨迹的分支会穿越虚轴。

规则六：方程的重根点，在这个例子中为：

$$b\frac{da}{ds}-a\frac{db}{ds}=(s+1)(3s^2+8s)-(s^3+4s^2)=0$$

$$2s^3+7s^2+8s=0$$

$$s=0,\quad -1.75\pm j0.97$$

其中 $s=0$ 的解明显是二重根点，但其余的两个解却并不在根轨迹上，这是由于仅有三个根的实系数多项式已经有一个根在实轴上，那么剩余的两个根就不可能同时处在实轴上方，而不在下方。在这个例子中的根轨迹与 $p=-12$ 时的根轨迹不同于在实轴根轨迹上没有汇合点和分离点，应用 MATLAB 所绘制的根轨迹如图 5-12 如示。

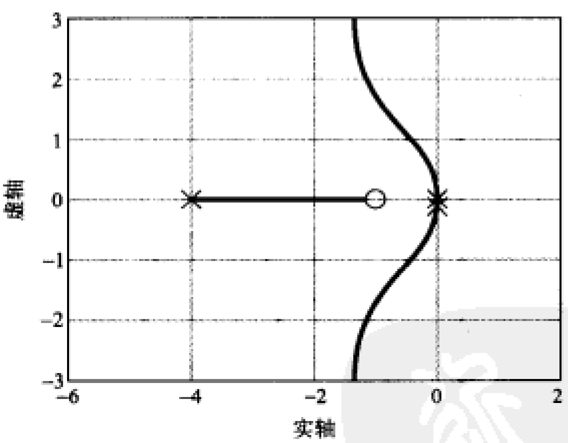


图 5-12　$L(s)=(s+1)/s^2(s+4)$ 的根轨迹

从以上两个例子中，我们得到了非常相似的系统，但是在第一情况下，$p=-12$，在实轴上分布在分离点和汇合点。而 $p=-4$ 时的根轨迹就不具有这样的性质。按照逻辑就该问在什么时候这一性质就会消失呢？一系列事实证明这一变化发生在 $p=9$ 时，下面的例子将看到此时的根轨迹。

例 5.6　极点为临界值时卫星控制系统的根轨迹

绘出下面系统的根轨迹：

$$1+K\frac{s+1}{s^2(s+9)}=0 \tag{5-69}$$

规则一：根轨迹有三条分支，分别从 $s=0$ 和 $s=-9$ 点出发。

规则二：实轴上 $-9 \leqslant s \leqslant -1$ 段是根轨迹的一部分。

规则三：有两条根轨迹，中心点在 $\alpha=-8/2=-4$。

规则四：与前面的例子相同，根轨迹的两条分支在 $s=0$ 处射出，角度为 $\pm 90°$。

规则五：根轨迹的分支不会穿越虚轴。

规则六：计算重根的方程为：

$$b\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s}-a\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}=(s+1)(3s^2+18s)-(s^3+9s^2)=0$$

$$2s^3+12s^2+18s=0 \tag{5-70}$$

$$s(s+3)^2=0$$

$$s=0,\quad -3,\quad -3$$

这样我们就有了在根轨迹上的解，那么我们又能从相同的两个重根中看出些什么呢？事实上，在这种特殊情况下，根轨迹的分离点和汇合点在同一点，在这里不是两条，而是有三条分支汇合在一起，根据规则绘制连续根轨迹得到各分支的入射角分别为$-180°$，$60°$ 和 $-60°$，而出射角为 $0°$ 和 $\pm120°$，根轨迹如图 5-13 中所绘。

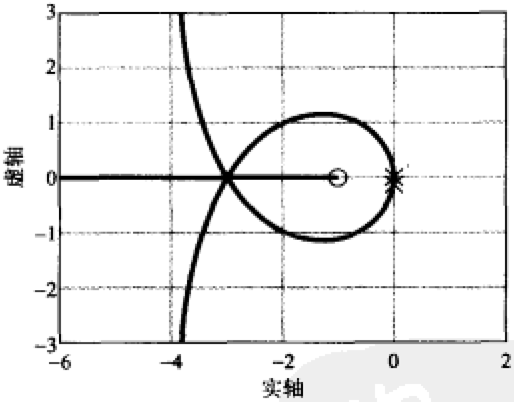


图 5-13　$L(s)=(s+1)/s^2(s+9)$ 的根轨迹

从图 5-11～图 5-13 表明，当第三个极点接近于零点（p 接近于 1）时，只能使 $D(s)G(s)=K\dfrac{1}{s^2}$ 的根轨迹产生很小的形变，该轨迹包括了两条以 $\pm90°$，从 $s=0$ 处分离的直线分支。然后，随着我们增大 p 的值，根轨迹的形状将做连续变化，当 $p=9$ 时，根轨迹在-3 处汇合成三重根，随着极点 p 左移直到超过-9，就会出现不同的分离点和汇合点。当 p 值非常大时，就会出现一个零点和两个极点间的圆形轨迹，当 $p=9$ 时，如图 5-13 所示，这恰是两种极端的二阶根轨迹的临界过渡状态，其中一种出现在 $p=1$ 时（此时零极点相消），另一种则是 $p\to\infty$（此时增加的极点不会产生影响），从以上例子可以得出下面很有用的结论：

增加的极点从左侧无穷远处逐渐向给定的根轨迹移动时，将会把根轨迹的分支推向右方。

这二重积分器是假定受控对象为刚体且无摩擦的简单模型，更符合实际的模型应

该考虑受控对象柔韧性的影响，比如前面所述的卫星姿态控制系统，就至少要考虑太阳能电池板的柔韧性影响。另外在磁盘读写机构中，也需要考虑读写磁头和支撑臂的柔韧性，它们的运动过程可以由一系列**轻阻尼模式**(**lightly damped modes**)组成，这个过程通常可以用一个单一的主模式来近似。在2.1节中，考虑对象的柔韧性后，在原来的模型 $1/s^2$ 的基础上增加了不少的复数极点，这通常有两种可能的形式：当传感器与执行机构在一个刚体上时，称为**合体**(**collocated case**)①；若传感器在另一个实体上，这时叫**单体**(**noncollocated case**)②，我们先考虑与式(2-19)所示的合体相似的例子，正如我们在第2章中所学到的，合体的传递函数并非仅有一对复极点，而且还有一对距离极点很近而自然频率略低于极点的零点。在下面的例子中，所选择的零极点数目更侧重于反映根轨迹的特性，而不是描述实际的物理模型。

例 5.7　具有合体柔韧性的卫星控制系统的根轨迹

绘制特征方程 $1+G(s)D(s)=0$ 的根轨迹，其中

$$G(s)=\frac{(s+0.1)^2+6^2}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]} \tag{5-71}$$

这是一个单位反馈结构，其控制器传递函数为

$$D(s)=K\frac{s+1}{s+12} \tag{5-72}$$

解：在本例中，

$$L(s)=\frac{s+1}{s+12}\frac{(s+0.1)^2+6^2}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]}$$

其极点和零点都接近于虚轴，因此我们需要求出对应的出射角。

规则一：根轨迹有五条分支，其中三条最终到达零点，而所余两条则趋向渐近线。

规则二：实轴上 $-12\leqslant s\leqslant -1$ 段是根轨迹的一部分。

规则三：两条渐近线的中心在

$$\alpha=\frac{-12-0.1-0.1-(-0.1-0.1-1)}{5-3}=-\frac{11}{2}$$

渐近线偏角为 $\pm 90°$。

规则四：计算极点 $s=-0.1+j6.6$ 的出射角。将该极点处的相角定义为 ϕ_1，其他角度如图5-14中所注，则根轨迹条件为

$$\phi_1=\psi_1+\psi_2+\psi_3-(\phi_2+\phi_3+\phi_4+\phi_5)-180°$$

$$\phi_1=90°+90°+\tan^{-1}(6.6)-\left[90°+90°+90°+\tan^{-1}\left(\frac{6.6}{12}\right)\right]-180° \tag{5-73}$$

$$\phi_1=81.4°-90°-28.8°-180°$$

$$=-217.4°=142.6°$$

因此根轨迹离开极点从左上方进入复平面的稳定区域，如果读者有兴趣的话，可以计算一下

① 对于典型卫星姿态控制系统，由于传感器和执行机构都在卫星的主体上，因此柔韧性来自太阳能模块。

② 典型卫星系统的柔韧性来自科技包，该装置的姿态由与之匹配的命令体控制。与之类似的还有电脑的磁头系统，其电机位于臂的一头，而读写头则在另一头。

零点 $s=-0.1+j6$ 的入射角。

规则五：应用劳斯判据分析可知根轨迹的分支不会穿越虚轴。

规则六：在本例中这一规则虽然直观却十分繁琐，并不值得去计算。

所得的根轨迹如图 5-15 所示。

前面的这一例子说明：

合体条件下，考虑受控对象的柔韧性会给特征方程引入轻阻尼根，但这不会使系统变得不稳定。

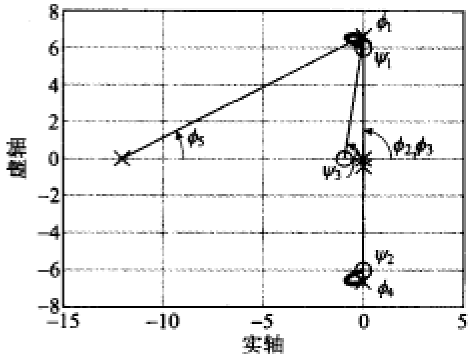


图 5-14　计算 $L(s)=\dfrac{s+1}{s+12}\dfrac{(s+0.1)^2+6^2}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]}$ 的出射角

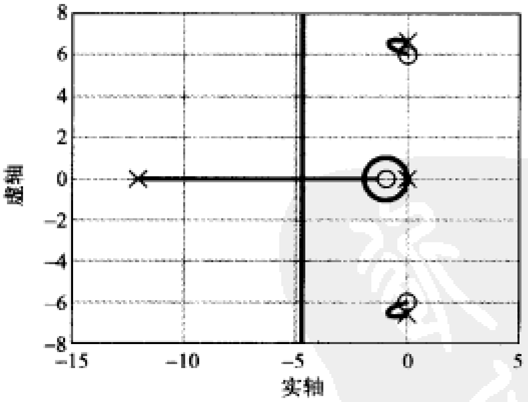


图 5-15　$L(s)=\dfrac{s+1}{s+12}\dfrac{(s+0.1)^2+6^2}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]}$ 的根轨迹

出射角的计算过程表明根轨迹离开柔韧性引入的极点后向左半平面延伸。下面我们考虑单体时的情况，设受控对象的传递函数①为

$$G(s)=\frac{1}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]} \tag{5-74}$$

① 在执行机构与传感器非合体的实际系统中，会有一个阻尼比很大的零点在虚轴左侧很远的地方，如式(2.12)所示，MATLAB 做出的结果证明，忽略这个零点不会对我们分析的问题产生很大影响。

加上超前补偿环节

$$D(s)=K\frac{s+1}{s+12} \tag{5-75}$$

上面的方程表明单体的传递函数的复数极点，但不会有复数的零点，如式(2-12)和式(2-18)所示，在下面的例5.8中可以看到这将会产生很大的影响。

例5.8　单体的根轨迹

应用规则画出下式的根轨迹

$$KL(s)=DG=K\frac{s+1}{s+12}\frac{1}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]} \tag{5-76}$$

请留意根轨迹离开复数极点时的角度。

规则一：根轨迹有五条分支，其中一条最终到达零点，而所余四条则趋向渐近线。

规则二：实轴上 $-12\leqslant s\leqslant -1$ 段是根轨迹的一部分。

规则三：四条渐近线的中心在

$$\alpha=\frac{-12-0.2-(-1)}{5-1}=\frac{-11.2}{4}$$

渐近线的偏角分别为 $\pm45°$ 和 $\pm135°$。

规则四：我们再来计算极点 $s=-0.1+j6.6$ 的出射角。将该极点处的相角定义为 ϕ_1，其他角度如图5-16中所注，则根轨迹条件为

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \psi_1-(\phi_2+\phi_3+\phi_4+\phi_5)-180°\\
\phi_1 &= \tan^{-1}(6.6)-[90°+90°+90°+\tan^{-1}(\frac{6.6}{12})]-180°\\
\phi_1 &= 81.4°-90°-90°-90°-28.8°-180°\\
\phi_1 &= 81.4°-90°-28.8°-360°\\
\phi_1 &= -37.4°
\end{aligned} \tag{5-77}$$

在这里，根轨迹由右下方向进入非稳定区域，也就是说当增益变大时，系统会变得不稳定。

规则五：劳斯判据的前两行为：

$$\begin{matrix} 1 & 45.97 & K \\ 12.2 & 522.84 & K \end{matrix} \tag{5-78}$$

现在，我们不得不承认，面对复杂的系统能否应用劳斯判据确实是一个充满疑惑的问题。不过现在给出的信息已经足够绘出粗略的根轨迹，而且可以知道根轨迹穿越虚轴的点非常靠近复极点 $\omega=\pm j6.6$。MATLAB提供了一条命令可以确定这个值。我们用命令 rlocus(sysL)来作根轨迹，那么我们再输入[K,P]=rlocfind(sysL)，就会在穿越处标记出穿越点 $\omega=\pm j6.525$，此时的 $K=144.4$。

规则六：同样地，在此精确地计算出分离点和汇合点的作用也是相当有限的。

图5-17中的根轨迹由以下命令绘得：

```
numG = 1;
denG = [1.0  0.20  43.57  0  0];
sysG = tf(numG,denG);
numD = [1   1];
```

```
denD = [1   12];
sysD = tf(numD,denD);
sysL = sysD*sysG;
rlocus(sysL)
axis([-18  2   -7.5   7.5])
```

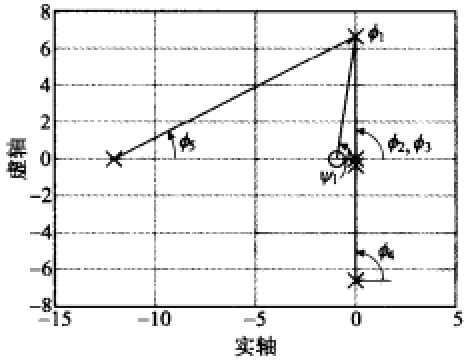


图 5-16　计算 $L(s)=\frac{s+1}{s+12}\frac{1}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]}$ 的出射角

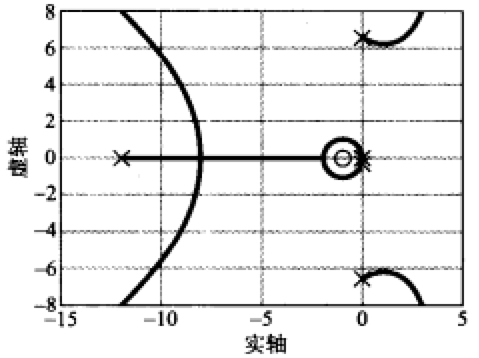


图 5-17　$L(s)=\frac{s+1}{s+12}\frac{1}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]}$ 的根轨迹

含多重复根的根轨迹

前面我们已经见过不少在实轴上有分离点和汇合点的根轨迹。当然，方程为四阶或四阶以上时，就可能会有许多多重复根。尽管这种情况并不多见，但我还是要用下面例子来看看这种令人好奇的情况。

例 5.9　多重复根的根轨迹

绘出 $1+KL(s)=0$ 的根轨迹，这里：

$$L(s)=\frac{1}{s(s+2)[(s+1)^2+4]}$$

解：

规则一：根轨迹有四条分支，且最后全都趋向于渐近线。

规则二：实轴上 $-2\leqslant s\leqslant 0$ 段是根轨迹的一部分。

规则三：四条渐近线的中心在

$$\alpha=\frac{-2-1-1-0+0}{4-0}=-1$$

渐近线的偏角为 $\phi_l=45°,135°,-45°,-135°$

规则四：由图 5-18，算得根轨迹在极点 $s=-1+2j$ 的出射角 ϕ_{dep} 为

$$\begin{aligned}\phi_{dep}&=\phi_3=-\phi_1-\phi_2-\phi_4+180°\\&=-\tan^{-1}\left(\frac{2}{-1}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right)-90°+180°-116.6°-63.4°-90°+180°\\&=-90°\end{aligned}$$

我们很快就会发现，沿着直线 $s=-0.1+j\omega$，有 $\phi_1+\phi_2=180°$。因此这里两个复极点之间的线段都是根轨迹的一部分。

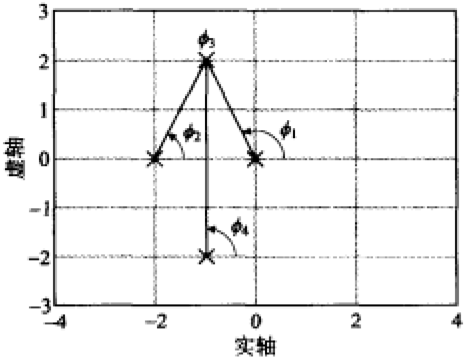


图 5-18　计算 $L(s)=\dfrac{1}{s(s+2)[(s+1)^2+4]}$ 的出射角

规则五：根轨迹穿越虚轴的交点也就是令 $s=j\omega_0$ 时的下面方程的解

$$s^4+4s^3+9s^2+10s+K=0$$

将 $s=j\omega_0$ 代入并化简可得 ω_0 与 K 必须满足：

$$\omega_0^4-4j\omega_0^3-9\omega_0^2+10j\omega_0+K=0$$

从而有：

$$\omega_0^4-9\omega_0^2+K=0 \tag{5-79}$$

$$-4\omega_0^3+10\omega_0=0 \tag{5-80}$$

由式(5-80)可得 $\omega_0^2=\dfrac{5}{2}$，从而 $\omega_0=1.58$，联立式(5-79)和式(5-80)可得

$$K=9\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{25}{4}$$

$$=\frac{90-25}{4}=16.25$$

这个 K 值也可以由劳斯判据来确定。

规则六：我们用下式来求可能存在的重根：

$$b=1,\quad a=s^4+4s^3+9s^2+10s$$

$$\frac{db}{ds}=0,\quad \frac{da}{ds}=4s^3+12s^2+18s+10$$

这些条件可以简化为 $da/ds=0$，我们可以用 MATLAB 来求这个三次方程的根，也可用另外的办法，从规则四我们发现 $s=-1+j\omega$ 为根轨迹的一部分，因此在 $s=-1$ 处有多重根，则有：

$$4s^3+12s^2+18s+10=(s+1)(4s^2+8s+10)$$

上式的根为 $-1\pm j\sqrt{\dfrac{3}{2}}=-1\pm1.22j$。因为这些点在两复极点之间，所以这个解是根轨迹上的重极点。

用 MATLAB 绘出的根轨迹如图 5-19 所示，在图中可以看出，根轨迹的重根在 $s=-1\pm1.22j$ 处，并且根轨迹在 $-1\pm1.22j$ 处相交，然后以 0° 和 180° 分离。

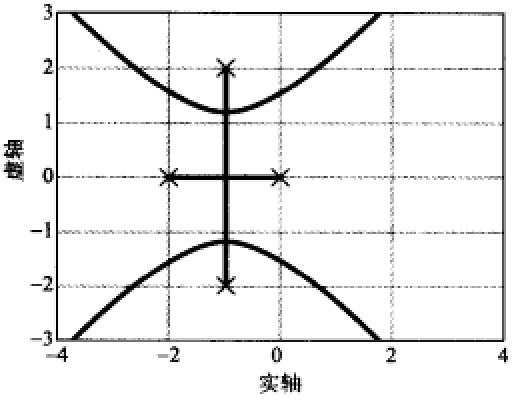


图 5-19 $L(s)=\frac{1}{s(s+2)[(s+1)^2+4]}$ 的根轨迹

本例中的根轨迹为两种极限根轨迹的过渡类型:一种是复极点在例子的左侧根轨迹上,且以±135°趋向于渐近线;另一种则是复极点在例子的右侧根轨迹上,且以±45°趋向于渐近线。

5.4 选取参数值

正根轨迹表示的是,当 K 为正实数值时,方程 $1+KL(s)=0$ 根的所有可能位置的轨迹。系统设计的目的就是要找出适当的 K 值以满足动态和静态的性能指标。我们要分析的问题是从特定的根轨迹中选择适当的 K 值,以使方程的根在特定的位置上。虽然我们将学习用手工计算的方法来选择根轨迹上增益值方法,但在这实际中用得却并不多,这是因为只有在计算要求非常严格时结果才能达到足够的精度。当分析特定的根轨迹时,MATLAB 有函数可以很容易且准确的获得解。我们首先介绍手工计算方法,用以说明 MATLAB 做了些什么工作,然后再将手工计算和应用计算机的方法进行介绍。

由根轨迹的第二定义,我们改进规则,单独应用 $L(s)$ 的相位条件来绘制根轨迹。若平面上某一点满足相角方程使 $L(s)=180°$,那么它必然满足**幅值条件**(**magnitude condition**)。方程(5-6d)给出了这一条件,整理可得

$$K=-\frac{1}{L(s)}$$

由于根轨迹上的点 s,满足 $L(s)$的相位为 180°,因此我们可以将幅值条件写为

$$K=\frac{1}{|L|} \tag{5-81}$$

式(5-81)有代数上和几何上的不同解释,为了分析其几何意义,考虑 $1+KL(s)=0$ 的根轨迹,其中:

$$L(s)=\frac{1}{s[(s+4)^2+16]} \tag{5-82}$$

这个传递函数的根轨迹如图5-20所示，在图5-20中画出了对应阻尼比为$\zeta=0.5$的线，根轨迹与这条线的交点用(•)标出。假设我们希望设定增益值来使方程的根在这些点上，这就相当于选择适当的增益，以使系统的两个闭环极点的阻尼比为$\zeta=0.5$(我们很快就可以找到第三个极点)，那么，当根在这些点上时的K值为多少呢？由方程(5-81)，K值为1除以$L(s_0)$的模，其中s_0与标识出的点相对应。在图中，我们还标出了三个矢量s_0-s_1、s_0-s_2、s_0-s_3，这些都是从$L(s)$的极点到点s_0的向量(由于$s_1=0$，所以第一个向量也等于s_0)，在代数意义上，可以得到

$$L(s_0)=\frac{1}{s_0(s_0-s_2)(s_0-s_3)} \tag{5-83}$$

联合方程(5-81)，可得

$$K=\frac{1}{|L(s_0)|}=|s_0||s_0-s_2||s_0-s_3| \tag{5-84}$$

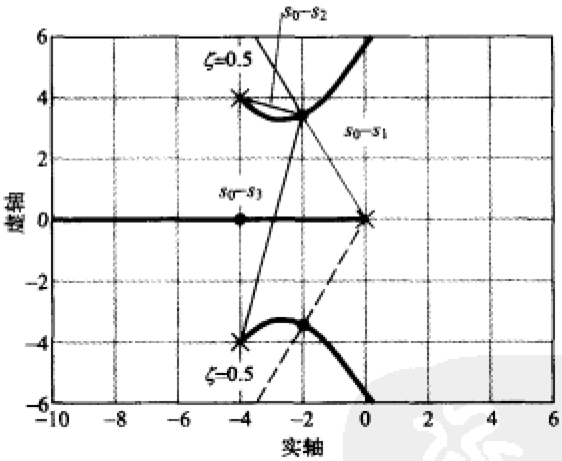


图5-20　利用$L(s)=1/s[(s+4)^2+16]$的根轨迹计算增益K的值

方程(5-84)的图形表明，这三个因式的模也就是三个向量的长度(参见附录)。因此，如果虚轴与实轴的刻度比例是相同的，就可以通过测量这三个向量的长度并把它们相乘来求得点$s=s_0$上根所对应的增益值。使用图上的比例，可以估计得

$$|s_0|\cong 4.0$$
$$|s_0-s_2|\cong 2.1$$
$$|s_0-s_3|\cong 7.7$$

这样可以估计出增益值为

$$K=4.0\times 2.1\times 7.7\cong 65$$

我们可以断定，如果K值设为65，可以认为$1+KL$有一个根在点s_0上，其阻尼比为0.5。另一个根在s_0的共轭点上，那么第三个点在哪呢？根轨迹的第三条分支就沿着负实轴，通常可以选择一个测试点，然后计算其增益，重复这一过程，直到找到$K=65$的点为止。在本例中，使用方程(5-24)中所得的根轨迹性质将会更加方便。如果m

<$n-1$,则所有根的和为常数(并不会随 K 值变化而变化)。因此未知的根必须向左移动足够的距离才能使总和不变。从图 5-20 可估计出 $s_0=-2+3.4j$,由于出发点在 $s=-4+4j$ 处,这个根向右移动了两个单位,共轭根也向右移动相等的距离,所以第三个根则由出发点 $s=0$ 处向左移动 2+2 个单位的距离,在图中我们用第三个黑点来表示了 −4 这个位置。

使用 MATLAB 也可以完成相同的工作,假设我们用命令 rlocus(sysL)来绘制根轨迹,那么再用[K,p]=rlocfind(sysL)就可以在图上画叉以标出根轨迹上想要的根,再用鼠标单击选择后,除了可以得到特征方程的根,还可以得到特征根对应的增益值 K。

最后,在参数的值选定后,还可以计算控制系统的误差常数。方程(5-82)给出了含有一个积分器的 1 型单位反馈系统的传递函数。此时斜坡响应的稳态误差由速度常数得出为:

$$K_v=\lim_{s\to 0} sKL(s) \tag{5-85}$$

$$=\lim_{s\to 0} s\frac{K}{s[(s+4)^2+16]} \tag{5-86}$$

$$=\frac{K}{32} \tag{5-87}$$

当复根的阻尼比为 $\zeta=0.5$ 时,根轨迹增益 $K=65$,因此由方程(5-96)可得 $K_v=65/32\simeq 2$。现在,如果由根轨迹位置决定的闭环动态响应可以满足要求,并且用 K_v 衡量的稳态误差也足够好,就可以由选择的增益值来完成设计。当然,如果没有可以满足所有要求的 K 值,那么为了满足系统的性能要求,就必须对控制系统做额外的改进。

5.5 运用动态补偿进行设计

控制系统的设计应当从过程本身的设计开始。在控制系统的设计过程中,潜在的控制问题以及传感器、执行机构的选择问题不应当成为我们首先重点考虑的对象。但是从设计控制器就开始考虑如何设计控制器,比如在结构中增加阻尼因素、刚度,来改变控制系统的柔韧性使系统更易于控制却是十分必要的。而一旦考虑了这些因素,控制器的设计也就开始了。如果仅通过调整比例增益不能获得满足动态响应的设计要求,就必须对动态过程进行修正或补偿。当然可以实施的补偿方法也很多,但这三类补偿方法被认为是非常简单和有效的。这就是[①]超前(lead)、滞后(lag)和超前滞后(notch)补偿。**超前补偿(Lead compensation)**近似于 PD 控制的传递函数,它主要是通过

---

① 这三种补偿方式的名称来源于其(正弦信号)频率响应,如果输出的相位超前于输入,那就是第一种超前补偿;若滞后于输入,那就是另一种滞后补偿的情况;而超前滞后的频率响应则像阶梯,除了陡变的部分外还有很平滑的部分。具体参见第 6 章。

降低上升时间和减少超调来加速系统的响应。**滞后补偿(Lag compensation)**近似于PI控制的传递函数，主要用来改善系统的稳态误差。**超前滞后校正(Notch compensation)**主要用来提高为系统为低阻尼模型时的稳定性，如我们前面所论述的卫星姿态控制系统，包括单体的传感器和测量元件，在这一部分中，我们将学习如何确定上述三种方法中的参数。在此之前通常用模拟元件组成的网络来实现超前、滞后和超前滞后，而现在最新的控制系统中引入了数字计算机技术，可以用软件实现补偿，这时我们就要求出与模拟传递函数等价的离散形式，如在第4章中所描述的，在第8章中将有更进一步的讨论。

动态补偿的传递函数形式

$$D(s)=K\frac{s+z}{s+p} \tag{5-88}$$

如果 $z<p$，称为超前补偿；如果 $z>p$，则称为滞后补偿。补偿部分通常和受控对象串联安装在前向回路中。

如图5-21所示，当然也可以安装在反馈回路中，如果这样的话对整个系统的极点没有影响，但对系统的参考输入会有不同的瞬态响应，图5-21中系统的特征方程为

$$1+D(s)G(s)=0$$

$$1+KL(s)=0$$

这里 K 和 $L(s)$ 选择为可以使方程化为前面所提的根轨迹形式。

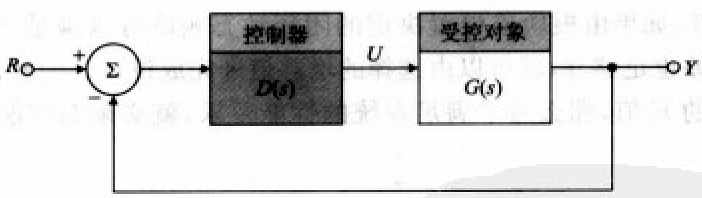


图5-21 动态补偿的反馈系统

5.5.1 超前补偿

为了说明超前补偿对系统稳定性的影响，首先考虑比例控制器 $D(s)=K$，将这个补偿用于二阶的位置控制系统，其标准传递函数为：

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

对应于参数 K 的根轨迹如图5-22中的实线所示，同时在图5-22中还有加比例微分控制的根轨迹，其中 $D(s)=K(s+2)$，改进后的根轨迹后为虚线标注的环形轨迹，正如我们在例子中所观察到的，零点的影响是使根轨迹向左移动，趋向 S 平面的稳定区域，这里如果响应速度的指标要求 $\omega_n\cong 2$，此时，就要把根设置到对应的 ω_n 点上，但是若仅使用比例控制($D=K$)，则只能产生很小的阻尼比 ζ。于是，只用比例控制的瞬态超调就很大，但是，若增加包含零点的PD控制，我们就可以使根轨迹移到一个在 $\omega_n=2$ 处有闭环根，且使阻尼比满足 $\zeta\geqslant 0.5$ 的位置，因此我们使用 $D(s)=K(s+2)$ 的形式

来"补偿"动态系统。

如前面所提到的，纯粹的微分控制并不具有现实性，这是因为微分会在传感器的放大器中引入噪声，因此只能进行近似。如果超前网络的极点远在 ω_n 的设计范围之外，那么该极点就不会严重影响设计系统的动态响应。比如，考虑超前补偿：

$$D(s)=K\frac{s+2}{s+p}$$

$p=10$ 和 $p=20$ 两种情况下的根轨迹与 PD 控制的根轨迹，如图 5-23 所示。对这些

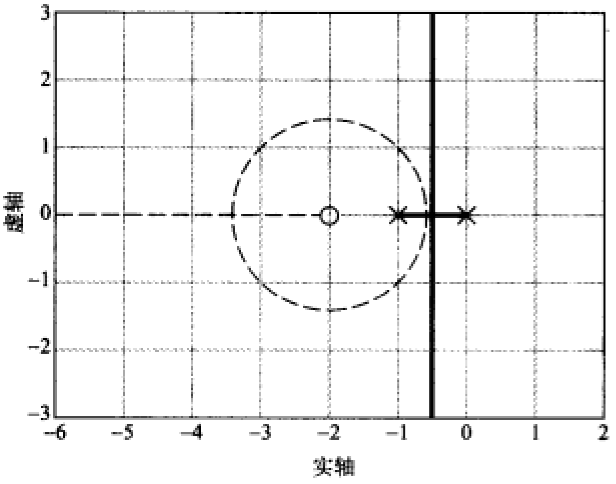


图 5-22 动态补偿系统 $1+D(s)G(s)=0$ 的根轨迹，其中 $G(s)=1/[s(s+1)]$ $D(s)=K$（实线）或 $D(s)=K(s+2)$（虚线）

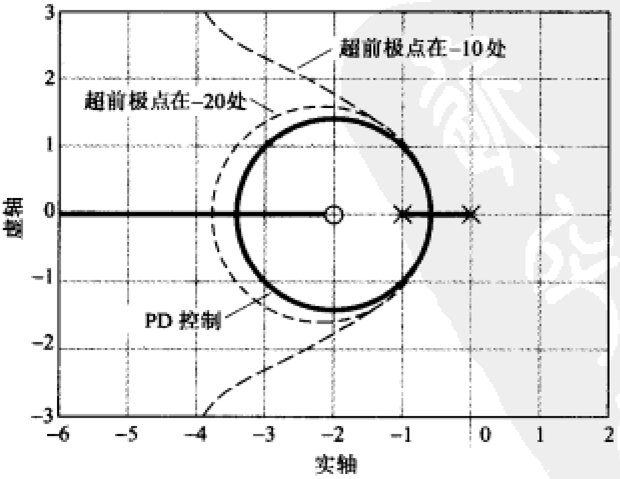


图 5-23 $G(s)=1/[s(s+1)]$ 的三种根轨迹

(a) $D(s)=(s+2)/(s+20)$

(b) $D(s)=(s+2)/(s+10)$

(c) $D(s)=s+2$ (实线)

根轨迹，最重要的事实是，当增益值很小时，即对应的极点从 $-p$ 到 -2 之间，应用超前控制的根轨迹近似于应用理想微分 $D(s)=K(s+2)$ 的根轨迹。注意，对比图中的根轨迹，可以看出极点的作用是将根轨迹推向右方，但是如果 $p>10$，极点的影响就不大了。

实际情况下，可以通过试验与误差来选择准确的 p、z 值，通过实验可以将误差控制到很小。通常情况下，根据对上升时间和调整时间的要求，零点设在闭环根 ω_n 附近，极点则在距离零点 5～20 倍的位置上。极点位置的选择是对噪声抑制的矛盾进行折中的结果，对于噪声抑制，一方面为了减少噪声需要较小的 p 值，但另一方面为了更好地补偿效果又需要较大的 p 值。一般地，如果极点与零点太接近，如图 5-23 中所看到的，根轨迹与补偿之前的形状太接近，零点就没有进行有效的补偿。另一方面，从频率响应也可以很容易看出，如果极点太靠近左侧，出现在 $D(s)$ 输出上的传感器的噪声放大率就会非常大，系统的电机或者其他执行机构就会因为控制信号中的噪声能量 $u(t)$ 而过热，对 p 值很大的系统，超前补偿的效果与理想微分控制相近，下面的例子就说明了这一点。

例 5.10　超前补偿

试对系统 $G(s)=1/[s(s+1)]$ 进行补偿，使超调量不超过 20%，上升时间不超过 0.25 s。

解：由第 3 章的内容，估计阻尼比 $\zeta\geqslant 0.5$。自然频率 $\omega_n\cong\dfrac{1.8}{0.25}\cong 7.2$ 可以满足要求，考查图 5-23 中的根轨迹，我们先试一下：

$$D(s)=K\frac{s+2}{s+10}$$

图 5-24 表明 $K=70$ 时，可以很好地满足这些要求，这时 $\zeta=0.56$，$\omega_n=7.7$ rad/s，复极点的实部在 $\zeta\omega_n=-4.3$ 处，为了保证根的和为常数 -11，第三个极点在 $-11+8.6=-2.4$ 处，因为第

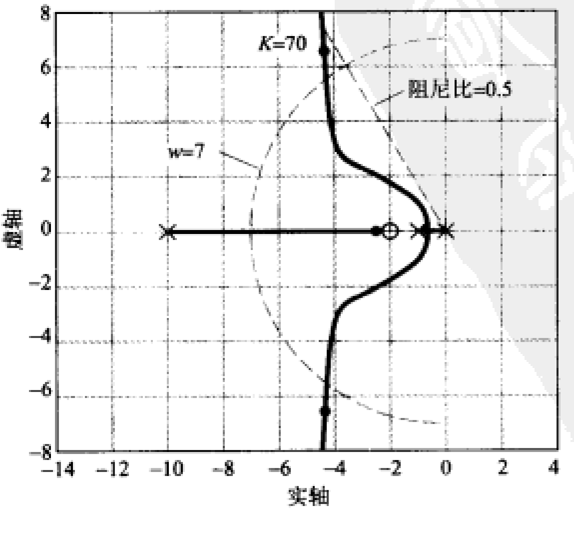


图 5-24　超前补偿的根轨迹

三个极点非常接近于−2 处的零点，超调量不会比二阶情况时多很多，图 5-25 描述了系统的阶跃响应。通常，前向通道中的超前补偿会增加阶跃响应的超调，这是因为补偿环节的零点会有微分作用，就如在第 3 章中的讨论。

如果首先选择理想的闭环极点位置，我们可以用一种方法来更准确地选择超前补偿的极点和零点位置。在选定 r_0 后，可以用根轨迹相角条件来选择 z。相同的受控对象可用来说明这种方法。

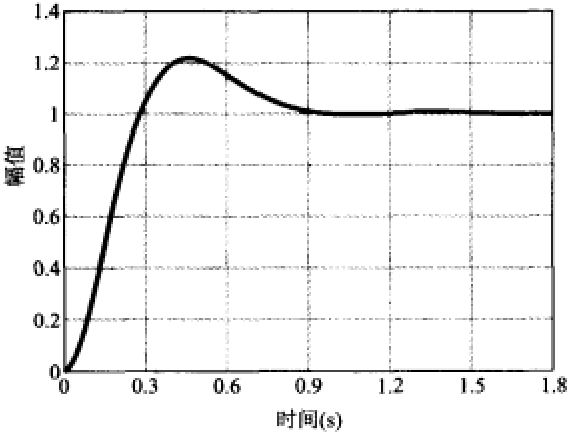


图 5-25　例 5.10 的阶跃响应

例 5.11　第二种超前补偿设计

假设我们要求闭环系统包含 $r_0=-3.5+j3.5\sqrt{3}$ 处的极点，该点对应于 $\omega_n=0.7$ 和 $\zeta=0.5$，则由第 3 章的讨论可知，此时的上升时间 $t_r\cong0.26$，超调量 $M_p\cong20\#$，噪声抑制条件要求超前极点不大于 20，设计超前补偿来满足这些要求。

解：为使超前补偿的零点尽量远在左边以减小对阶跃响应的影响，可以把超前补偿的极点置于极限 $P=20$ 处，对应在 s 平面上位置如图 5-26 所示，

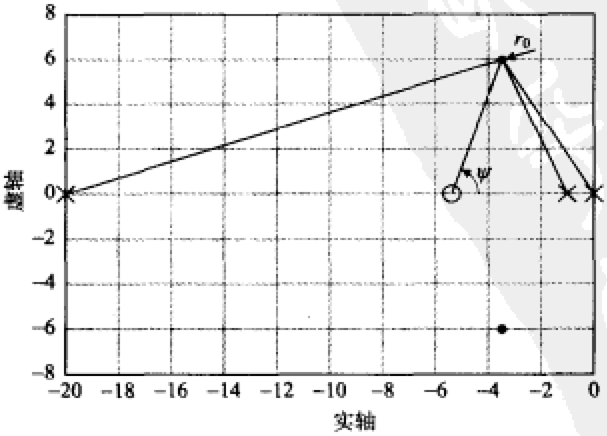


图 5-26　利用根轨迹的上特征点来构造根轨迹

由于在期望的位置上 $r_0=-3.5+j3.5\sqrt{3}$，$\angle L(s)=107.4°$，由根轨迹的相角条件，超前零点产生的相角 $\psi=72.6°$，零点的位置 $z=-5.4$，增益为 127，这样超前补偿就为：

$$D(s)=127\frac{s+5.4}{s+20} \tag{5-89}$$

点 $r_0=-3.5+j3.5\sqrt{3}$ 也将在这条根轨迹上，如图 5-27 所示，也可以选择其他的组合来得到满足要求的 $D(s)$，但会使零点的绝对值增大。零点在左半平面的极限位置随 p 趋向无穷而发生变化。当 p 取值大于 20 后，极点的作用就可以忽略不计。设计系统的阶跃响应如图 5-28 所示。

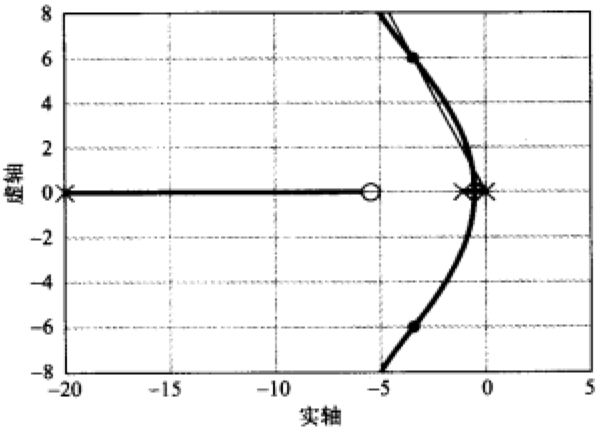


图 5-27　$L(s)=\dfrac{s+5.4}{s(s+20)(s+1)}$ 的根轨迹

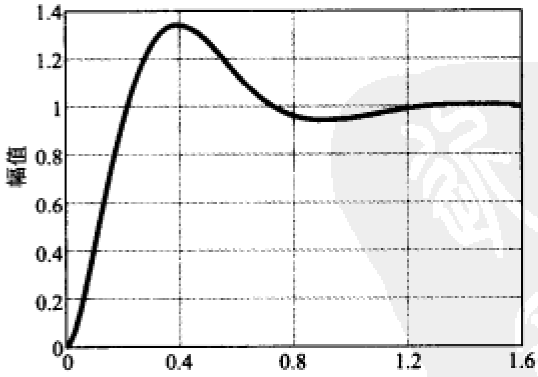


图 5-28　$L(s)=\dfrac{s+5.4}{(s+20)}\dfrac{1}{s(s+1)}$ 在 $K=127$ 时的阶跃响应

如前所述，超前补偿反映的是输入的正弦信号产生输出相角超前这一事实，如在 $s=j\omega$ 处的相角由下式给出：

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right) \tag{5-90}$$

如果 $z<p$，那么 ϕ 为正，这被定义为相角超前，利用相角来进行超前补偿设计的

具体内容将在第 6 章中涉及。

5.5.2 滞后补偿

或许应用一个或多个超前补偿可以获得令人满意的动态响应，但我们发现低频增益——有意义的稳态误差系数如速度误差 K_v 仍太小，如我们在第 4 章中所看到的，系统的类型由传递函数 $D(s)G(s)$ 在 $s=0$ 时的极点阶数决定，它决定着系统的跟随能力。如果系统为 1 型，决定斜坡输入下的误差值的速度误差常数由 $\lim\limits_{s\to 0}sD(s)G(s)$ 求得，要增大这个常数，必须应用一种特殊方法，使其不会扰乱已经满意的动态响应。这样，我们希望得到一种形式的 $D(s)$，它在 $s=0$ 处有很大的增益来增大 K_v(或者其他的稳态误差系数)，而在决定动态响应的高频段 ω_n，则接近单位值(也即无影响)。设计结果为：

$$D(s)=\frac{s+z}{s+p},\quad z>p \tag{5-91}$$

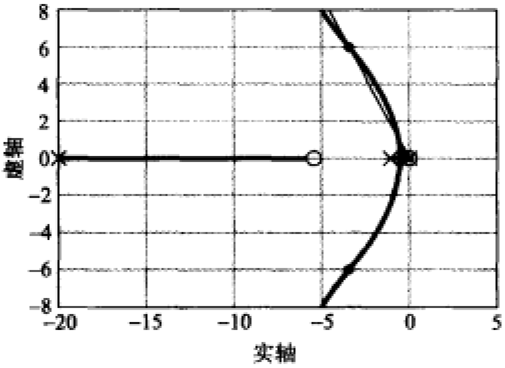
其中 z 和 p 的值相对于 ω_n 很小，而且 $D(0)=z/p=3\sim10$(该值取决于稳态增益需要放大的程度)。因为 $z>p$，由式(5-90)得到的相角 φ 为负值。由于相角滞后，因此将有这样传递函数的设计称为滞后补偿。

滞后补偿对动态响应的影响通过分析相应的根轨迹来研究，我们仍用传递函数为 $G(s)=1/[s(s+1)]$ 的系统来说明，包含超前补偿 $KD_1(s)=K(s+5.4)/(s+20)$ 的系统根轨迹如图 5-24a 所示。增大增益直到闭环根对应的阻尼比 $\zeta=0.5$，这时，应用 MATLAB 的 rlocfind 命令或者 5.5 节中介绍的方法可以求得增益值为 $K=127$，因此速度常数为

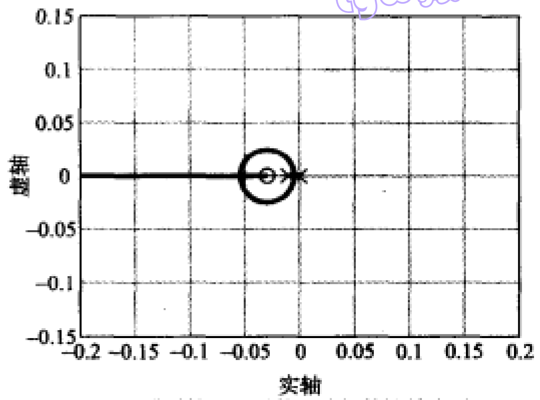
$$\begin{aligned}K_v&=\lim_{s\to 0}sKDG\\&=\lim_{s\to 0}s(127)\frac{s+5.4}{s+20}\frac{1}{s(s+1)}\\&=\frac{127*5.4}{20}=34.3\end{aligned}$$

假设我们要求 $K_v=100$，在满足它的要求，我们加入 $z/p=3$ 的滞后补偿，使速度常数增大 3 倍，同时在 $p=-0.01$ 处增加一个极点，使 z 和 p 的值都非常小，以使 $D_2(s)$ 对 $\omega_n=7$ 处的根轨迹影响甚小，结果为传递函数为 $D_2(s)=(s+0.03)/(s+0.01)$ 的滞后补偿。包括超前和滞后的补偿的系统根轨迹如图 5-29a，可以看到主导根在 $-3.5\pm j6.1$ 处，原点附近的根轨迹放大后示意在图 5-29b 中。

如图 5-29b，在引入的滞后补偿的零点和极点都很小的时候，我们就可以看到一个圆形轨迹。注意到闭环极点与滞后补偿零点 $-0.03+0j$ 很接近，该极点等效于一个缓慢的衰减环节。但由于零极点的相消作用，其幅度很小。但这一衰减过程很慢，将会对系统的调整时间产生很大影响。不仅如此，在没有零点起作用的**干扰转矩**(**disturbance torque**)的阶跃响应中，这一过程的影响将会更为明显。由于这一影响，我们就很必要在系统的高频段加入滞后的零极点补偿，以避免系统主导极点发生太大的变化。



(a) 整体根轨迹



(b) 滞后补偿附近的部分根轨迹放大显示

图 5-29　超前和滞后补偿系统的根轨迹

5.5.3　超前滞后补偿

假设已由如下的超前和滞后环节来完成补偿设计：

$$KD(s) = 127\frac{s+5.4}{s+20}\frac{s+0.03}{s+0.01} \tag{5-92}$$

但是在测试中却发现系统在 50 rad/s 处会发生振荡，这是因为在 $\omega_n=50$ 的自然频率处会发生预想不到的单体柔韧性(non-collocated flexibility)。再次进行测试，考虑到柔韧性的影响，估计系统传递函数为：

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+1)(s^2+s+2500)} \tag{5-93}$$

一位机械工程师声称这是由于许多“控制能量”(control energy)溢出到柔韧模式下，导致系统被激励而引起振荡。那么该怎么校正这种不稳定呢？这有两种可能的办法：其一是增加一个滞后补偿，使在 $\omega=50$ 处的回路增益足够小，从而可以大幅减小溢出，消除振荡。这种减小高频增益的方法称为**增益稳定法(gain stabilization)**。如果减小高频增益使响应时间变长，那么另外的方法是在接近共振点增加一个零点，以改变 ω_n 处闭环系统的相移，令此频率下的闭环极点从右半面向左半平面移动，从而消除振荡，这种方法则被称为**相位稳定法(phase stability)**，这种方式与前面提过的合体柔韧性控制(flexibility in the collocated motion control)相类似，其中我们将相位稳定法称为超前滞后补偿。以下面的传递函数作为我们的例子：

$$D_{notch}(s) = \frac{s^2+2\zeta\omega_o s+\omega_o^2}{(s+\omega_o)^2} \tag{5-94}$$

为了获得必要的相位，设计时将需要选择将补偿频率设置为高于自然振荡频率还是低于自然振荡频率。回顾根轨迹中出射角的知识就会发现，若用式(5-92)对系统补偿时，若要系统稳定，即将此时的出射角指向左半平面，就必须将补偿频率设为高于振荡频率。这样所加入补偿的传递函数形式为

$$D_{notch}(s)=\frac{s^2+0.8s+3600}{(s+60)^2} \tag{5-95}$$

补偿的增益在 $s=0$ 处恒为 1，以使 K_v 不会改变，补偿后的根轨迹如图 5-30 所示，其阶跃响应如图 5-31 所示。

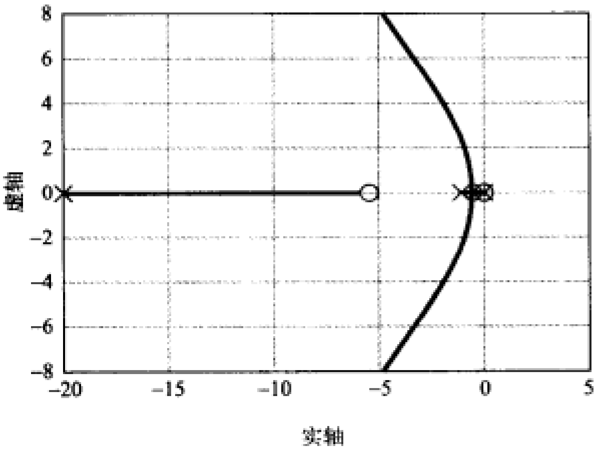


图 5-30 超前、滞后和超前滞后补偿系统的根轨迹

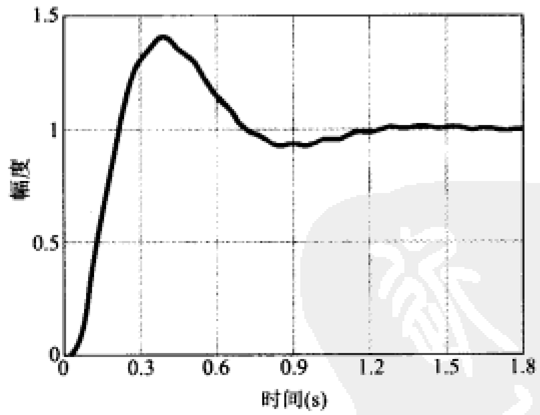


图 5-31 超前、滞后和超前滞后补偿系统的阶跃响应

考虑超前滞后或相位稳定法时，最重要的是要知道补偿的成功与否取决于能否保持修正的相位为系统的共振频率。如果修正的频率有显著的变化(这也是通常的情况)，这时就应当使补偿远离共振点，以使系统可以在大多数情况下使用，但其结果是使补偿后系统的动态性能显著下降。一般的规律是，增益稳定系统对受控对象的鲁棒性要强于相位稳定系统。

5.5.4 模拟和数字补偿的实现

在物理上，超前补偿可以以多种方式来实现。在模拟电子学中通常的方式是运用

运算放大器，示例如图5-32所示，图中所示电路的系统传递函数可用第3章的方法很容易地得到：

$$D_{lead}(s)=-a\frac{s+z}{s+p} \tag{5-96}$$

这里

$$若\ R_f=R_1+R_2,\quad a=\frac{p}{z}$$

$$z=\frac{1}{R_1C}$$

$$p=\frac{R_1+R_2}{R_2}\cdot\frac{1}{R_1C}$$

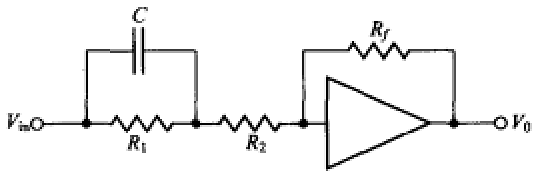


图5-32　一种滞后补偿电路

如果$D(s)$的设计已经完成且数字实现如所期望的那样，那么就可以使用第4章中的方法，首先选择采样周期T_s，并把s用$\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$来替换，例如，考虑超前补偿$D(s)=\frac{s+5.4}{s+20}$，上升时间约为0.25 s，由于上升时间包括5个周期，故选择$T_s=0.05$，把$\frac{2}{0.05}\frac{z-1}{z+1}$代入传递函数，得离散传递函数为

$$\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{40\frac{z-1}{z+1}+5.4}{40\frac{z-1}{z+1}+20}=\frac{2.27z-1.73}{3z-1} \tag{5-97}$$

化简分式，再使用时间域的函数$zu(kT_s)=u(kT_s+T_s)$，我们就可以得到式(5-97)的等价控制器方程形式

$$u(kT_s+T_s)=\frac{1}{3}u(kT_s)+\frac{2.27}{3}e(kT_s+T_s)-\frac{1.73}{3}e(kT_s) \tag{5-98}$$

控制器的输出及在控制器作用下系统的阶跃响应绘制于图5-33，图中还有应用模拟控制器的响应结果。与超前补偿一样，滞后补偿或超前滞后补偿可以按相同的过程由数字计算机来实现，当然，它们也可由模型电子装置执行。图5-34是一种滞后网络的电路图，该电路的传递函数可以由下式表示：

$$D(s)=-a\frac{s+z}{s+p}$$

这里

$$a=\frac{R_2}{R_i}$$

$$z=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}$$

$$p=\frac{1}{R_1C}$$

通常 $R_i=R_2$，因此高频段增益是单位值或 $a=1$，低频段增益增大以提高 K_v 或其他由 $k=a\,\frac{z}{p}=\frac{R_1+R_2}{R_2}$ 确定的误差常数。

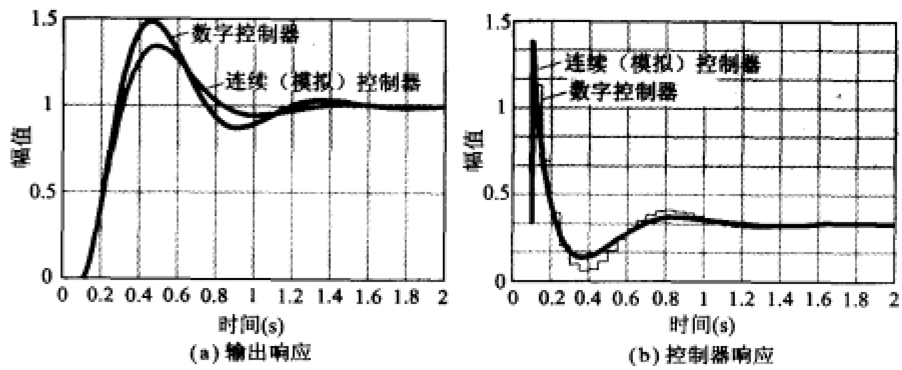


图 5-33 模拟控制与数字控制的比较

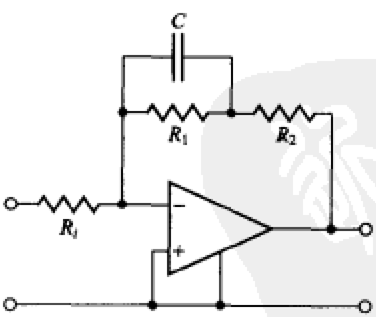


图 5-34 一种滞后补偿电路

5.6 根轨迹法设计实例

例 5.12 小型飞机的控制

图 5-35 所示的 Piper Dakota 小型飞机，升降舵和倾斜姿态之间的传递函数为：

$$G(s)=\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)}=\frac{160(s+2.5)(s+0.7)}{(s^2+5s+40)(s^2+0.03s+0.06)} \tag{5-99}$$

其中：

θ =倾斜姿态(pitch attitude)，单位为度（见图 9-29）；

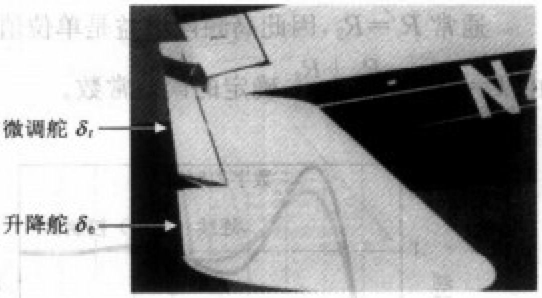
δ_e =升降舵角度(elevator angle)，单位为度。

（对飞机纵向移动的详细讨论，参考图 10-30。）

(a) 设计自动驾驶仪，要求对于升降舵阶跃输入时，上升时间不超过 1 s，超调量小于 10%。



(a)



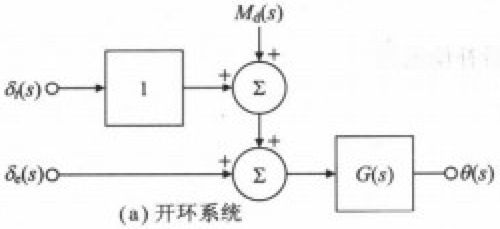
(b)

图 5-35　Piper Dakota 飞机的自动导航系统设计以及调整舵与升降舵示意（图片来自 Denise Freeman）

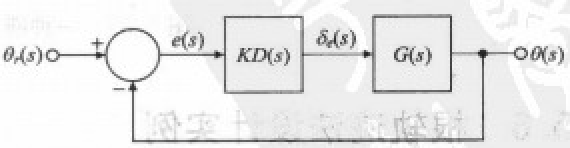
(b) 当有一个常量扰动力矩作用于飞机上，也就是重心偏移的情况，为了使飞机平稳飞行，驾驶仪必须提供一个固定的控制力给控制器，以使飞机能够平稳飞行。扰动力矩和姿态之间的传递函数与由升降舵得到的函数相同，即：

$$\frac{\theta(s)}{M_d(s)}=\frac{160(s+2.5)(s+0.7)}{(s^2+5s+40)(s^2+0.03s+0.06)} \tag{5-100}$$

其中 M_d 为作用在飞机上的力矩，在飞机机翼上有一个单独的微调舵 δ_t，它自身可以动作来改变施加在飞机上的力矩，如图 5-35 所示。其影响可以用图 5-36a 中的框图来表示，在人工驾驶与自动驾驶下都希望可以通过调节微调器来使升降舵的输出为零，即 $\delta_e=0$，在手动驾驶时，这意味着使飞机可以保持一定姿态而不需要施加外力，而在自动驾驶时则可以减少电能的需要量以及可以减少因需操纵升降舵而造成的伺服电机的磨损。试设计自动驾驶仪来控制微调舵 δ_t，使 δ_e 的稳定值在任意固定力矩 M_d 下为零并且能满足 a 部分的性能指标。



(a) 开环系统



(b) 包括微调装置的反馈系统

图 5-36　自动导航仪的框图

解：

(a) 为了满足上升时间 $t_r \leqslant 1$ s 的要求，式(3-38)指出，对于理想的二阶系统，ω_n 必须大于 1.8 rad/s；为了保证超调量小于 10%，图 3-28 表明，ζ 应当大于 0.6。在设计过程中，我们可以考

查备选的反馈补偿的根轨迹，如果根轨迹显示可以满足设计的原则，就可以测试系统的时间响应。但是本例是四阶系统，这些设计标准可能不够有效，或者它们可能太严格。

刚开始设计的时候，研究比例反馈的系统特征通常都是很意义的，就是使 $D(s)=1$，如图 5-36b 中所示，应用 MATLAB 生成对应参数 K 的根轨迹以及获得 $K=0.3$ 时比例反馈的时间响应的命令为：

```
numG = 160*conv ([1    2.5],[1     0.7]);
denG = conv([1   5    40],[1   0.03    0.06]);
sysG = tf(numG,denG);
rlocus(sysG)
K = 0.3
sysL = K*sysG
sysH = tf(1,1);
[sysT] = feedback (sysL,sysH)
step(sysT)
```

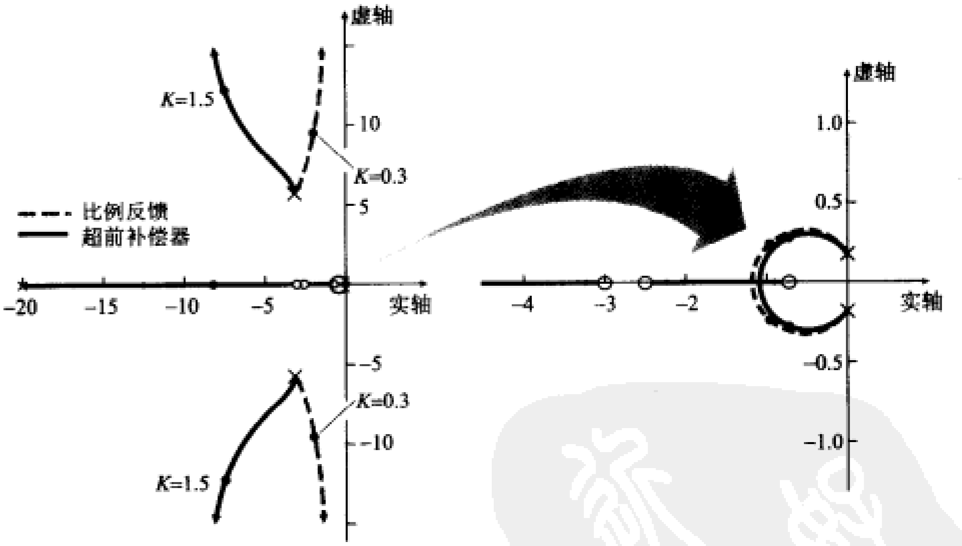


图 5-37 自动驾驶仪的根轨迹

根轨迹和时间响应的结果分别如图 5-37 和图 5-38 中的虚线所示，注意在图 5-37 中的两个比较快的根的阻尼比 ζ 都是小于 0.4 的。无论如何调整，这两个根所对应的最大阻尼比也只能达到大约 0.3，自然比例反馈是不能令人满意的，而且极慢速度的根对图 5-38 中虚线 $K=0.3$ 对应的系统时间响应也有一定的影响，因为它们导致很长的调整时间。但是，由快速根表示的系统前几秒的响应决定了设计的补偿是否满足性能指标。而快速根的低阻尼使系统响应出现振荡，这将导致过大的超调量和比期望长得多的调整时间。

在 5.5.1 节中，我们已经知道了超前补偿可以使根轨迹向左移动，而这里要求增大系统阻尼比，只有反复试验才能得合适的极点和零点位置，因此式(5-88)中的 $z=3$ 和 $p=20$ 可以显著地使根轨迹中变化最快的那支向左移动，则有

$$D(s)=\frac{s+3}{s+20}$$

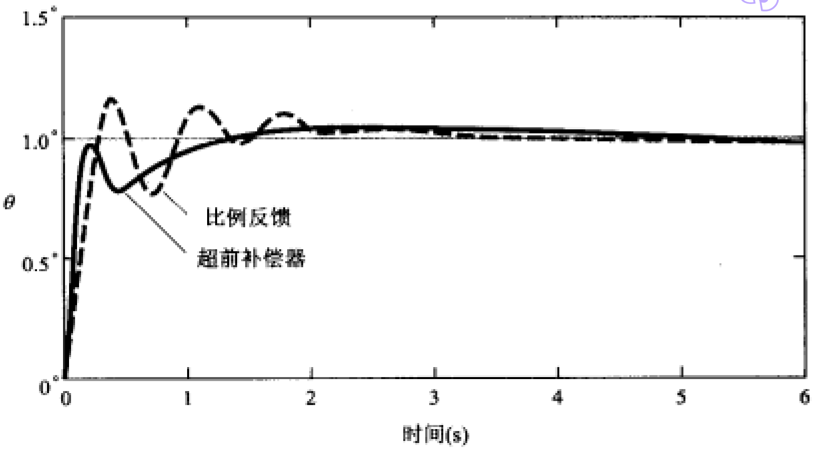


图 5-38　自动驾驶仪的时域响应

同样在反复的试验后才能得到可以满足性能指标的 K 值，引入了上述补偿的 MATLAB 命令为：

```
numD = [1  3];
denD = [1  20];
sysD = tf(numD,denD);
sysDG = sysD*sysG
rlocus(sysDG)
K = 1.5;
sysKDG = K*sysDG;
sysH = tf(1,1)
sysT = feedback(sysKDG,sysH)
step(sysT)
```

此时得到的根轨迹和对应的时间响应如图 5-37 和图 5-38 中的实线所示，注意与 $K=1.5$ 时的对应的快速根阻尼比 $\zeta=0.52$，这比期望值略偏小，而自然频率为 $\omega_n=15$ rad/s，却比我们期望的快很多，因此，这些值已经非常接近要求，可以来研究它的时间响应，事实上尽管只有非常小的余量。但时间响应的上升时间 $t_r\cong 0.9$，超调量 $M_p\cong 8\%$，两者都已满足性能指标要求。

总之，主要的设计步骤包括调整补偿以影响快速根，并考查上述调整对时间响应的影响，以及反复进行以上设计直到性能指标得到满足为止。

(b) 调整舵的作用是通过提供一个力矩来消除升降舵在稳态时的非零输入，此时若对升降舵输出 δ_e 积分，并将积分反馈到输入调整装置，那么调整舵就能提供飞机保持在任意姿态的力矩，消除稳态时的 δ_e 输入，这种思想可以由图 5-39a 来说明。

若积分器的增益足够小，那么由于引入的积分环节对系统稳定性的影响非常很小，同时由于反馈环没有改变，系统响应也与原来相似，为分析方便，图 5-39a 所示的框图可经简化为图 5-39b，其补偿环节包括 PI 控制形式：

$$D_I(s)=KD(s)\left(1+\frac{K_I}{s}\right)$$

但在分析过程中始终都要明白，实际的补偿部分有两个输出，即 δ_e(用于升降舵伺服电机)和

δ_t(用于调整舵伺服电机)。

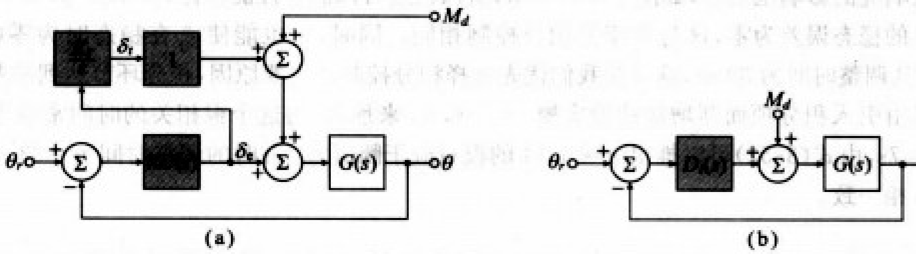


图 5-39 调整舵控制回路的框图

加入积分项的系统特征方程为

$$1+KDG+\frac{K_I}{s}KDG=0$$

为了便于研究，我们很有必要绘出系统随 K_I 变化的根轨迹，但是上式并不符合式(5-6)给出的标准形式，于是，将上式除以 $(1+KDG)$ 得：

$$1+\frac{(K_I/s)KDG}{1+KDG}=0$$

为使上式变为根轨迹形式，令

$$L(s)=\frac{1}{s}\frac{KDG}{1+KDG} \tag{5-101}$$

在 MATLAB 中，可以用 sysT 来计算 $\frac{KDG}{1+KDG}$，我们也可以用 sysl=tf(1,[1 0])来构造积分器，而由 K_I 所决定的回路增益可以用 sysL=sysl * sysT 来求取，关于 K_I 的根轨迹则由用命令 rlocus (sysL)绘出。

从图 5-40 的根轨迹可以发现伴随着 K_I 值的增加，快速根的阻尼比减小，这与添加积分项的效果相同，这也就是要使选择的 K_I 尽量小的原因，在经过多次试验之后，选取 $K_I=0.15$，该值对

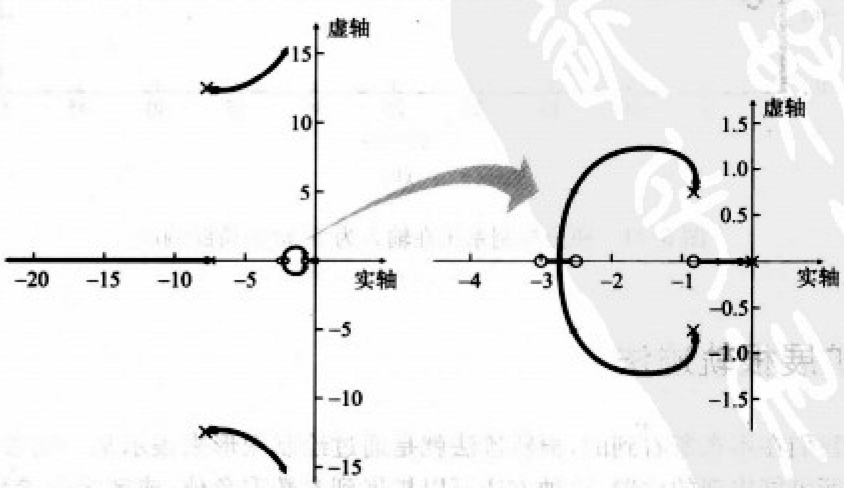


图 5-40 积分控制与超前补偿系统，当 $K=1.5$ 时以 K_I 为参数的根轨迹。对应 $K_I=0.15$ 的根在图中以 · 标出

根影响甚小——注意，此时得到的根其实就在未加入积分补偿时所得的根的上部——对系统短期的阶跃响应的影响也很小，如图 5-41a 所示，所以仍然可以满足性能指标，但 $K_I=0.15$ 可以使系统输出的稳态误差为零，这与期望的积分控制相同。同时，它也能使 δ_e 在稳态时为零(图 5-41b 说明其调整时间为 30 s)，这就是我们优先选择积分控制的主要原因，积分环节达到参考值的时间可以由引入积分项而新增加的慢实根 $s=-0.14$ 来预测，与这个根相关的时间常数为 $\tau=1/0.14\cong 7s$，由式(3-52)可以推出 $\sigma=0.14$ 的根对应于阈值为 1%时的调整时间 $t_s=33$ s，这与图 5-41b 相一致。

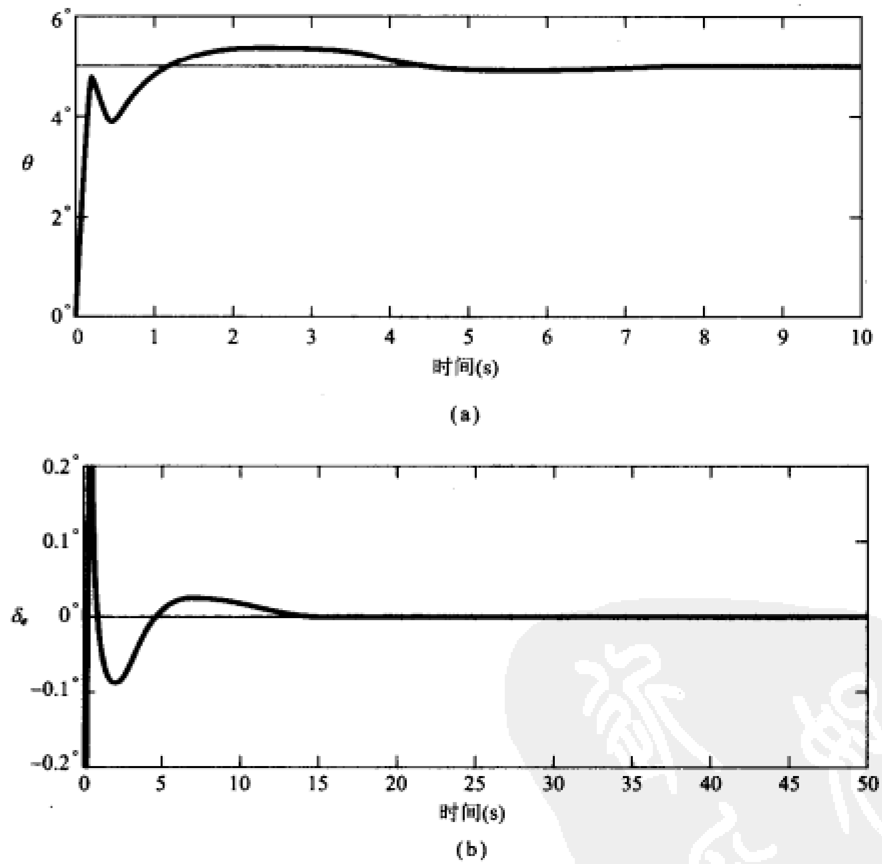


图 5-41 积分控制系统在输入为 5° 时的阶跃响应

5.7 扩展根轨迹法

正如我们在本章所看到的，根轨迹法就是通过绘制图形来表示某一实参数变化时方程的根所可能出现的位置，这种方法可以扩展到参数取负值，或者多个参数的情况，甚至系统存在时间延迟的情况。在本节中将考查这些可能性，而对简单的非线性系统我们也将在第 9 章进行很有趣的讨论。

5.7.1 绘制负(0°)根轨迹规则

现在我们来考虑修改根轨迹的绘制过程，以允许分析参数为负值时的情况。在一些重要的情形下，受控对象的传递函数有零点在右半平面，而且被称为非最小相位。其结果通常是得到根轨迹形如：$1+A(z_i-s)G'(s)=1+(-A)(s-z_i)G'(s)=0$，这样在标准形式下，参数 $K=-A$ 为负值。在建立控制系统中，存在另外一个重要的问题，需要我们理解负根轨迹(negative root locus)。在实际执行器中，我们不可避免地会遇到一些放大器或其他组成模块要我们去选择其增益的符号。由**墨菲定律(Murphy's Law)**[①]可知，如果系统刚开始就是闭环，那么，除非工程师已经清楚当系统的增益为负数，而不是正常的正数时的系统响应，否则增益的符号就是错的，这也将会导致不可预料的结果。于是，我们要问，绘制负根轨迹的规则是什么呢(对于负参数的根轨迹)？无论如何，对于 K 的负数取值，式(5-6)必须仍然成立，因为它意味着 $L(s)$ 为正实数，换句话来说，也就是对于负根轨迹，相位条件为

负根轨迹上 s 对应的 $L(s)$ 的相角为 $0°+360°(l-1)$。

基本上，绘制负根轨迹的步骤与正根轨迹的是相同的，不同的只是使 $L(s)$ 相角为 $0°+360°(l-1)$ 点取代了相角为 $180°+360°(l-1)$ 的点。基于此，负根轨迹也称为 0° 根轨迹，这样，我们发现根轨迹在偶数个实极点与零点(零点的个数已经为偶数)的左侧。计算极大的 s 值时根轨迹的渐近线和前面正根轨迹相似，为

$$\alpha=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m} \tag{5-102}$$

但是我们要修改角度的计算式为

$$\phi_l=\frac{360°(l-1)}{n-m},\quad l=1,2,3,\cdots,n-m$$

(从 180° 根轨迹移动 $180°/(n-m)$ 得到)，下面就是绘制 0° 根轨迹的方法。

规则一：(与前面相同)根轨迹有 n 条分支从极点出发，其中 m 条结束于零点，剩余 $n-m$ 条趋向渐近线向无穷远延伸。

规则二：偶数个零极点左侧的实轴是根轨迹的一部分。

规则三：根轨迹渐近线由下式来描述：

$$\alpha=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=\frac{-a_1+b_1}{n-m}$$

$$\phi_l=\frac{360°(l-1)}{n-m},\quad l=1,2,3,\cdots,n-m$$

注意：这里的相位条件从 0° 开始，而并不是正根轨迹中的 180°。

规则四：根轨迹的分支从极点离开的出射角与进入零点的入射角，可从接近零极点的根轨迹上的点求得

$$q\phi_{dep}=\sum\psi_i-\sum\phi_i-360°(l-1)$$

---

① 墨菲定律：如果什么事可能会变得糟糕的话，那么它会变得更糟。

$$q\psi_{\text{sen}}=\sum\phi_i-\sum\psi_i+360^\circ(l-1)$$

其中 q 是零极点的重数，而 l 可以取 q 个整数值，使角度在 $\pm180^\circ$ 之间。

规则五：根轨迹与虚轴的交点上或者满足 $s=j\omega_0$，或者是劳斯判据中从稳定向不稳定转变的临界点。

规则六：根轨迹上的点（$L(s)$的角度为 $0^\circ+360^\circ(l-1)$）满足下式时，这些点也是特征方程的重根

$$b\frac{da}{ds}-a\frac{db}{ds}=0$$

这里将构造根轨迹的方法扩展到包含负数的情况，其结果就是，我们可以形象地看到根轨迹是显式特征方程 $1+KL(s)=0$ 的特征根所有可能取值的连续曲线的集合。这里的 K 对应于一切实数的取值，既可以是正数也可以是负数。对应于正 K 值的任一条根轨迹的分支以一定角度从极点射出，也就有另一条分支对应于负 K 值以另一个角度从同一个极点射出，同样地，所有的零点上也都有两条根轨迹进入，一条对应于正的 K 值，另一条则是负的。

至于其他多余的 $n-m$ 条，也将会有 $2(n-m)$ 条分支在 K 值趋向于正的无穷大或负的无穷大时，向渐近线无穷接近。另外，对单极点或单重零点，两条进入和离开的分支恰好相隔 180°。对二重零点或极点，两条正根轨迹分支相隔 180°，而两条负根轨迹则与正根轨迹相隔 90°。

负根轨迹通常用于研究非最小相位系统，一个最为熟知的例子就是蒸汽发电机中锅炉的液位控制。如果其中的液位过低，那么控制阀就会将相对低温的水加入容器中的沸水，其最初的效果是降低了炉中水的沸腾率（the rate of boiling），气泡的数量减少和其体积变小，而且在加入的水量不足时还会导致液面下降，这一最初的下溢现象就是非最小相位系统的典型特征。另一个典型的非最小相位系统是飞机的高度控制，为了让飞机爬升，升降舵向上的偏差会使飞机在旋转和爬升之前有一个下坠的阶段，一架波音747（Boeing 747）就可以用下面标准的传递函数来描述

$$G(s)=\frac{6-s}{s(s^2+4s+13)}\tag{5-103}$$

为了将 $1+KG(s)$ 化为根轨迹的形式，我们需要乘上(-1)得到

$$G(s)=-\frac{s-6}{s(s^2+4s+13)}\tag{5-104}$$

例5.13　飞机系统的负根轨迹

绘制下面方程的根轨迹

$$1+K\frac{s-6}{s(s^2+4s+13)}=0\tag{5-105}$$

解：

规则一：根轨迹有三条分支和两条渐近线。

规则二：$s=0$ 点左侧与 $s=6$ 右侧实轴在根轨迹上。

规则三：渐近线的偏角为 $\phi_l=\frac{(l-1)360^\circ}{2}=0^\circ,180^\circ$，而渐近线的中心 $\alpha=\frac{-2-2-(6)}{3-1}=-5$。

规则四：根轨迹的分支从极点 $s=-2+j3$ 离开的出射角为

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{3}{-6}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{3}{-2}\right)-90°+360°(l-1)$$

$$\phi=159.4°-123.7°-90°+360°(l-1)$$

$$\phi=-54.3°$$

MATLAB 得到的根轨迹如图 5-42 所示，可以看出图中的结果与这些计算值是相一致的。

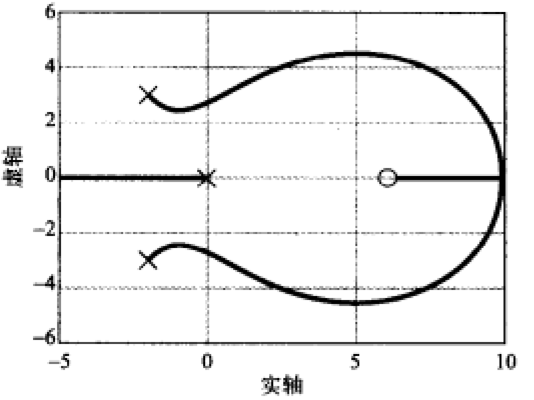


图 5-42　$L(s)=(s-6)/s(s^2+4s+13)$ 的负根轨迹

5.7.2　考虑两个参数的情况

在实际控制中，一项重要的技术就是考虑包含两个闭环的系统，内环包含着执行器或动态过程的一部分，外环包含着受控对象和整个内部控制器。这种过程称为**双回路(successive loop closeure)**，选择控制器时要求内环鲁棒性好，而且作为独立系统也有很好的响应，因此外环与没有内环参与的过程相比，可以设计得更简单、更有效。下面的简单例子将说明应用根轨迹研究含两个参数的系统的方法。

例 5.14　包含两个参数的根轨迹

图 5-43 所示的是比较常见的伺服机械装置的框图，这里的测速装置(转速计)是可以调整的，而我们的问题也是利用根轨迹来指导选择转速计的增益 K_T 和放大器增益 K_A。图 5-43 中系统的特征方程为

$$1+\frac{K_A}{s(s+1)}+\frac{K_T}{s+1}=0$$

但这并不是 $1+KL(s)$ 的标准形式。对分式进行化简，得到特征方程

$$s^2+s+K_A+K_Ts=0 \tag{5-106}$$

这是一个包含两个参数的函数，但根轨迹法一次只能考虑一个参数，这里，我们将增益 K_A 设为固定值 4，首先考虑关于参数 K_T 的根轨迹，由 $K_A=4$，式(5-106)可以化为关于 K_T 的根轨迹标准形式，其中 $L(s)=\frac{s}{s^2+s+4}$ 或

$$1+K_T\frac{s}{s^2+s+4}=0 \tag{5-107}$$

此时方程 $L(s)$ 的零点在 $s=0$ 处，极点在 $s^2+s+4=0$ 的根或 $s=-1/2\pm1.94\mathrm{j}$ 处，应用前面的规则所绘制的根轨迹如图 5-44 所示。

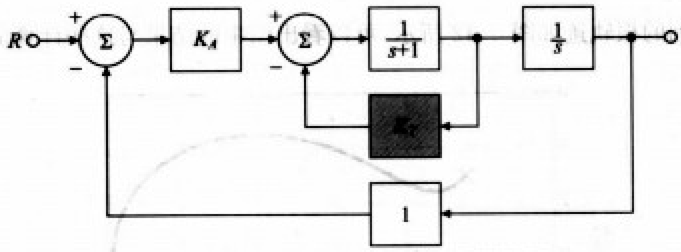


图 5-43　带转速计反馈的伺服机构框图

依据根轨迹图，我们就可以选择 K_T 值，以使复数根有特定的阻尼比或者可以使特征方程具有令人满意的根，考虑 $K_T=1$，选定 K_T 的测试值之后，我们可以引入新参数来改变方程的形式使 $K_A=4$ 变为 $K_A=4+K_1$，然后再来分析其影响，变量 K_1 所决定的根轨迹标准形式如式(5-84)，这里 $L(s)=\frac{1}{s^2+2s+4}$，所以方程根轨迹形式为：

$$1+K_1\frac{1}{s^2+2s+4}=0 \tag{5-108}$$

注意，方程(5-108)的新根轨迹的极点也在对应参变量 K_T 的根轨迹上，而且此时 $K_T=1$，根轨迹绘制如图 5-45 中所示。其中的虚线是此前对应 K_T 的根轨迹。我们可以先绘制参数 K_1 的根轨迹，然后将方程变形，再绘制对应参数 K_T 的根轨迹，根据一定的原则，在参数 K_A 和 K_T 之间变化并应用根轨迹法研究两个参数对特征方程根的影响。当然，我们也可以绘制 K_1 取负值，$K_A<4$ 时的根轨迹。

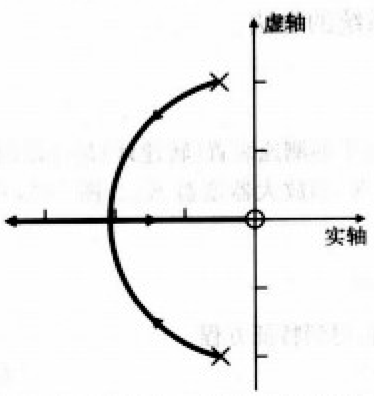


图 5-44　图 5-43 中的闭环系统与参数 K_T 相关的根轨迹

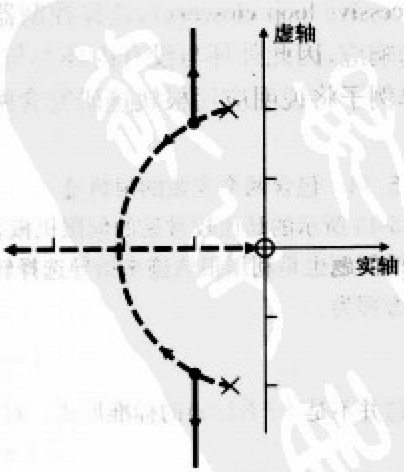


图 5-45　$K_T=1$ 时 $K_1=K_A+4$ 的根轨迹

5.7.3 时间延迟

时间延迟经常出现在控制系统中，它既有可能来自过程本身的延迟，也有可能来自测量信号过程的延迟。化学系统通常都会包含时间延迟过程，它表示物质通过导管或其他传输装置的传送时间。在测量火星探测器的姿态时，由于光速的原因，测量信号返回地球的过程中会有明显的时间延迟。而计算机有周期时间以及数据是以一定的离散间隔来处理的，因此数字控制系统中也经常存在小的延迟。时间延迟总是降低系统的稳定性，因此分析它对系统的影响就很重要，在本节中，我们将讨论如何应用根轨迹来分析这些问题，虽然第 6 章的频率响应法将会介绍一种分析时间延迟的精确方法，但了解不同的分析设计方法可以使设计者得到更好的设计结果。

考虑第 2 章中讲述的热交换器温度控制系统设计的例子，控制量 A_s 和被控的输出温 T_m 之间的传递函数由两个一阶过程和一个 5 s 的时滞 T_d 过程来描述，由于实际中的温度传感器安放在系统的下游，所以读数会有一个延迟，从而产生时间延迟，其传递函数为

$$G(s)=\frac{e^{-5s}}{(10s+1)(60s+1)} \tag{5-109}$$

其中 e^{-5s} 表示所产生的时间延迟[①]。

以比例增益 K 为参数的根轨迹方程为

$$\begin{gathered}1+KG(s)=0\\ 1+K\frac{e^{-5s}}{(10s+1)(60s+1)}=0\\ 600s^2+70s+1+Ke^{-5s}=0\end{gathered} \tag{5-110}$$

我们将如何绘制方程(5-110)的根轨迹呢？由于这不是一个多项式，因此就不能使用以前例子中的方法，而只能用将要介绍的另外两个方法来代替，即近似处理法或直接应用相角条件法。

第一种方法通过把无理函数 e^{-5s} 近似为有理函数，使这个给定的问题转化为我们前面已经解决过的问题，因为我们对控制系统特别是低频段感兴趣，所以我们希望获得一种近似在 s[②] 很小时产生很好的效果。最常用的近似方法是由 H. Padé 提出来的，这种方法使一个有理函数的级数展开和超越函数 e^{-5s} 的级数展开相一致，其中有理函数的分子为 p 阶多项式，它的分母为 q 阶多项式。得到的结果称为对 e^{-5s} 的 (p,q) Padé 近似[③]（(p,q) Padé approximant），我们首先计算 e^{-s} 的近似表达，然后在最后的结论中用 $T_d s$ 代替 s，它就可以适用于任何的延迟情形。

为了说明这一过程，首先应用(1,1)Padé 近似。在本例中，我们希望选择 b_0、b_1 和

---

① 时间延迟在工业过程中通常指“传输滞后”。

② 无理函数 e^{-5s} 对于所有的有限的 s 值都是解析的，所以可以用一个有理式来近似，如果涉及非解析函数，如 $\sqrt{s}$，那么在 $s=0$ 附近进行近似的时候就要非常注意了。

③ 使用 (p,p) Padé 近似来近似 T 秒的时间延迟是很常用的方法，而且也可以用 MATLAB 命令[num, den]=pade(T,p)来计算。

a_0 使误差充分小

$$e^{-s}-\frac{b_0 s+b_1}{a_0 s+1}=\varepsilon \tag{5-111}$$

为进行 Padé 近似，将 e^{-s}和方程的有理函数展开成 Mclauren 级数，并使尽可能多的项相等，这两个级数项为

$$e^{-s}=1-s+\frac{s^2}{2}-\frac{s^3}{3!}+\frac{s^4}{4!}-\cdots$$

$$\frac{b_0 s+b_1}{a_0 s+1}=b_1+(b_0-a_0 b_1)s-a_0(b_0-a_0 b_1)s^2+a_0^2(b_0-a_0 b_1)s^3+\cdots$$

匹配级数的前四项系数，得到下面的方程组：

$$b_1=1$$

$$b_0-a_0 b_1=-1$$

$$-a_0(b_0-a_0 b_1)=\frac{1}{2}$$

$$a_0^2(b_0-a_0 b_1)=-\frac{1}{6}$$

方程组有无穷多个分式，但参数却只有三个，我们令前三项系数相同，并用 $T_d s$ 替代s，则(1,1)Padé 近似的结果为：

$$e^{-T_d s}\cong\frac{1-(T_d s/2)}{1+(T_d s/2)} \tag{5-112}$$

如果 $p=q=2$，则将有 5 个参数，也会有很好的近似，这里我们用(2,2)Padé 近似得：

$$e^{-T_d s}\cong\frac{1-T_d s/2+(T_d s)^2/12}{1+T_d s/2+(T_d s)^2/12} \tag{5-113}$$

从图 5-46 中的极点一零点配置中，可以很容易看出这两种近似的区别，极点的位置在左半平面，零点则在右半平面的与极点相对称的位置。

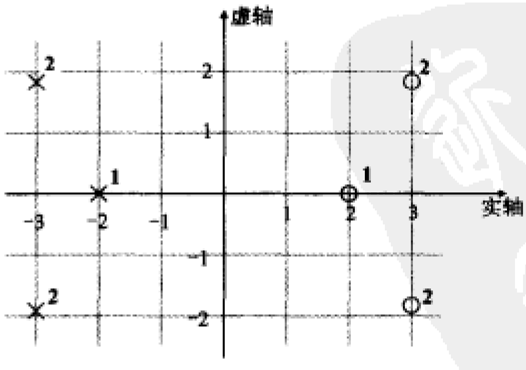


图 5-46　应用 Padé 近似 e^{-s}得到的零极点图，图中所示的数字表示相应的近似，如 x^1 表示(1,1)近似

在某些情况下，很不精确的近似也是可以接受的。对于很小的延迟，(0,1)近似也是可以接受的，它仅仅是一个形如下式的一阶滞后：

$$e^{-T_d s}\cong\frac{1}{1+T_d s} \tag{5-114}$$

为了说明延迟环节和近似的精度的影响，四种不同精度近似下热交换器的根轨迹

绘于图 5-47 中。值得注意的是，从低增益点到根轨迹和虚轴交点之间的根轨迹，近似后非常接近于精确值，不过，很显然，(2,2)Padé 曲线远比一阶延迟更接近于实际曲线。当延迟很大时，就需要用(2,2)Padé 近似进行分析了。通过对延迟环节的分析，将会阐明延迟环节会如何降低系统稳定性以及如何限制系统的响应时间。

虽然 Padé 近似可以推导出有理函数，不过从理论上来说，却未必一定要用这种方法来绘制根轨迹，相反直接应用相角条件也可以绘制含有时间延迟的系统的精确根轨迹。因为即使过程的传递函数是无理的，相角条件也并不改变，所以我们仍然需要确定使相角满足 $180°+360°l$ 的 s 的值来绘制根轨迹，如果我们把传递函数写成：

$$G(s)=e^{-T_d s}\bar{G}(s)$$

$G(s)$的相角为 $\bar{G}(s)$ 的相角减去 $\lambda\omega$，其中 $s=\sigma+j\omega$，这样我们就可以把根轨迹问题归结为：找到那些使 $\bar{G}(s)$ 的相角满足 $180°+T_d\omega+360°(l-1)$的点的过程。要绘制这样的根轨迹，我们可以固定 ω 的值，沿着 s 平面上的水平线搜索，直到找到根轨迹上的点为止，然后增加 ω 的值，改变目标角度，重复以上过程。同理，出射角度也要根据 $T_d\omega$ 进行修改，其中 ω 是所讨论极点的虚部。令人遗憾的是，MATLAB 中并没有提供绘制含有延迟环节系统的根轨迹的程序，这样，我们就只能应用 Padé 近似，但我们可以很容易地绘得精确的频率响应(或伯德图)，所以当设计人员认为 Padé 近似不能令人满意时，还可以选用第 6 章中十分有效的频率响应法。

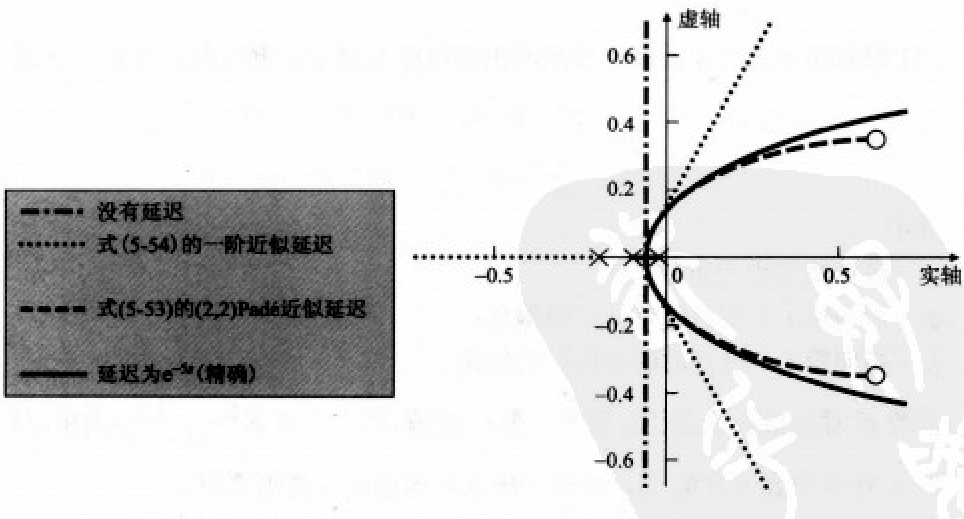


图 5-47　考虑和不考虑时间延迟的热交换器根轨迹

小结

□ 根轨迹是方程 $1+KL(s)=0$ 的根随参数 K 变化的轨迹的图像。

(1) 当 $K>0$ 时，如果$\angle L(s)=180°$成立，则相应的 s 点在根轨迹上，绘得 180°即正根轨迹。

(2) 当 $K<0$ 时，如果 $\angle L(s)=0°$ 成立，则相应的 s 点在根轨迹上，绘得 0°即负根轨迹。

☐ 如果 $KL(s)$ 是负反馈系统的开环传递函数，那么闭环系统的特征方程为：$1+KL(s)=0$，且根轨迹展示了改变增益对闭环系统根的影响。

☐ 在 MATLAB 中可由命令 rlocus(sysL)绘制系统 sysL 的根轨迹。

☐ 快速手工绘制根轨迹的技能知识，对于检验计算机的结果和修改设计是很有用的。

☐ 绘制 180°根轨迹的原则如下：

(1) 奇数和个零极点左侧的实轴在根轨迹上。

(2) 根轨迹的 n 条分支中有 m 条趋向于 $L(s)$ 的零点，其余 $n-m$ 条趋向于中心在 α 偏角为 φ_l 的渐近线：

n = 极点个数

m = 零点个数

$n-m$ = 渐近线条数

$$\alpha=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}$$

$$\phi_l=\frac{180°+360°(l-1)}{n-m},\quad l=1,2,\cdots,n-m$$

(3) 根轨迹分支从 q 重极点射出的出射角以及到达 q 重零点的入射角分别为：

$$\phi_{l,\mathrm{dep}}=\frac{1}{q}\left(\sum\psi_i-\sum_{i\neq l}\phi_i-180°-360°(l-1)\right)$$

$$\psi_{l,\mathrm{arr}}=\frac{1}{q}\left(\sum\phi_i-\sum_{i\neq l}\psi_i+180°+360°(l-1)\right)$$

其中

q = 极点或零点的重数；

ψ_i = 指向第 i 个零点的差向量的偏角；

ϕ_i = 指向第 i 个极点的的差向量的偏角。

☐ 参数 K 对应根轨迹上任意指定点要 s_0 的值，可以由式 $K=\frac{1}{|L(s_0)|}$ 求出，其中 $|L(s_0)|$ 在图中通过测量从 s_0 到每个极点和零点的距离来算出。

☐ 由命令 rlocus(sysL)画出的根轨迹，参数和对应的根可由[K, p] = rlofind(sysL)得到。

☐ 由下式给出的超前补偿

$$D(s)=\frac{s+z}{s+p},\quad z<p$$

近似于比例微分控制(PD)，在恒定的误差常数下，通常可以使根轨迹向左移动，从而提高系统阻尼比

☐ 由下式给出的滞后补偿

$$D(s)=\frac{s+z}{s+p}, \quad z>p$$

近似于比例积分控制器(PI)，在恒定的响应速度下，通过增加低频增益和降低稳定性，可减少稳态误差。

- 通过依次分析两个(或者更多的)参数，可以用根轨迹来分析双闭环回路。
- 根轨迹可用来分析时间延迟的影响。

复习题

1. 给出根轨迹的两种定义。
2. 定义负根轨迹。
3. 实轴上的哪些部分是(正的)根轨迹的一部分？
4. 实轴上 $s=-a$ 点上有两个重极点，则根轨迹在该点的出射角是多少？假定该点右侧没有其他零极点。
5. 实轴上 $s=-a$ 点上有 3 个重极点，则根轨迹在该点的出射角是多少？假定该点右侧没有其他零极点。
6. 要使根轨迹经过 r_0 点，对超前补偿零点的位置有什么要求？
7. 补偿增益为何值时能将闭环极点置于 r_0 点？
8. 超前补偿对根轨迹会产生什么影响？
9. 滞后补偿对接近闭环主导极点的根轨迹有何影响？
10. 滞后补偿对多项式参考输入的稳态误差有何影响？
11. 为什么靠近虚轴的极点的出射角很重要？
12. 定义条件稳定系统。
13. 用根轨迹法来证明有 3 个极点在原点的系统一定是条件稳定系统。

习题

▲5.1 节习题：基本反馈系统的根轨迹

5-1 将以下特征方程化为适合 Evans 的根轨迹形式，并由每个式子中最初的参数，写出 $L(s)$ 、$a(s)$ 、$b(s)$ 和参数 K，选择合适的 K 值保证 $a(s)$ 、$b(s)$ 的第一项的系数为 1，且 $b(s)$ 的阶次不大于 $a(s)$。

(a) $s+(1/\tau)=0$，参数为 τ

(b) $s^2+cs+c+1=0$，参数为 c

(c) $(s+c)^3+A(Ts+1)=0$

i. 参数为 A。

ii. 参数为 T。

iii. 如果可以的话，选择参数 c 作为变量，并说明可以或不可以的理由，若设定 A 或 T 为常数，是否可以绘出与 c 相关的根轨迹？

(d) $1+K\left[k_p+\frac{k_I}{s}+\frac{k_D s}{\tau s+1}\right]G(s)=0$，假设 $G(s)=A\frac{c(s)}{d(s)}$，其中 $c(s)$ 和 $d(s)$ 都是首一多项式，且 $d(s)$ 的阶次大于 $c(s)$ 的阶次。

i. 参数为 k_p。

ii. 参数为 k_I。

iii. 参数为 k_D。

iv. 参数为 τ。

▲5.2 节习题：绘制根轨迹的指导原则

5-2　粗略绘制图 5-48 中极点—零点图的根轨迹，估计渐近线的中心和角度、以及复极点和零点的入射角与出射角的大概值，并画出参数 K 为正值时的根轨迹，每个零点—极点图都由下面的特征方程得到：

$$1+K\frac{b(s)}{a(s)}=0$$

其中分子 $b(s)$ 的根由小圆圈"∘"表示，分母 $a(s)$ 的根则由"×"表示，注意，图 5-48c 在原点处有两个极点。

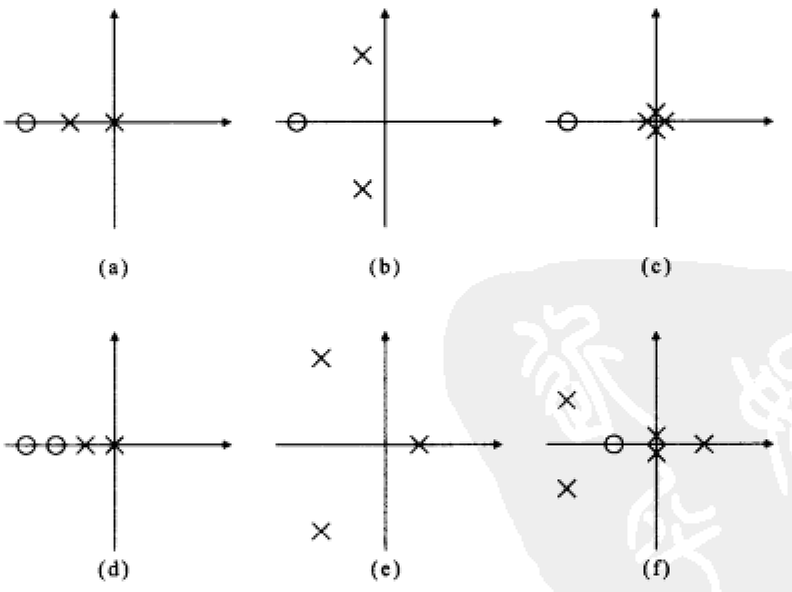


图 5-48　零极点图

5-3　已知特征方程：

$$1+\frac{K}{s(s+1)(s+5)}=0$$

(a) 画出根轨迹在实轴上的部分。

(b) 画出根轨迹 $K\to\infty$ 时的渐近线。

(c) K 为何值时，根轨迹与虚轴相交。

(d) 用 MATLAB 作图验证你的绘图结果。

5-4　*实极点和零点*。以 K 为参数绘制出方程 $1+KL(s)=0$ 的根轨迹图，其中 $L(s)$ 如下。求出渐近线、所有负零极点处的入射角、出射角和根轨迹与虚轴交点处的频率。绘图完成后，用 MATLAB 验证结果，把你所手工绘制的图形和 MATLAB 结果统一成相同比例尺。

(a) $L(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$

(b) $L(s)=\dfrac{(s+2)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$

(c) $L(s)=\dfrac{(s+2)(s+6)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$

(d) $L(s)=\dfrac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$

5-5　*复数极点和零点*。以 K 为参数绘制出方程 $1+KL(s)=0$ 的根轨迹图，其中 $L(s)$ 如下，求出渐近线、所有复零极点处的入射角、出射角和根轨迹与虚轴交点处的频率。绘图完成后，用 MATLAB 验证结果，把你所手工绘制的图形与 MATLAB 结果统一成相同比例尺。

(a) $L(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+10}$

(b) $L(s)=\dfrac{1}{s(s^2+3s+10)}$

(c) $L(s)=\dfrac{(s^2+2s+8)}{s(s^2+2s+10)}$

(d) $L(s)=\dfrac{(s^2+2s+12)}{s(s^2+2s+10)}$

(e) $L(s)=\dfrac{(s^2+1)}{s(s^2+4)}$

(f) $L(s)=\dfrac{(s^2+4)}{s(s^2+1)}$

5-6　*原点处的重极点*。以 K 为参数绘制出方程 $1+KL(s)=0$ 的根轨迹图，其中 $L(s)$ 如下。求出渐近线、所有复极点或零点处的入射角、出射角和根轨迹与虚轴交点处的频率。绘图完成后，用 MATLAB 验证结果，把你所手工绘制的图形与 MATLAB 的结果统一成相同比例尺。

(a) $L(s)=\dfrac{1}{s^2(s+8)}$

(b) $L(s)=\dfrac{1}{s^3(s+8)}$

(c) $L(s)=\dfrac{1}{s^4(s+8)}$

(d) $L(s)=\dfrac{(s+3)}{s^2(s+8)}$

(e) $L(s)=\dfrac{s+3}{s^3(s+4)}$

(f) $L(s)=\dfrac{(s+1)^2}{s^3(s+4)}$

(g) $L(s)=\dfrac{(s+1)^2}{s^3(s+10)^2}$

5-7　*固定的实极点和复极点*。以 K 为参数绘出方程 $1+KL(s)=0$ 的根轨迹图，其中 $L(s)$

如下。求出渐近线、所有复极点或零点处的入射角、出射角和根轨迹与虚轴交点处的频率。绘图完成后，用 MATLAB 验证结果，把你所手工绘制的图形与 MATLAB 结果统一成相同比例尺。

(a) $L(s)=\dfrac{(s+2)}{s(s+10)(s^2+2s+2)}$

(b) $L(s)=\dfrac{(s+2)}{s^2(s+10)(s^2+6s+25)}$

(c) $L(s)=\dfrac{(s+2)^2}{s^2(s+10)(s^2+6s+25)}$

(d) $L(s)=\dfrac{(s+2)(s^2+4s+68)}{s^2(s+10)(s^2+4s+85)}$

(e) $L(s)=\dfrac{[(s+1)^2+1]}{s^2(s+2)(s+3)}$

5-8　*右半平面的极点和零点*。以 K 为参数绘制出方程 $1+KL(s)=0$ 的根轨迹图，其中 $L(s)$ 如下，求出渐近线、所有复极点或零点处的入射角、出射角和根轨迹与虚轴交点处的频率。每次绘图完成后，用 MATLAB 验证结果，并把手工绘制的图形与 MATLAB 的结果统一成相同比例尺。

(a) $L(s)=\dfrac{s+2}{s+10}\dfrac{1}{s^2-1}$

应用超前补偿的磁悬浮系统模型

(b) $L(s)=\dfrac{s+2}{s(s+10)}\dfrac{1}{s^2-1}$

积分控制加超前补偿的磁悬浮系统

(c) $L(s)=\dfrac{s-1}{s^2}$

(d) $L(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{s(s+20)^2(s^2-2s+2)}$

根轨迹上稳定复数根的最大阻尼比为多少？

(e) $L(s)=\dfrac{(s+2)}{s(s-1)(s+6)^2}$

(f) $L(s)=\dfrac{1}{(s-1)[(s+2)^2+3]}$

5-9　绘制以下系统的 0° 根轨迹或负 K 值根轨迹：

(a) 习题 5-3 中给出的例子。

(b) 习题 5-4 中给出的例子。

(c) 习题 5-5 中给出的例子。

(d) 习题 5-6 中给出的例子。

(e) 习题 5-7 中给出的例子。

(f) 习题 5-8 中给出的例子。

▲5.3 节习题：根轨迹应用举例

5-10　某种直升飞机的接近盘旋状态下纵向移动的简化模型的传递函数为：

$$G(s)=\frac{9.8(s^2-0.5s+6.3)}{(s+0.66)(s^2-0.24s+0.15)}$$

其特征方程为 $1+D(s)G(s)=0$，首先令 $D(s)=k_p$。

(a) 计算复数零极点处的出射角与入射角。

(b) 以 $K=9.8k_p$ 为参数绘制根轨迹，要求画出 $-4\leqslant x\leqslant 4$，$-3\leqslant y\leqslant 3$ 范围内的图形。

(c) 用 MATLAB 验证结果，由命令 axes([−4 4 −3 3])获得所求的区域。

(d) 提出一种可行的(至少零点与极点的数目要一样)补偿环节 $D(s)$，使系统至少符合稳定系统。

5-11 (a) 如图 5-49 给出的系统，令 $\lambda=2$，绘制参数 K_1 从 0 变化到 ∞ 时特征方程的根轨迹，并写出相应的 $L(s)$，$a(s)$，$b(s)$。

(b) 令 $\lambda=5$，重复过程(a)，看是否有特别的情况发生。

(c) 固定 $K_1=2$，令参数 $K=\lambda$ 从 0 变化到∞，重复过程(a)。

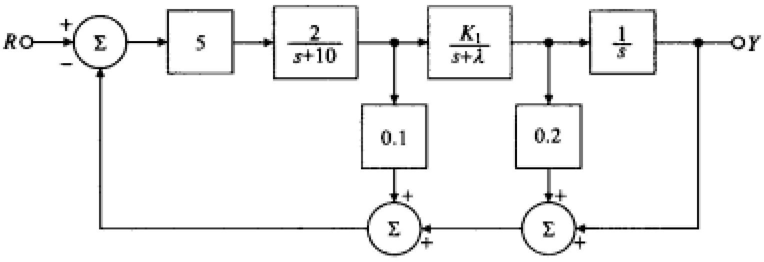


图 5-49 题 5-11 的控制系统

5-12 对于图 5-50 给出的系统，确定特征方程并绘制参数 c 为正值时的根轨迹，写出 $L(s)$，$a(s)$，$b(s)$，并在根轨迹上用箭头指示 c 的增大方向。

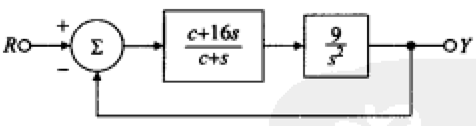


图 5-50 题 5-12 的控制系统

5-13 假设已经给出系统的传递函数为：

$$L(s)=\frac{s+z}{(s+p)^2}$$

其中 z 和 p 都是实数，且 $z>p$，证明 $1+KL(s)=0$ 以 K 为参数的根轨迹是中心在 z 处，半径为 $r=(z-p)$ 的圆。

提示：假设 $s+z=re^{j\phi}$，说明在这种假设条件下，ϕ 为实数时 $L(s)$ 为负实数。

5-14 系统的闭环传递函数有两个极点在 $s=-1$，一个零点在 $s=-2$，第三个实轴极点 p 在零点左侧的某个位置，第三个极点的不同位置会导致几种不同的根轨迹，极端情况出现于极点在无穷远处或极点位于 $s=-2$ 处时，写出相应的 p 值并绘制三种不同的根轨迹。

5-15 图 5-51 所示的反馈系统，利用渐近线、渐近线的中心、出射角、入射角和劳斯列阵，绘制以 K 为参数的根轨迹，并用 MATLAB 验证结果。

(a) $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1+3j)(s+1-3j)}$， $H(s)=\dfrac{s+2}{s+8}$

(b) $G(s)=\frac{1}{s^2}$ $H(s)=\frac{s+1}{s+3}$

(c) $G(s)=\frac{(s+5)}{(s+1)}$ $H(s)=\frac{s+7}{s+3}$

(d) $G(s)=\frac{(s+3+4j)(s+3-4j)}{s(s+1+2j)(s+1-2j)}$ $H(s)=1+3s$

5-16 考虑图5-52所示的系统：

(a) 应用劳斯稳定判据求出使系统稳定的 K 值范围。

(b) 画出特征方程以 K 为参数的根轨迹，并求汇合点和分离点处的出射角、入射角、根轨迹与虚轴的交点以及相应的 K 和 s。

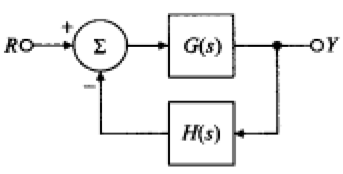


图5-51 题5-15的反馈系统

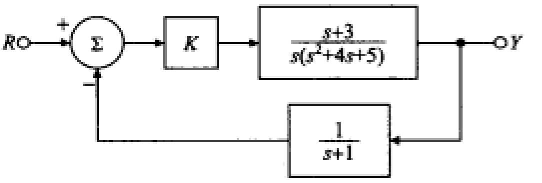


图5-52 题5-16的反馈系统

▲5.4 节习题：选取参数值

5-17 把图5-53所示系统和特征方程化为以 α 参数的根轨迹标准方程形式，并说明对应的 $L(s)$、$a(s)$ 和 $b(s)$，绘制以 α 为参数的根轨迹，估计闭环极点的位置，并分别绘制出 $\alpha=0, 0.5, 2$ 时的阶跃响应。用 MATLAB 检验你所做出估计阶跃响应的精度。

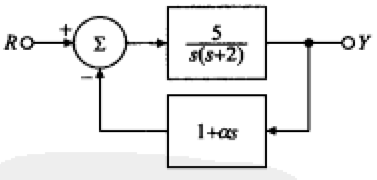


图5-53 题5-17的控制系统

5-18 假设给定装置为：

$$L(s)=\frac{1}{s^2+(1+\alpha)s+(1+\alpha)}$$

其中 α 为变化的参数。应用正根轨迹法和负根轨迹法确定使系统保持稳定的 α 的变化范围。

5-19 应用 MATLAB 中的函数rltool研究参数 a 从0变化到10时 $1+KL(s)=0$ 的根轨迹的变化情况，其中

$$L(s)=\frac{(s+a)}{s(s+1)(s^2+8s+52)}$$

特别注意 a 在2.5～3.5之间的情况，证明当 a 在什么范围内取值时，特征方程会出现重根。

5-20 应用劳斯判据，求出使得图5-54中系统稳定的增益 K 的取值范围，并用根轨迹法证实计算结果。

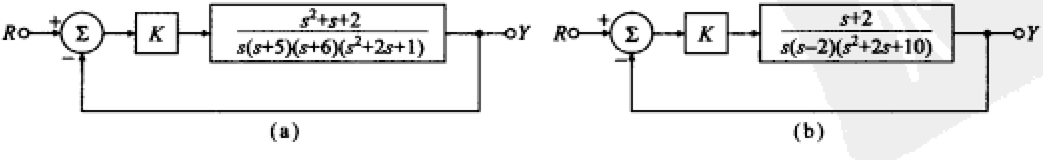


图5-54 题5-20的反馈系统

5-21 绘制如下系统的根轨迹。

$$L(s)=\frac{(s+1)}{s(s+1)(s+2)}$$

并计算出特征根的阻尼比为 0.5 时的根轨迹对应的增益值。

5-22 已知图 5-55 中的系统，

(a) 画出以 K 为参数时的闭环根轨迹。

(b) 是否存在这样的 K 值使所有根的阻尼比都大于 0.5?

(c) 求使闭环极点的阻尼比 $\zeta=0.707$ 的 K 值。

(d) 用 MATLAB 绘出最终设计结果的阶跃响应。

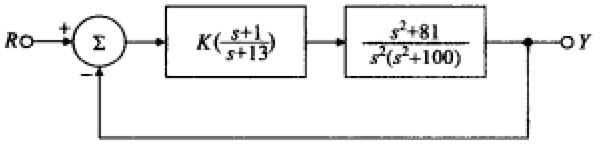


图 5-55 题 5-22 的反馈系统

5-23 对于图 5-56 所示的反馈系统，求出使主导闭环极点阻尼比 $\zeta=0.5$ 时的增益 K 值。

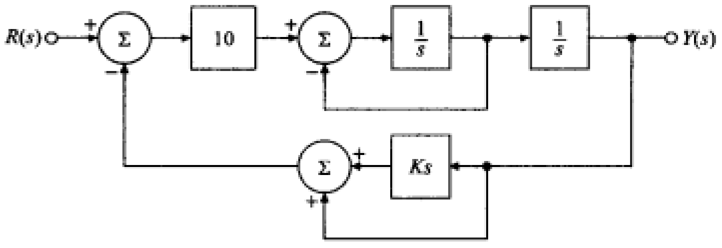


图 5-56 题 5-23 的反馈系统

▲5.5 节习题：运用动态补偿进行设计

5-24 令 $G(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)}$，$D(s)=K\frac{s+a}{s+b}$，应用根轨迹法确定补偿环节 $D(s)$ 的参数 a、b 和 K 的值，使图 5-57 所示的系统的闭环极点在 $s=-1\pm j$ 处。

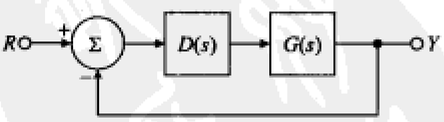


图 5-57 题 5-24～题 5-30，以及题 5-35 中的单位反馈系统

5-25 假设图 5-57 中：

$$G(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+2)} \text{ 和 } D(s)=\frac{K}{s+2}$$

绘制以 K 为参数的闭环系统的根轨迹。特别注意当 $KL(s)=D(s)G(s)$ 成立时存在的重根点。

5-26 假设图 5-57 中的单位反馈系统有一个开环受控对象为 $G(s)=\frac{1}{s^2}$，试设计超前补偿环节 $D(s)=K\frac{s+z}{s+p}$ 与该受控对象串联，使闭环系统的主导极点在 $s=-2\pm 2j$ 处。

5-27* 假设图5-57中单位反馈系统有一个受控对象为：

$$G(s)=\frac{1}{s(s+3)(s+6)}$$

设计滞后补偿使系统满足以下性能要求：

- ☐ 阶跃响应调整时间小于5秒。
- ☐ 阶跃响应超调量小于17%。
- ☐ 单位斜坡响应的稳态误差不超过10%。

5-28 一种数控机械工具的位置伺服机构，其传递函数经归一化和比例化后为

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

图5-57所示的单位反馈系统的闭环极点位于 $s=-1\pm j\sqrt{3}$ 时，系统性能指标能便满足要求，

(a) 证明仅仅选用比例控制器 $D(s)=k_p$ 时，这些性能要求不能得到满足。

(b) 试设计超前补偿 $D(s)=K\frac{s+z}{s+p}$ 来满足性能要求。

5-29 某位置伺服控制系统中设备的传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$

在单位反馈结构中设计传递函数为 $D(s)$ 的串联补偿，以满足下面闭环性能指标：

- ☐ 阶跃响应的超调量不大于16%；
- ☐ 阶跃响应的上升时间不超过0.4 s；
- ☐ 单位斜坡输入的稳态误差小于0.02。

(a) 设计超前补偿环节以使系统满足动态性能要求。

(b) 如果 $D(s)$ 为比例控制器，有 $D(s)=k_p$，问速度常数 k_v 为多少？

(c) 设计一个滞后补偿，与设计好的超前补偿串联使用，使系统满足稳态误差指标。

(d) 用MATLAB画出最终设计结果的根轨迹图。

(e) 用MATLAB画出最终设计结果的阶跃响应。

5-30 假设图5-57所示闭环系统的前向传递函数 $G(s)$ 为

$$G(s)=\frac{1}{s(s+2)}$$

设计滞后补偿使闭环系统的主导极点在 $s=-1\pm j$ 处，并且使系统在单位斜坡输入下稳态误差小于0.2。

5-31 图5-58描述的是一种基本的磁力悬浮系统。如果在参考位置附近有很小的位移时，影像探测器上的电压 e 由球位移 x(米)决定，$e=100x$、作用在球上的向上的力(牛)由电流 i(安)决定，近似的有 $f=0.5i+20x$，已知球的质量为20 g，地球引力为9.8 N/kg。功率放大器为压流转换装置(voltage-to-current device)，其输出(安培)为 $i=u+V_0$。

(a) 写出这个装置的运动方程。

(b) 求使球位于平衡位置 $x=0$ 的偏移值 V_0。

(c) 试求出 u 到 e 的传递函数。

(d) 假设控制输入 $u=-Ke$，绘制闭环系统以 K 为参数的根轨迹。

(e) 假如形如$\frac{U}{E}=D(s)=K\frac{s+z}{s+p}$的超前补尝有是有效的，计算 k，z 和 p 的值，使性能指标优于(d)中的控制系统。

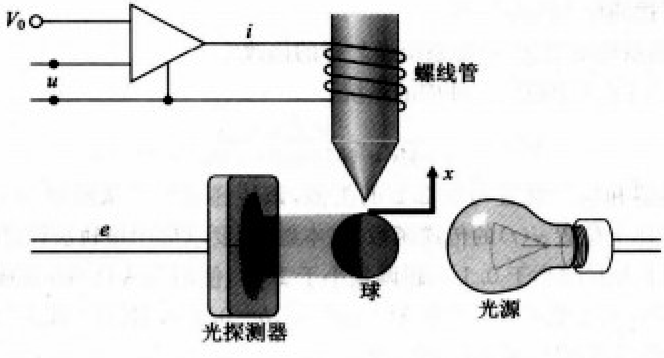


图 5-58 基本磁悬浮系统

5-32 某非最小相位系统中的受控对象为：

$$G(s)=\frac{4-2s}{s^2+s+9}$$

该受控对象控制器传递函数为 $D(s)$ 位于单位正反馈系统中。

(a) 就用根轨迹法求 $D(s)=K$ 的值(负值)，使得负反馈闭环系统的阻尼比为$\zeta=0.707$。

(b) 使用 MATLAB 绘制系统的阶跃响应。

(c) 给出输入滤波器 H_r 的值，使系统阶跃响应的稳态误差为零。

5-33 考虑如图 5-59 中的火箭定位系统。

(a) 证明若测量输出 x 的传感器有一个单位传递函数，则超前补偿器 $H(s)=K\frac{s+2}{s+4}$可以使系统稳定。

(b) 假设传感器传递函数是时间常数为 0.1 秒的单位直流增益的单极点模型，应用根轨迹法，求解使得阻尼比最大的增益值 K。

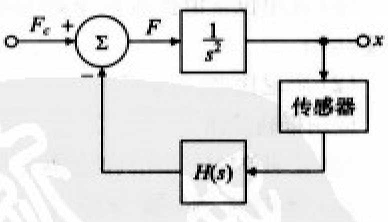


图 5-59 火箭位置控制系统框图

5-34 对于图 5-60 所示的系统，

(a) 绘制以 K 为参数的闭环系统的根轨迹。

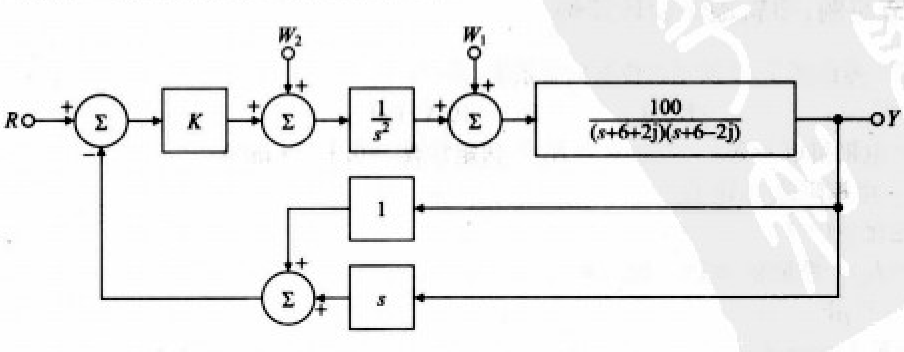


图 5-60 题 5-34 的控制系统

(b) 求出保持系统稳定的最大 K 值，在本题的其他问题中，设 $K=2$。

(c) 对于 r 的阶跃变化，稳态误差($e=r-y$)为多少?

(d) w_1 定值干扰下的稳态误差为多少?

(e) w_2 定值干扰的稳态误差为多少?

(f) 如果想提高系统阻尼比，应对系统做怎样的修改?

5-35　考虑图 5-57 中单位反馈环中的系统：

$$G(s)=\frac{bs+k}{s^2[mMs^2+(M+m)bs+(M+m)k]}$$

其中单体传感器和执行装置与例 2.2 的类似，该传递函数是从质量为 m 的实体的输入力 $u(t)$ 到质量 M 的实体上位置 $y(t)$ 的传递函数，在本题中，要求应用根轨法设计控制器 $D(s)$，使闭环系统的阶跃响应上升时间小于 0.1 s，超调量小于 10%，使用 MATLAB 完成以下问题：

(a) 通过设 $m\cong 0$ 来近似 $G(s)$，并令 $M=1, k=1, b=0.1$ 和 $D(s)=K$，问是否可以通过选择适当的 K 值来使性能指标得到满足，为什么?

(b) 假设 $D(s)=K(s+z)$，重复过程(a)，说明选择适当的 k 和 z 可以满足要求。

(c) 应用以下传递函数描述的控制器，重复过程(b)：

$$D(s)=K\frac{p(s+z)}{s+p}$$

选择 p 使(b)中计算的 K 和 z 值保持基本有效。

(d) 假设小质量 m 不可忽略，可由 $m=M/10$ 确定，检查(c)中设计的控制器是否仍然满足要求，如果不能，调整控制器参数以满足性能指标。

5-36　考虑图 5-61 中的 1 型系统，要求设计补偿环节 $D(s)$，满足以下要求：

(1) 在单位常值扰动 w 下，y 的稳态值小于 0.8；

(2) 阻尼比 $\zeta=0.7$。

应用根轨迹法：

(a) 证明单独使用比例控制器是不够的。

(b) 证明比例—微分控制可以达到要求。

(c) 求 $D(s)=k_p+k_Ds$ 中增益 k_p，k_D 的值以满足性能要求。

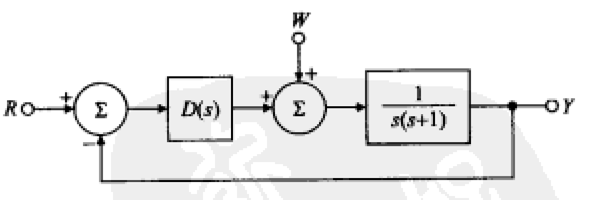


图 5-61　题 5-35 的控制系统

▲5.6 节习题：根轨迹法设计实例

5-37　考虑图 5-62 所示的位置伺服系统，其中：

$e_i=K_{pot}\theta_i$，　$e_o=K_{pot}\theta_o$，　$K_{pot}=10$ V/rad

$T=$ 电机扭矩 $=K_t i_a$　　$k_m=K_t=$ 扭矩常数 $=0.1$ N·m/A

$R_a=$ 电枢阻抗 $=10\ \Omega$

减速比$=1:1$

$J_L+J_m=$ 惯量和 $=10^{-3}$ kg·m²

$C=200\ \mu$F

$v_a=K_A(e_i-e_f)$

(a) 放大器增益 K_A 在什么范围内时系统是稳定的? 应用根轨迹法从图形上估计上限值。

(b) 确定使根在 $\zeta=0.7$ 外的增益 K_A 值，当 K_A 为该值时，系统的三个闭环极点在什么位置？

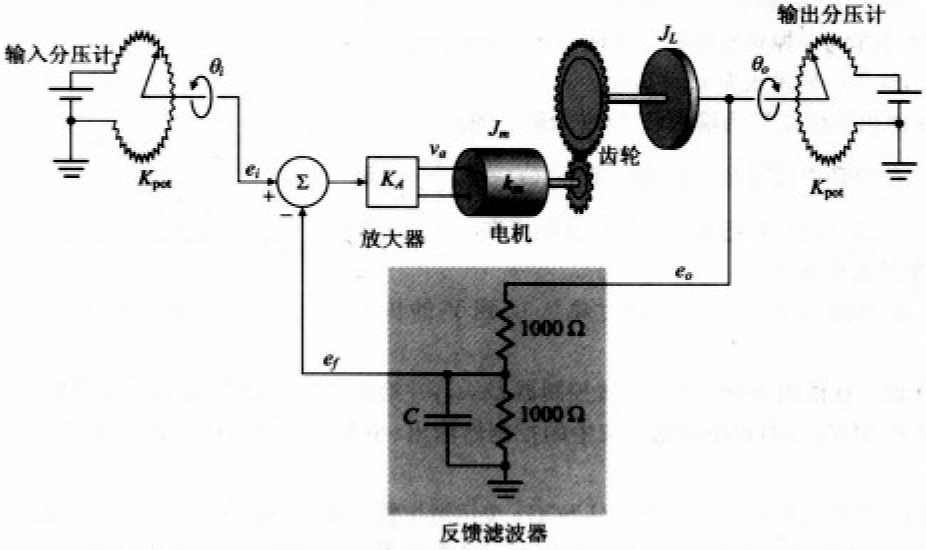


图 5-62 位置伺服控制系统(来自 Clark 1962)

5-38 设计一种录音带驱动器的速度伺服控制系统，从电流 $I(s)b(s)$ 到录音带速度的传递函数 $\Omega(s)$(毫米/毫秒·安)为：

$$\frac{\Omega(s)}{I(s)}=\frac{15(s^2+0.9s+0.8)}{(s+1)(s^2+1.1s+1)}$$

设计一种 1 型反馈系统，使得系统阶跃响应满足：

$$t_r\leqslant 4\ \text{ms},\quad t_s\leqslant 15\ \text{ms},\quad M_p\leqslant 0.05$$

(a) 应用积分补偿器 K_I/s 以获得 1 型系统，并绘制以 K_I 为参数的根轨迹，并在图中指明可以满足以上指标的极点的取值范围。

(b) 考虑形如 $k_p(s+a)/s$ 的比例积分补偿器，找出最佳的 k_p 和 a 值，并绘制出设计结果的根轨迹图，给出 k_p 和 a 值以及设计结果的速度时间常数 k_v。在图中用点·标出闭环极点的位置，并标出特征根可取值范围的边界。

5-39 图 5-63 质量为 m_c 的小车上，连接有一个倒立摆。摆的质量为 m_p，长度为 l，不计摩擦，归一化和比例化后的方程为：

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}-\theta&=-v\\ \ddot{y}+\beta\theta&=v\end{aligned}\tag{5-115}$$

其中 $\beta=\dfrac{3m_p}{4(m_c+m_p)}$ 为质量比，满足 $0<\beta<0.75$。时间由式 $\tau=\omega_0 t$ 测得，其中 $\omega_0=\dfrac{3g(m_c+m_p)}{\ell(4m_c+m_p)}$，小车的位移 y 与摆长的单位相同，由 $y=\dfrac{3x}{4\ell}$ 得到，输入由系统权重 $v=\dfrac{u}{g(m_c+m_p)}$ 归一化，下述方程可用于计算传递函数：

$$\frac{\Theta}{V}=-\frac{1}{s^2-1}\tag{5-116}$$

$$\frac{Y}{V}=\frac{s^2-1+\beta}{s^2(s^2-1)}\tag{5-117}$$

在本题中，要求设计摆为控制对象的第一层闭环系统，其中 $G(s)$ 如方程(5-116)，在第一个闭环的基础上，设计以摆和小车为受控对象的第二层闭环，其传递函数为式(5-117)，这里令质量比为 $m_c=5m_p$。

(a) 画出系统以 V 为输入、Y 与 Θ 为输出的框图。

(b) 在 Θ 环中设计超前补偿环节 $D_p(s)=k_p\dfrac{s+z}{s+p}$，消去 $s=-1$ 处的极点，并把其余两个极点配置在 $-4\pm j4$，并绘制相角环的根轨迹。

(c) 计算加入 $D(s)$ 后，受控对象从 U 到 Y 的传递函数。

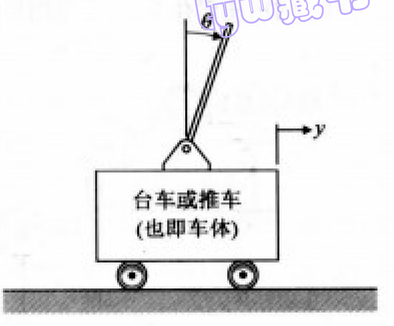


图 5-63　题 5-39 中的倒立摆

(d) 设计在摆闭环中的小车位置控制器 $D_c(s)$，并绘出以 $D_c(s)$ 的增益为参数的根轨迹。

(e) 用 MATLAB 画出控制系统中的控制器输出、小车位置和摆位置相对小车位移的阶跃响应。

5-40　考虑图 5-64 中的 270 ft(USCG) 美国海岸警卫队巡逻艇 Tampa(902)，由海上实验数据(Trankle 1987)确定的参数，可用来估计运动方程中的流体系数，则可得出舵角 δ 与航向 ψ 间的传递函数和风力变化 w 与航向 ψ 间的传递函数，分别如下：

$$G_\delta(s)=\frac{\psi(s)}{\delta(s)}=\frac{-0.0184(s+0.0068)}{s(s+0.2647)(s+0.0063)}$$

$$G_w(s)=\frac{\psi(s)}{w(s)}=\frac{0.0000064}{s(s+0.2647)(s+0.0063)}$$

其中：

ψ=航向，单位为 rad；

ψ_r=参考航向，单位为 rad；

r=偏航率 $\dot{\psi}$，单位为 rad/s；

δ=舵角，单位为 rad；

w=风速，单位为 m/s。

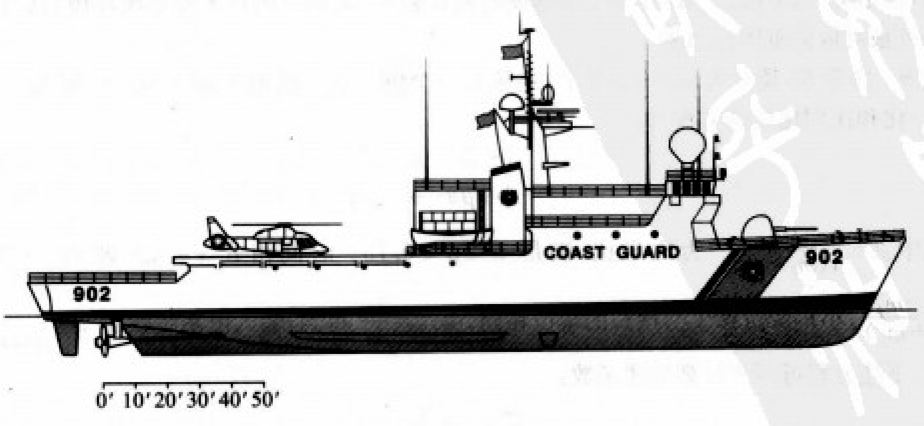


图 5-64　USCG 巡逻艇 Tampa(902)：(a)照片；(b)模块图

(a) 计算 δ 阶跃输入下，r 的调整时间。

(b) 为了调整航向 ψ，利用 ψ 和偏航率陀螺仪提供的测量值(即 $\dot{\psi}=r$)设计补偿时，要求在 ψ_r 阶跃输入下，ψ 的调整时间小于 50 s，且在航向变化 5°时，要求允许的舵角变化小于 10°。

(c) 在 10 m/s 的阵风扰动下(扰动模型为阶跃输入)，测试(b)中闭环系统的响应，在阵风的作用下，如果航向的稳态值大于 0.5°，试修改设计使之满足要求。

5-41 出于吸引顾客的目的，Golden Hugget 航空公司在飞机的尾部开设了免费酒吧，为了自动调整刚开业时乘客移动而出现的重量偏移，航空公司制造了一种控制倾斜角度的自动驾驶仪，图 5-65 为设计的框图，我们把实际的乘客力矩模型视为阶跃扰动 $M_p(s)=M_0/s$，其中 M_0 的最大期望值为 0.6。

(a) K 为何值时，θ 的稳态误差小于 0.02 弧度($\cong 1°$)(假设系统是稳定的)。

(b) 以 K 为参数绘制根轨迹。

(c) 在你的根轨迹图可看出 K 为何值时系统将开始变得不稳定？

(d) 假设满足稳态性能要求的 K 值为 600，说明这个值将使系统不稳定，此时特征方程的根为 $s=-3,-14,+1\pm 6.5j$。

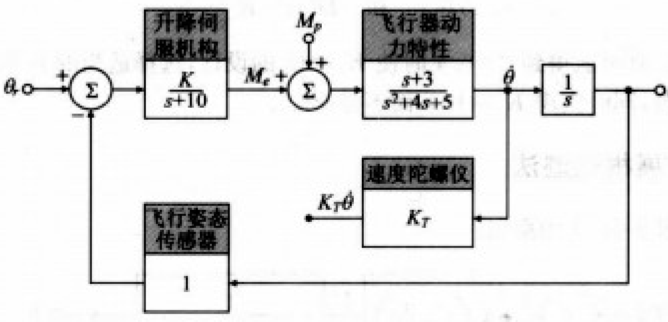


图 5-65 Golden Nugget 公司的自动导航仪

(e) 给你一个速度陀螺仪，如在图中标注，该模块安装后可以提供 $\dot{\theta}$ 产准确测量值并输出 $K_T\dot{\theta}$，假设 $K=600$ 与(d)部分中相同，画出框图说明如何将速度陀螺仪组合到自动驾驶仪中(包括模块的传递函数)。

(f) 对于(e)部分的陀螺仪系统，绘制以 K_T 为参数的根轨迹。

(g) 如(e)部分中结构，我们可以得到复根的最大阻尼比是多少？

(h) (g)部分中，K_T 值为多少？

(i) 假如你对(e)到(h)中包括陀螺仪的系统的稳态误差和阻尼比不满意，讨论增加积分项和超前补偿网络的优点和缺点，并用 MATLAB 或粗略绘制的根轨迹图来证明你的结论。

5-42 考虑图 5-66 中的伺服系统，所需参数如图中所示。在以下条件下，绘出以 K 为参数的根轨迹，并画出最终设计结果的根的位置。

(a) 超前网络。令：

$$H(s)=1, \quad D(s)=K\frac{s+z}{s+p}, \quad \frac{p}{z}=6$$

选择 z 和 K 使最靠近原点的根(主导根)满足：

$$\zeta \geqslant 0.4, \quad -\sigma \leqslant -7, \quad K_v \geqslant 16\frac{2}{3}s^{-1}$$

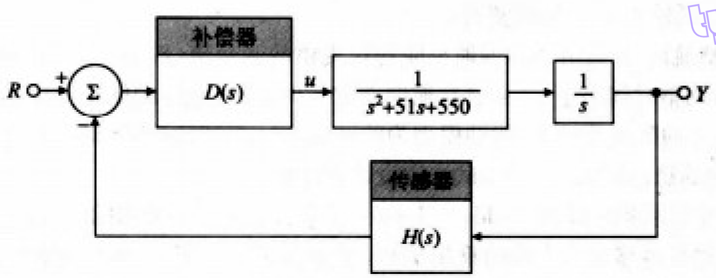


图 5-66　题 5-42 的控制系统

(b) 速度输出(测速计)反馈。令：

$$H(s)=1+K_Ts \quad 和 \quad D(s)=K$$

选择 K_T 和 K 使主导根满足(a)中的要求，并计算 K_v，如果可能，试说明使用微分反馈会使 K_v 值减小的物理原因。

(c) 滞后网络。令：

$$H(s)=1 \quad 和 \quad D(s)=K\frac{s+1}{s+p}$$

应用比例控制。有可能得到 $\zeta=0.4$ 时使 $K_v=12$ 的设计，选择适当的 K 和 P 以得到与比例反馈相同的主导极点，同时实现 $K_v=100$，而不是 12。

▲5.7 节习题：扩展根轨迹法

▲5-43　考虑图 5-67 中的系统。

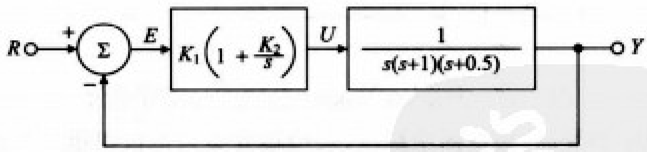


图 5-67　题 5-43 的反馈系统

(a) 应用劳斯判据，确定(K_1, K_2)平面上使系统稳定的区域。

(b) 应用根轨迹法验证(a)中的结果。

▲5-44　某位置伺服系统的框图如图 5-68 所示：

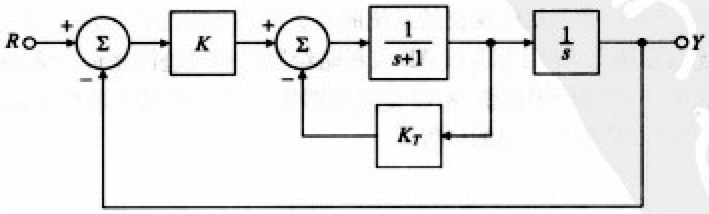


图 5-68　题 5-44 的控制系统

(a) 绘出系统无转速反馈($K_T=0$)时，以 K 为参数的根轨迹图。

(b) 如(a)中的条件，求出闭环系统在 $K=4$ 时的根，然后估计此时能够反映系统动态性能的

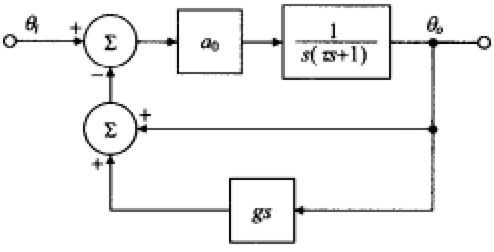
t_r，M_p 和 t_s，并用 MATLAB 来检验你的估计。

(c) 令 $K=4$，绘出系统以 K_T 为参数的根轨迹。

(d) 令 $K=4$，求使 $M_p=0.05(\zeta=0.707)$ 的 K_T，估计此时的 t_r 和 t_s，并用 MATLAB 检验你的估计。

(e) 由(d)中的 K 和 K_T，求出系统的速度误差 K_v。

▲5-45 考虑如图 5-69 所示的机械系统，其中 g 和 a_0 为增益，反馈环包含 gs 环节并可以控制速率反馈。若令 a_0 固定，调节 g 可以使 s 平面的零点发生改变。



▲图 5-69 题 5-45 的控制系统

(a) 若 $g=0$，$\tau=1$ 试求 a_0 使极点为复数。

(b) 固定 a_0 为所求得的值，试以 g 为参数画出系统的根轨迹图。

▲5-46 以 K 为参数画出图 5-70 所示系统的根轨迹，并求出会使系统不稳定的 K 值范围。

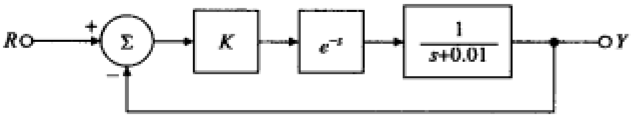


图 5-70 题 5-46 的控制系统

▲5-47 试证明若不能用零点抵消极点，则受控对象传递函数为 $G(s)=1/s^3$ 的系统不是无条件稳定系统。

▲5-48 对方程 $1+KG(s)$，其中

$$G(s)=\frac{1}{s(s-p)[(s+1)^2+4]}$$

用 MATLAB 来分析以 K 为参数，而 p 从 1 变化到 10 时的根轨迹，特别注意 $p=2$ 时的情况。

第 6 章　频率响应设计法

频率响应设计法的概述

在工业领域,反馈控制系统的设计大多数情况都是用频率响应方法而不是其他手段来实现的。频率响应设计之所以备受欢迎,主要是因为当装置模型存在不确定性时,它的效果较好。例如,对于那些我们不太了解的系统或者变化的高频谐振系统,我们可以调整系统的反馈补偿来减小这些不确定性带来的影响。目前,与其他方法相比,使用频率响应设计法能更容易地实现调整。

使用频率响应的另一个优点是,更容易将实验信息应用于设计过程。对于正弦输入激励的系统,粗测其输出幅值和相位就已足够设计出合适的反馈控制。并不需要对数据进行中间处理(例如求极点和零点,或系统矩阵)来求得系统的模型。今天,计算机的广泛应用使得这个优势显得不像数年前那么重要;不管怎样,对一些相对简单的系统来说,频率响应仍常常是具有最高性价比的设计方法。而且,对那些开环稳定的系统来说这种方法也是最有效的。

频率响应设计法还有另外一个优点,那就是它是设计补偿环节最容易的方法。运用一个简单的规则就可以在进行最少次试验的情况下得到满意的结果。

对我们来说,虽然弄懂频率响应的理论基础在某种程度上是一种挑战,而且需要有相当广泛的关于复变量的知识,但频率响应设计的方法是容易的,而且通过学习频率响应理论而得到的领悟也值得你为之付出努力。

全章概述

在本章开始,我们首先讨论怎样通过分析系统的零极点来得到它的频率响应。再进一步是讨论怎样用伯德图把频率响应表示出来。在 6.2 节和 6.3 节,我们简单地讨论稳定性的概念,然后深入讨论奈奎斯特稳定判据的应用。从 6.4～6.6 节,我们会介绍稳定裕度这个概念,讨论伯德图的增益一相位关系,还将学习动态系统的闭环频率响应。增益一相位关系提供了一条非常简单的规则来设计补偿环节:整定幅频特性曲线的幅值,使它以斜率值−1 通过幅值 1 处。我们会运用根轨迹法来描述怎样通过增加动态补偿来调整频率响应(6.7 节)和改善系统的稳定性和/或误差特性。我们也会

用一个例子来说明怎样实现数字补偿。

在过去的若干年，人们已经完善了几种显示频率响应数据的不同方法；在选修的6.8节中，我们将介绍其中两种：尼科尔斯图和逆奈奎斯特曲线图。在选修的6.9节，我们会讨论一些与频率响应相关的关于灵敏度的课题，包括灵敏度函数和系统稳定的鲁棒性问题的备选方案。在最后一节将分析系统时延，列出附加的、或者新近的材料，这些也可作为选修内容。

6.1 频率响应

我们已经在3.1.2节讨论过频率响应的基本概念。在这一节我们会重温这些知识，还会对此进行延伸以应用到控制系统的设计上。

线性系统对正弦输入的响应，称为系统的**频率响应(frequency response)**，这可以从系统的零、极点的分布情况来推知。

为重温这些知识，设定一个系统：

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

这里的输入 $u(t)$ 是幅值为 A 的正弦波：

$$u(t) = A\sin(\omega_o t)1(t)$$

正弦波的拉普拉斯变换为：

$$U(s) = \frac{A\omega_o}{s^2+\omega_o^2}$$

当初始状态为零时，输出的拉普拉斯变换是：

$$Y(s) = G(s)\frac{A\omega_o}{s^2+\omega_o^2} \tag{6-1}$$

对式(6-1)进行部分分式展开，得到如下形式的方程(假定 $G(s)$ 的极点是两两相异的)：

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{s-p_1}+\frac{\alpha_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-p_n}+\frac{\alpha_o}{s+j\omega_o}+\frac{\alpha_o^*}{s-j\omega_o} \tag{6-2}$$

其中，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 $G(s)$ 的极点，α_o 可以在求取上面的部分分式展开式时得到，α_o^* 是它的共轭复数。$Y(s)$ 对应的时域响应是

$$y(t) = \alpha_1 e^{p_1 t}+\alpha_2 e^{p_2 t}\cdots+\alpha_n e^{p_n t}+2|\alpha_o|\sin(\omega_o t+\phi),\quad t\geqslant 0 \tag{6-3}$$

其中，

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{\mathrm{Im}(\alpha_o)}{\mathrm{Re}(\alpha_o)}\right]$$

如果系统所有的极点都代表稳定状态($p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的实部均小于零)，自由响应会逐渐消失，所以系统的稳态响应是由式(6-3)的正弦项单独引起的，该正弦项是正弦激励的结果。例3.3曾计算了系统 $G(s)=1/(s+1)$ 对输入 $u=\sin 10t$ 的响应，并将其绘制在图3-2中，而且我们已经将它重新绘制在图6-1中。图中已表明，作为与 $G(s)$ 有关的自由响应部分，指数分量 e^{-t} 在经过几个时间常数后就消失了，而纯粹的正弦响应

在本质上始终保持不变。例3.4表明，式(6-3)中剩下的正弦项可以写成：

$$y(t)=AM\sin(\omega_o t+\phi) \tag{6-4}$$

其中，

$$M=|G(j\omega_o)|=|G(s)|_{s=j\omega_o}=\sqrt{\{\mathrm{Re}[G(j\omega_o)]\}^2+\{\mathrm{Im}[G(j\omega_o)]\}^2} \tag{6-5}$$

$$\phi=\tan^{-1}\left[\frac{\mathrm{Im}[G(j\omega_o)]}{\mathrm{Re}[G(j\omega_o)]}\right]=\angle G(j\omega_o) \tag{6-6}$$

写成极坐标的形式，有：

$$G(j\omega_o)=Me^{j\phi} \tag{6-7}$$

式(6-4)表明，对于一个传递函数为 $G(s)$ 的稳定系统，在幅值为1、频率为 ω_o 的正弦波的激励下，当响应达到稳态后，其输出为幅值 $M(\omega_o)$、相位 $\phi(\omega_o)$、频率 ω_o 的正弦波。输出 y 是与输入 u 同频率的正弦波，而且输入输出的幅值比率 M 和相位 ϕ 都与输入的幅值 A 无关，这表明了 $G(s)$ 是一个线性定常系统。如果被激励的是非线性或时变系统，那么输出可能包含输入频率以外的成分，输出输入的比值也可能与输入幅值有关。

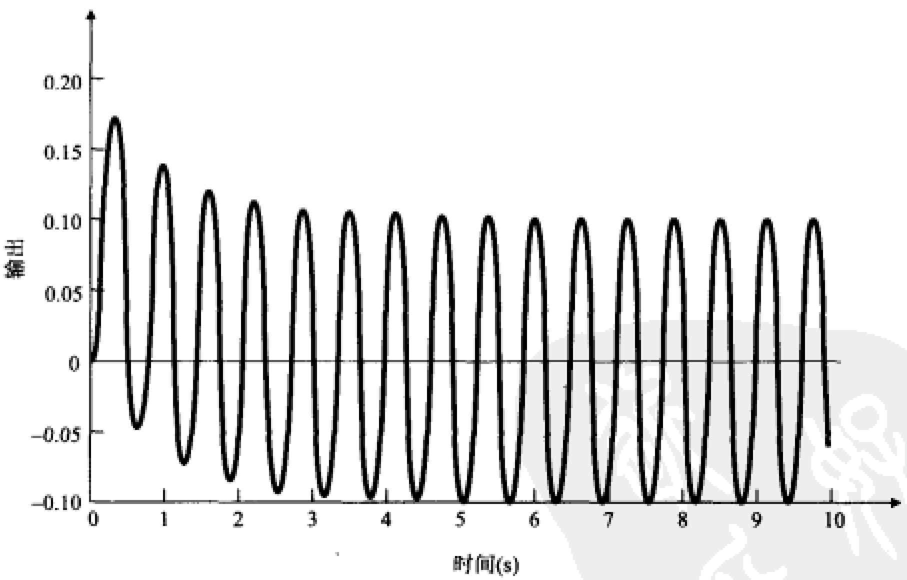


图6-1　$G(s)=1/(s+1)$对输入 $\sin 10t$ 的响应

通常情况下，**幅值**（**magnitude**）M 由 $|G(j\omega_o)|$ 给出，**相位**（phase）ϕ 由 $\angle[G(j\omega_o)]$ 给出；也就是说，$G(s)$ 这个复数的幅值数值和相位角度是变量 s 沿着虚轴（$s=j\omega$）取值时计算得到的。系统的频率响应由这些关于频率的函数组成，它告诉我们对任何频率的正弦波输入，系统是怎样响应的。我们对分析频率响应感兴趣，不仅仅因为它帮助我们理解系统对正弦输入是怎样响应的，还因为当变量 s 沿着虚轴取值时计算 $G(s)$ 会对判定闭环系统的稳定性非常有用。就像我们在第3章提到的，$j\omega$ 轴是稳定和不稳定的分界线；我们也会在6.4节看到，计算 $G(j\omega)$ 所提供的信息使我们能

够根据系统的开环 $G(s)$ 判定闭环的稳定性。

例 6.1 电容器的频率响应特性

考虑一个电容器，它由以下方程描述

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

其中，v 是输入，i 是输出。试确定电容器的正弦稳态响应。

解：该电路的传递函数是

$$\frac{I(s)}{V(s)} = G(s) = Cs$$

所以有

$$G(\mathrm{j}\omega) = C\mathrm{j}\omega$$

计算其幅值和相位，我们得到

$$M = |C\mathrm{j}\omega| = C\omega \quad \text{和} \quad \phi = \angle(C\mathrm{j}\omega) = 90^\circ$$

对于单位幅值的正弦输入 v，输出 i 是幅值为 $C\omega$、相位超前输入 90° 的正弦波。注意，在这个例子中，幅值与输入频率成正比，而相位则与频率无关。

例 6.2 超前补偿器的频率响应特性

回忆一下，在第 5 章[式(5-88)]中，超前补偿器的传递函数是

$$D(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}, \quad \alpha < 1 \tag{6-8}$$

(a) 用解析法确定它的频率响应特性，讨论从结果可得出什么。

(b) 用 MATLAB 软件绘制出当 $k=1, T=1, \alpha=0.1$ 和 $0.1 \leqslant \omega \leqslant 100$ 时 $D(\mathrm{j}\omega)$ 的曲线图，验证在(a)中分析得到的特性。

解：

(a) **用解析法求解(Analytical evaluation)**：将 $s=\mathrm{j}\omega$ 代入式(6-8)，得到

$$D(\mathrm{j}\omega) = K\frac{T\mathrm{j}\omega+1}{\alpha T\mathrm{j}\omega+1}$$

从式(6-5)和式(6-6)，求得幅值为：

$$M = |D| = |K|\frac{\sqrt{1+(\omega T)^2}}{\sqrt{1+(\alpha\omega T)^2}}$$

而相位为：

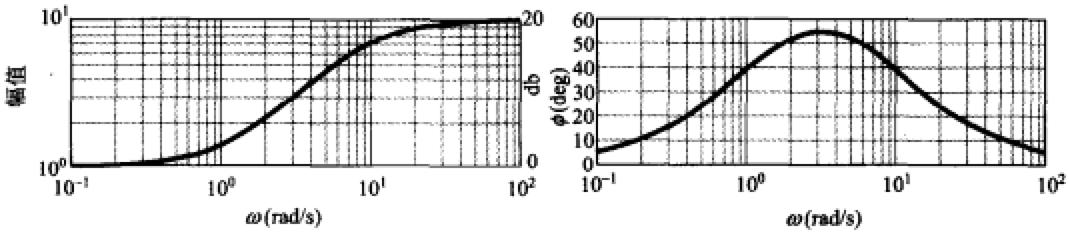
$$\phi = \angle(1+\mathrm{j}\omega T) - \angle(1+\mathrm{j}\alpha\omega T) = \tan^{-1}(\omega T) - \tan^{-1}(\alpha\omega T)$$

在低频段，幅值约为 $|K|$，在高频段为 $|K/\alpha|$，因此，幅值随频率的增大而增大。相位在低频段约为零，在高频段又返回零。在中频段，函数 $\tan^{-1}(\cdot)$ 求解表明 φ 是正值。这就是超前补偿器的普遍特性。

(b) **计算机求解(Computer evaluation)**：MATLAB 的计算频率响应的代码已经在例 3.4 给出。一段相似的计算超前补偿器的代码如下：

```
num = [1  1];
den = [0.1  1];
sysD = tf(num,den);
[mag,phase,w] = bode(sysD);      % computes magnitude, phase, and frequen-
                                   cies over range of interest
loglog(w,mag)
semilogx(w,phase)
```

得到的频率响应的幅值和相位曲线图已经绘制在图 6-2 中。



(a) 幅值　　(b) 相位曲线图

图 6-2　例 6.2 的超前补偿器

分析表明，幅值在低频段为 $K(=1)$，在高频段为 $K/\alpha(=10)$，这都可以从幅值的曲线图中得到验证。相位图同样也验证了相位在低频段和高频段分别趋向零，在中频段大于零。

在没有一个较好的系统模型、而想用实验方法确定频率响应的幅值和相位的情况下，我们可以用频率变化的正弦波来激励系统。在每个频率下，幅值 $M(\omega)$ 可以通过计算稳态的正弦输出和正弦输入的比值得到，而相位 $\phi(\omega)$ 通过测量输入输出信号的相位差得到[①]。

我们能从系统传递函数的幅值 $M(\omega)$ 和相位 $\phi(\omega)$ 分析中了解到很多动态响应特性。举一个明显的例子，如果信号是正弦波，那么 M 和 ϕ 已经完全描述了系统的响应。此外，如果输入是周期性的，那么我们能建立傅里叶级数把输入分解成各种正弦波的总和，然后分别求出各部分响应的 $M(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$，再求解总的响应。对于瞬态输入，理解 M 和 ϕ 含义的最好途径是把频率响应 $G(j\omega)$ 与瞬态响应联系起来，而后者可以用拉普拉斯变换计算得到。例如，在图 3-16b，我们把一个传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{(s/\omega_n)^2+2\zeta(s/\omega_n)+1} \tag{6-9}$$

的系统随 ζ 变化的阶跃响应曲线绘制出来。这些瞬态曲线相对于时间归一化成 $\omega_n t$。在图 6-3 中，我们在相同的 ζ 下绘制出 $M(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$，借此来讨论与图 3-16b 中的瞬态响应相对应的频率响应特性应有什么样的特点。具体地说，图 3-16b 和图 6-3 表现了系统阻尼对系统的时域响应和对应的频域响应的影响。可见系统阻尼能从瞬态响应的超调量或者频率响应幅值的峰值来计算得到(图 6-3a)。此外，从频率响应我们可以看到，ω_n 大约等于带宽——即幅值从此开始下降的那个值。(我们会在下一段更加正式地定义带宽。)因此，我们能从带宽估计出上升时间。我们也可以看到，当 $\zeta<0.5$ 时，频域中的超调峰值约等于 $1/2\zeta$，所以，阶跃响应的超调峰值可以由频率响应的超调峰值估计出来。因此，我们看到，在瞬态响应曲线中发现的信息，也包含在频域响应曲线中。

---

① Agilent Technologies 公司生产一种叫频谱分析仪的设备，能自动实现这个实验步骤，并能加快分析过程。

从频率响应的角度来说，系统性能的一个固有的技术指标是带宽(bandwidth)，它被定义为系统输出能令人满意地追踪输入正弦波的最大频率。按惯例，对于如图 6-4 所示的正弦输入为 r 的系统来说，带宽是指输出 y 减弱为输入的 0.707 倍时 r 的频率①。图 6-5 是闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \triangleq \mathcal{T}(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

的系统的频率响应图，图中形象地描述了带宽的定义。对大多数的闭环系统来说，这是典型的曲线图：(1)在低频率激励，输出跟随输入 [$|\mathcal{T}| \cong 1$]；(2)在高频率激励，输出停止跟随输入 [$|\mathcal{T}| < 1$]。频率响应的最大值称为**谐振峰值**(**resonant peak**) M_r。

带宽是响应速度的衡量指标，因此与时域的一些指标相似，例如上升时间和峰值时间或者 s 平面主导极点的固有频率。事实上，如果图 6-4 的 $KG(s)$ 的闭环响应与图 6-3给出的相同，那么我们将会看到带宽等于闭环根的固有频率(也就是说，当闭环阻尼比 $\zeta = 0.7$ 时 $\omega_{BW} = \omega_n$)。至于具有其他阻尼比的闭环系统，其带宽大约等于闭环根的固有频率，二者的比值最大不会超过 2。

对那些具有低通滤伯德性的系统来说，这里描述的带宽的定义是很有意义的。实际上，任何实际的控制系统都具有低通特性。在其他应用领域，带宽的定义可能有所不同。同样，如果系统的理想模型在高频段不衰减(例如，如果它的零、极点数相等)，那么带宽无穷大；但是，这种情况不会在自然界发生，因为没有系统在无穷大的频率也能响应得好。

为了把频率响应用于控制系统设计，我们需要考虑一种能高效绘制出频率响应曲线图的表示方法，同时还要能够把开环特性 KG 和闭环特性 $\mathcal{T}(s)$ 联系起来。这些都是 6.1.1 节关注的问题。

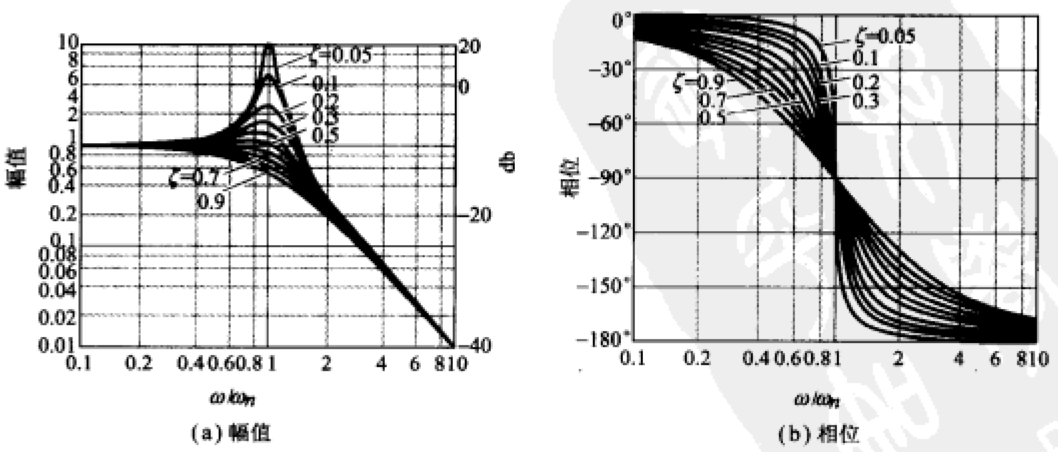


图 6-3　式(6-9)的(a)幅值和(b)相位

① 如果输出是一个 1Ω 电阻上的电压，那么电阻上的功率就是 v^2，当 $|v| = 0.707$ 时，功率下降为原来的 1/2。一般地，这称为半功率点。

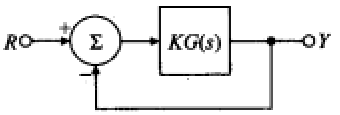


图 6-4　简化的系统定义

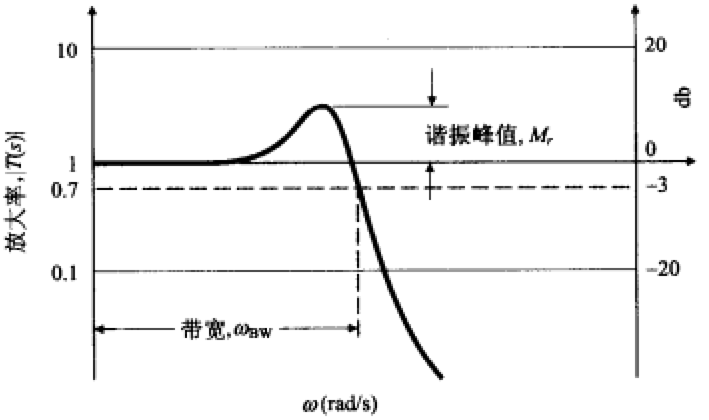


图 6-5　带宽和谐振峰值的定义

6.1.1　伯德图法

关于怎样表示频率响应这个问题，人们已经研究了很长时间。在计算机发明之前，一切都是靠手工完成的，所以如何快速地绘制曲线显得十分重要。被认为最有效的手工绘图技术是 H. W. Bode 于 1932～1942 年在贝尔实验室发明的。这种技术可以快速绘图，并且对控制系统来说有足够的精度。现在，多数控制系统设计者都可以通过计算机编程来完成工作，从而不再依赖于手工画图了；但是，这一方法还是必不可少的，因为你可能凭直觉就可以发现计算机绘图结果的错误，所以你需要具备这种手工检查结果的能力。

伯德图的思想是用对数尺度画幅值曲线和用线性尺度画相位曲线。就像我们在附录 B 中所讨论的，这种策略允许我们只简单地在图上增加独立的项就能画出高阶的 $G(j\omega)$。这种相加是可能的，因为一个带零、极点因子的复杂表达式可以写成如下极坐标(矢量)形式：

$$G(j\omega)=\frac{\vec{s}_1\vec{s}_2}{\vec{s}_3\vec{s}_4\vec{s}_5}=\frac{r_1e^{j\theta_1}r_2e^{j\theta_2}}{r_3e^{j\theta_3}r_4e^{j\theta_4}r_5e^{j\theta_5}}=\left(\frac{r_1r_2}{r_3r_4r_5}\right)e^{j(\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5)} \tag{6-10}$$

(符号头上的箭头表示矢量)。注意，式(6-10)把各个项的相位直接相加得到复合表达式的相位。再者，因为

$$|G(j\omega)|=\frac{r_1r_2}{r_3r_4r_5}$$

必然有

$$\log_{10}|G(j\omega)|=\log_{10}r_1+\log_{10}r_2-\log_{10}r_3-\log_{10}r_4-\log_{10}r_5 \tag{6-11}$$

我们可以看到，各个项的对数相加就得到了复合表达式幅值的对数。频率响应一般用

两条曲线表示：横坐标为 $\log\omega$ 的幅值对数曲线和横坐标为 $\log\omega$ 的相位曲线。这两种曲线图一起构成系统的**伯德图**(**Bode plot**)。因为

$$\log_{10} Me^{j\phi} = \log_{10} M + j\phi \log_{10} e \tag{6-12}$$

于是我们看到，伯德图显示了 $G(j\omega)$ 的对数的实部和虚部。在通信领域，功率增益的标准单位是分贝(dB)①：

$$|G|_{db} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \tag{6-13}$$

其中，P_1 和 P_2 分别是输入功率和输出功率。因为功率与电压的平方成正比，所以功率增益也由下式给出：

$$|G|_{db} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} \tag{6-14}$$

因此我们可以这样表示伯德图：单位为**分贝**的幅值曲线和单位为度的相位曲线②。在本书中，我们给出的伯德图是 $\log|G|$ 的形式；我们也在幅值曲线图的右边画了以分贝为单位的纵坐标轴，你可以选择你喜欢的一种。但是，对于频率响应图来说，我们实际上不把功率画出来，使用式(6-14)也容易引起一定的误解。如果幅值数据是以 $\log|G|$ 的形式得到的，用对数尺度把它们画出来是最方便的，但仍把刻度标为 $|G|$（没“对数”）。如果幅值数据是以分贝为单位的，则纵坐标是线性的而且 $|G|$ 的每 10 倍程代表 20 db。

根据伯德图研究系统频率响应的优点

(1) 动态补偿器的设计可以完全以伯德图为依据。

(2) 伯德图可由实验的方法获得。

(3) 级(串)联系统的伯德图可简单相加而得，这非常方便。

(4) 对数尺度容许伯德图表示相当广的频率范围，而线性尺度是很难做到的。

对控制系统工程师来说，能手工方法绘制频率响应图是很重要的，有几个原因：这种方法不仅允许工程师可以处理简单的问题，还可以在复杂情况下对计算机结果进行良好的检查。通常，运用近似化方法可以快速地得到频率响应的草图，推知系统的稳定性，还可以计算需要什么形式的动态补偿器。最后，手工绘图对实验产生的频率响应数据进行分析也是很有用的。

在第 5 章，我们把开环传递函数写成如下形式：

$$KG(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots} \tag{6-15}$$

这是因为它是根据增益为 K 的根轨迹确定稳定程度的最方便的形式。计算频率响应时，更便利的方法是用 $j\omega$ 代替 s，将传递函数写成**伯德形式**(**Bode form**)：

---

① 贝尔实验室的研究人员首先定义了功率增益的单位为贝(bel)。(为了纪念该公司的创立者 Alexander Graham Bell。)但是，后来发现这个单位太大，于是有了后来应用更广的分贝(贝的 1/10)。它的另一种缩写 dB 也经常被使用。伯德(Bode)用 db，这里我们跟着他使用 db。

② 以后，我们略去对数的底数不写；我们约定底数为 10。

$$KG(\mathrm{j}\omega) = K_0 \frac{(\mathrm{j}\omega\tau_1 + 1)(\mathrm{j}\omega\tau_2 + 1)\cdots}{(\mathrm{j}\omega\tau_a + 1)(\mathrm{j}\omega\tau_b + 1)\cdots} \tag{6-16}$$

因为这种形式的增益 K_0 在非常低的频率直接与传递函数的幅值相关。事实上，对 0 型系统来说，K_0 是式(6-16) $\omega = 0$ 时的增益，也等于系统的直流增益。虽然一个简单的计算就可以把传递函数从式(6-15)变为式(6-16)的形式，但要注意在以上两式中的 K 和 K_0 一般是不等值的。

根据式(6-10)和(6-11)，我们也可以重写传递函数。举个例子，假设

$$KG(\mathrm{j}\omega) = K_0 \frac{\mathrm{j}\omega\tau_1 + 1}{(\mathrm{j}\omega)^2(\mathrm{j}\omega\tau_a + 1)} \tag{6-17}$$

那么

$$\angle KG(\mathrm{j}\omega) = \angle K_0 + \angle(\mathrm{j}\omega\tau_1 + 1) - \angle(\mathrm{j}\omega)^2 - \angle(\mathrm{j}\omega\tau_a + 1) \tag{6-18}$$

还有

$$\log|KG(\mathrm{j}\omega)| = \log|K_0| + \log|\mathrm{j}\omega\tau_1 + 1| - \log|(\mathrm{j}\omega)^2| - \log|\mathrm{j}\omega\tau_a + 1| \tag{6-19}$$

以分贝为单位，式(6-19)变成

$$|KG(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{db}} = 20\log|K_0| + 20\log|\mathrm{j}\omega\tau_1 + 1| - 20\log|(\mathrm{j}\omega)^2| - 20\log|\mathrm{j}\omega\tau_a + 1| \tag{6-20}$$

到目前为止，我们讨论的各种系统的传递函数都由以下三种式子组成：

(1) $K_0(\mathrm{j}\omega)^n$；

(2) $(\mathrm{j}\omega\tau + 1)^{\pm 1}$；

(3) $\left[\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_n} + 1\right]^{\pm 1}$。

首先我们会讨论各种式子的伯德图的画法，它们是怎样影响最终的合成图；然后讨论怎样画合成曲线图。

(1) $K_0(\mathrm{j}\omega)^n$ 因为：

$$\log K_0 |(\mathrm{j}\omega)^n| = \log K_0 + n\log|\mathrm{j}\omega|$$

这个项的幅值曲线图是一条斜率为 $n\times$(20db/10 倍频程)的直线。图 6-6 已经显示了几个 n 值不同的例子。$K_0(\mathrm{j}\omega)^n$ 是唯一在最低频率段影响曲线斜率的项，因为其他项在这个区域都是常数。最容易的画法是：找到 $\omega = 1$，然后在这个频率上画 $\log K_0$ 这个点。接着，过这个点画一条斜率为 n 的直线①。$(\mathrm{j}\omega)^n$ 的相位是 $\varphi = n\times 90°$；它与频率无关，因此是一条水平线：$n=-1$ 时，为 $-90°$；$n=-2$ 时，为 $-180°$；$n=+1$ 时，为 $90°$，依此类推。

(2) $\mathrm{j}\omega\tau+1$ 这个项的幅值曲线在甚低频段趋近一条渐近线，在甚高频段趋近另一条渐近线。

(a) 若 $\omega\tau \ll 1$，$\mathrm{j}\omega\tau + 1 \cong 1$。

(b) 若 $\omega\tau \gg 1$，$\mathrm{j}\omega\tau + 1 \cong \mathrm{j}\omega\tau$。

如果把 $\omega = 1/\tau$ 称为**转折频率点(break point)**，那么我们会看到在低于转折频率的频段，幅值曲线趋近一常数(=1)，而在高于转折频率的频段，幅值曲线与第一类项

---

① 以分贝为单位，斜率为 $n\times$20db/10 倍频程或 $n\times$6db/2 倍频程(若两个频率的比值为 2，则称这两个频率相差一个二倍频程)。

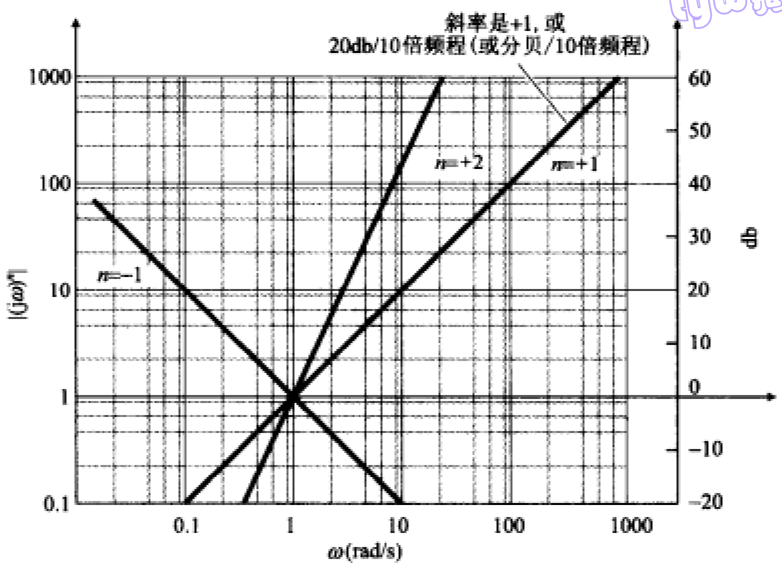


图 6-6　$(j\omega)^n$ 的幅值

$K_0(j\omega)$ 相似。图 6-7 已经给出了一个例子，$G(s)=10s+1$ 表示了两条渐近线怎样在转折频率点相交，实际的幅值曲线在转折频率点以渐近线的 1.4 倍(或高于渐近线 +3db)经过(如果该项出现在分母中，则它会在转折频率点以 0.707 倍或低于渐近线 3db 经过)。注意，在低于转折频率的频段，这个项只对合成曲线有微小的影响，因为在这个区域它的值等于 1(=0db)。在高频段，它的斜率是+1(或+20db/10 倍频程)。相位曲线也能很容易地运用下面的低频和高频渐近线而得到：

(a) 若 $\omega\tau \ll 1$，$\angle 1 = 0°$；

(b) 若 $\omega\tau \gg 1$，$\angle j\omega\tau = 90°$；

(c) 若 $\omega\tau \cong 1$，$\angle(j\omega\tau+1) \cong 45°$。

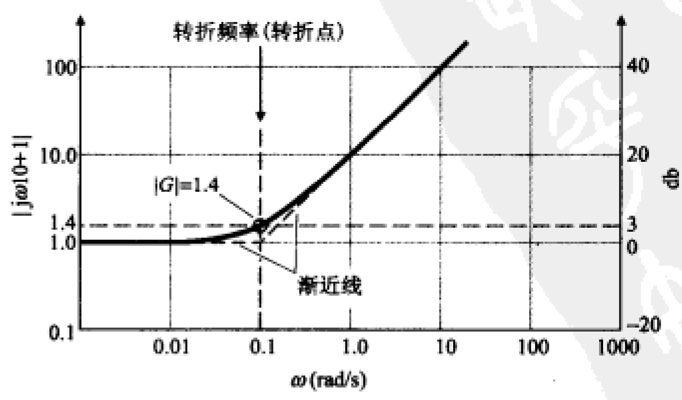


图 6-7　$j\omega\tau+1$；$\tau=10$ 的幅值曲线图

当 $\omega\tau \cong 1$ 时，$\angle(j\omega+1)$ 的曲线正切于一条渐近线，这条渐近线在 $\omega\tau=0.2$ 时为

0°，在 $\omega\tau=5$ 时为 90°，如图 6-8 所示。图中还画出了三条此项相位图的渐近线（短划线），实际的曲线偏离渐近线的交点 11°。在至少低于 1/10 转折频率的频段，这类项对合成的相位和幅值曲线都没有影响，因为此时这类项的幅值是 1（或 0db），相位为 0°。

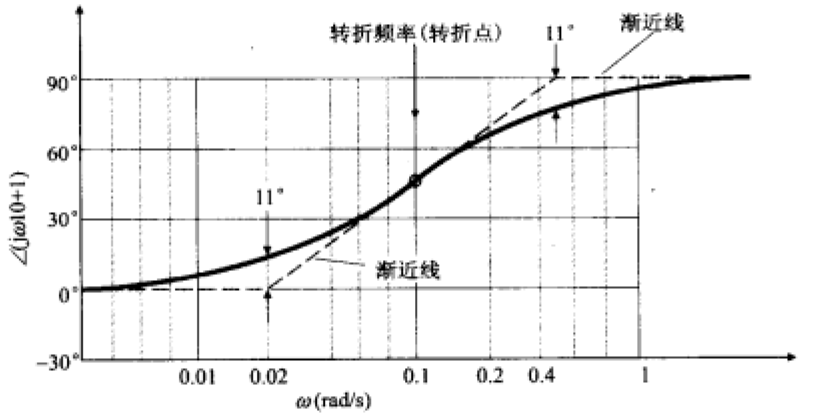


图 6-8　$j\omega\tau+1$；$\tau=10$ 的相位曲线图

(3) $[(j\omega/\omega_n)^2+2\zeta(j\omega/\omega_n)+1]^{\pm1}$ 这个项的性质跟第 2 类项相似，只是细节不同：转折频率变为 $\omega=\omega_n$，幅值在转折频率点斜率变为 +2（或 +40db/10 倍频程）（如果该项在分母出现，则为 −2 或 −40db/10 倍频程）。相位变为 ±180°，在转折频率区，曲线的过渡段随阻尼比 ζ 变化而变化。图 6-3 显示了几条具有不同阻尼比的幅值和相位曲线，它们对应的项在分母中出现。注意，在高于转折频率的频段，幅值曲线的斜率为 −2（或 −40db/10 倍频程），在转折频率处曲线过渡段的形状很大程度上依赖于阻尼比。当 $\omega=\omega_n$ 时，

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{2\zeta} \tag{6-21}$$

这类二阶项出现在分母时，运用此式能画出过渡段曲线的大概形状。如果该项出现在分子中，那么幅值曲线就变为图 6-3a 所示曲线的倒数。

对于相位来说，就没有像式(6-21)这样简便的规则来画草图了。因此我们只好回到图 6-3b 来寻求精确画相位曲线图的手段。不管怎样，我们总有一个非常粗略的方法：当 $\zeta=0$ 时，它是一个阶跃函数；而当 $\zeta=1$ 时，相当于两个转折频率同为 ω_n 的一阶（第 2 类）项。所有其他的中间值的曲线图都落在这两种极限情况的中间。二阶项的相位通常在 $\omega=\omega_n$ 时等于 ±90°。

当系统有几个极点和零点的时候，绘制频率响应曲线需要各个成分复合得到合成曲线。绘制合成幅值曲线时，要注意渐近线的斜率等于各单个渐近线斜率之和。注意到这一点是很有用的。因此，合成的渐近线在每个转折频率处斜率有整数改变：一阶项在分子出现时为 +1，在分母出现时为 −1，二阶项为 ±2。还有，在最低频段，渐近线的斜率由 $(j\omega)^n$ 的 n 值确定，而且由 $\omega=1$ 处的 $K_0\omega^n$ 定位。因此，整个过程包括以下步骤：先画渐近线的最低频部分，然后随着频率的增大，在各个转折频率处依次改变渐近

线的斜率，最后根据之前讨论过的第2类和第3类项的误差把实际的曲线画出来。

相位的合成曲线也是各单个曲线的总和。通过确定各个曲线来完成各相位曲线图像的相加是可能的，结果得到的合成曲线能最大程度逼近各个曲线。一种快速、粗略的合成相位曲线画法如下：在低于最小转折频率的频段，相位的值为 $n\times 90°$。随着频率的增大，相位依次在各个转折频率处跳跃变化。相位变化的幅度分不同情况而定：如果是一阶项，则为 $\pm 90°$；如果是二阶项，则为 $\pm 180°$。转折频率属于分子因子的，为正跳跃变化，如果是属于分母因子的，则为负跳跃变化[①]。到目前为止，我们讨论的绘图规则都是针对零、极点都在左平面这种情况，至于在右平面有奇点的情况，我们会在本节末尾讨论。

伯德图的绘图规则总结

(1) 将传递函数变为式(6-16)的伯德形式。

(2) 对 $K_0(j\omega)^n$（第一类）项，确定 n 的值。在 $\omega=1$ 处通过 K_0 画幅值曲线的斜率为 n（或 $n\times$20db/10 倍频程）的低频段渐近线。

(3) 完成幅值的合成渐近线：延长低频段的渐近线直到遇到第一个转折频率，然后斜率改变 ± 1 或 ± 2，这取决于转折频率是属于一阶项还是二阶项，是在分子出现还是在分母出现。重复这一步骤直到通过所有的转折频率。

(4) 画近似的幅值曲线：在一阶分子因子的转折频率处，把渐近线的值增加到1.4倍（或增加3db），在一阶分母因子的转折频率处，则把渐近线的值减小到0.707倍（或减小3db）。在二阶转折频率处，根据图6-3a，对分母因子用 $|G(j\omega)|=1/2\zeta$（对分子因子则用 $|G(j\omega)|=2\zeta$）画谐振峰值（或谷值）。

(5) 画相位曲线在低频段的渐近线，$\phi=n\times 90°$。

(6) 作为向导，画近似的相位曲线，在每个转折频率处改变相位 $\pm 90°$ 或 $\pm 180°$。对于在分子出现的一阶项，相位改变 $\pm 90°$，而对于那些在分母出现的，相位改变 $-90°$。对于二阶项，相位改变 $\pm 180°$。

(7) 确定各单个相位曲线的渐近线，使得相位的改变与(6)所说的一致，就如图6-8或图6-3b所示，画各单个相位曲线的草图。

(8) 在图上把每个相位曲线相加。如果要求 $\pm 5°$ 的精确度，可借助于带有网格的坐标纸来计算。如果精确度不要求那么高，可用肉眼估算。注意，曲线从最低频段的渐近线开始，在最高频段的渐近线结束，而与中间段渐近线的相近程度取决于转折频率之间有多接近。

例6.3 具有实数零、极点系统的伯德图

画具有下面传递函数的系统的伯德图

---

① 这种近似化方法是由我们巴黎的同事提供的。

$$KG(s)=\frac{2000(s+0.5)}{s(s+10)(s+50)}$$

解：

步骤 1　把函数变为式如式(6-16)所示的伯德形式

$$KG(\mathrm{j}\omega)=\frac{2[(\mathrm{j}\omega/0.5)+1]}{\mathrm{j}\omega[(\mathrm{j}\omega/10)+1][(\mathrm{j}\omega/50)+1]}$$

步骤 2　我们注意到项 $\mathrm{j}\omega$ 是一阶的，而且在分母中出现，所以 $n=-1$。因此低频段的渐近线由第一项决定

$$KG(\mathrm{j}\omega)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

这条渐近线在 $\omega<0.1$ 时有效，因为最小的转折频率是 $\omega=0.5$。这条渐近线的斜率为 -1(或 -20db/10 倍频程)。我们通过点(1,2)画出这条渐近线。实际上，合成曲线是不经过这个点的，因为在 $\omega=0.5$ 处有转折频率。图 6-9a 已表示出来。

步骤 3　如图 6-9a 所示，我们继续把剩余的渐近线完成。第一个转折频率是 $\omega=0.5$，是一阶项且出现在分子中，因此渐近线需加上 1。我们在这里画一条斜率为 0 的直线与原来斜率 -1 的直线相交。然后在 $\omega=10$ 处画一条斜率为 -1 的直线与之前的直线相交，最后在 $\omega=50$ 处画一条斜率为 -2 的直线与之前的直线相交。

步骤 4　在图上画实际曲线：在远离转折频率的频段，实际曲线逐渐与渐近线相切；在转折频率 $\omega=0.5$ 处，实际曲线的值是渐近线的 1.4 倍(或比渐近线大 3db)，在转折频率 $\omega=10$ 和 $\omega=50$ 处，实际曲线是渐近线的 0.7 倍(或比渐近线小 3db)。

步骤 5　因为 $\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$ 的相位是 $-90°$，所以图 6-9b 的相位曲线在低频段以 $-90°$ 为起点。

步骤 6　结果显示在图 6-9c 中。

步骤 7　在图 6-9b 中用短划线表示的各单个相位曲线都正确地表示了各个单项的相位变化，而且在垂直方向上经过调整与图 6-9c 的近似曲线保持一致。

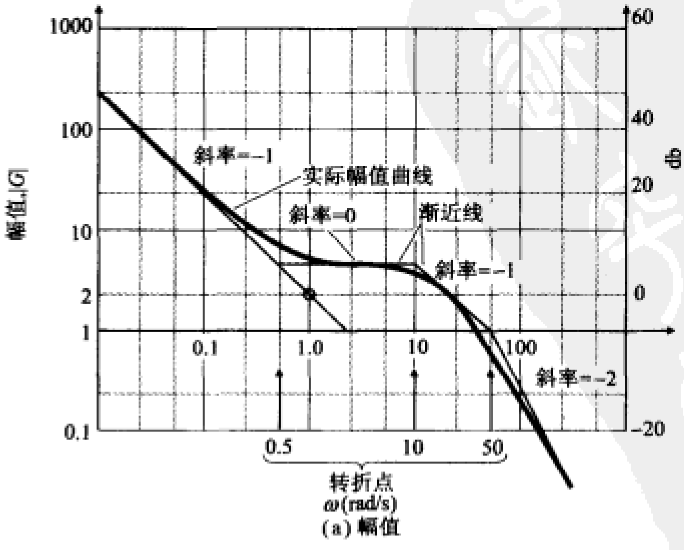
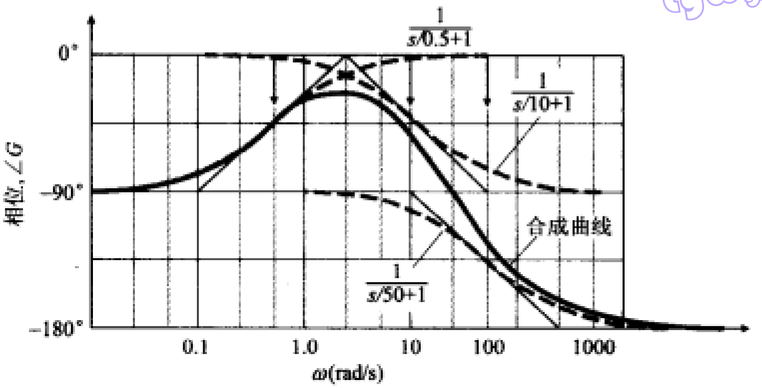
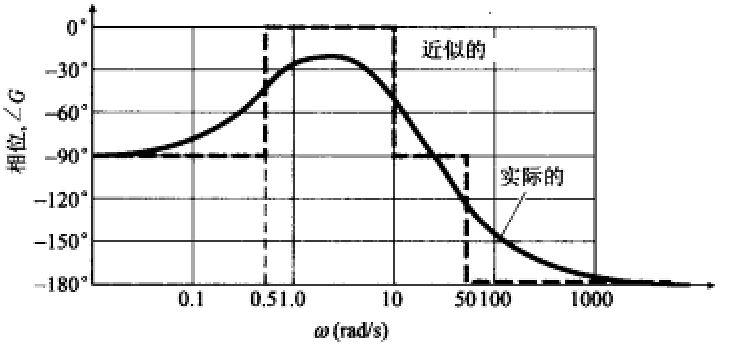


图 6-9　合成曲线图



(b) 相位



(c) 近似相位

图 6-9 （续）

我们注意到，合成曲线都趋近每条单项曲线。

步骤 8 在图中，将各短划线相加就得到了实线的合成曲线，如图 6-9b 所示。我们可以从图中看到，各单个曲线在垂直方向的位置使得在图上将它们相加异常容易，因为合成曲线依次趋近每一条单项曲线。

例 6.4 具有复数极点系统的伯德图

举第二个例子，画下面系统的频率响应

$$KG(s)=\frac{10}{s(s^2+0.4s+4)} \tag{6-22}$$

解：该系统的伯德图绘制，要比上一个例子困难些，因为渐近线之间的过渡段与阻尼比有关，比较复杂。但是，仍可按照例 6.3 中的基本步骤绘图。

该系统包括一个二阶项，它出现在分母中。因每个步骤都需要，我们先把式(6-22)变为式(6-16)的伯德形式：

$$KG(s)=\frac{10}{4}\,\frac{1}{s(s^2/4+2(0.1)s/2+1)}$$

从低频段的渐近线开始，我们知道 $n=-1$ 和 $|G(j\omega)|\cong 2.5/\omega$，这个项的幅值曲线的斜率为$-1$($-20$db/10 倍频程)，而且经过点(1,2.5)，如图 6-10a 所示。对于二阶极点，我们注意到

$\omega_n = 2$ 和 $\zeta = 0.1$。在极点的转折频率 $\omega = 2$ 处，斜率变为 $-3(-60\text{db}/10$ 倍频程)。在极点的转折处，实际幅值是渐近线的 $1/2\zeta = 1/0.2 = 5$ 倍。本例的相位曲线，对应于 $1/s$ 这个项，开始时 $\varphi = -90°$，然后因为存在极点的关系，在 $\omega = 2$ 处跌落到 $\varphi = -180°$，如图 6-10b 所示。接着，随着频率增大，趋向于 $\varphi = -270°$。因为阻尼比较小，短划线所示的阶梯曲线和实际曲线的吻合情况较为理想。实际的合成相位曲线如图 6-10b 所示。

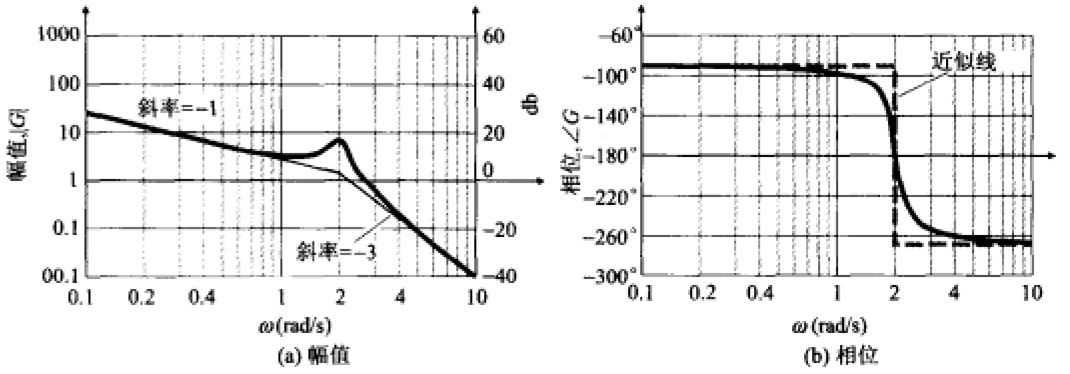


图 6-10　传递函数带复极点的伯德图

例 6.5　具有复数零、极点系统的伯德图：带柔性附件的卫星

举第三个例子，画一个有二阶项的系统的伯德图。系统的传递函数表示了一个用弱阻尼弹簧连接两个等质量体的机械系统。施加的外力和位置测量都作用在同一个质量体上。对于传递函数，因时域标度已选定，所以复数零点的谐振频率等于 1。该传递函数是：

$$KG(s) = \frac{0.01(s^2 + 0.01s + 1)}{s^2[(s^2/4) + 0.02(s/2) + 1]}$$

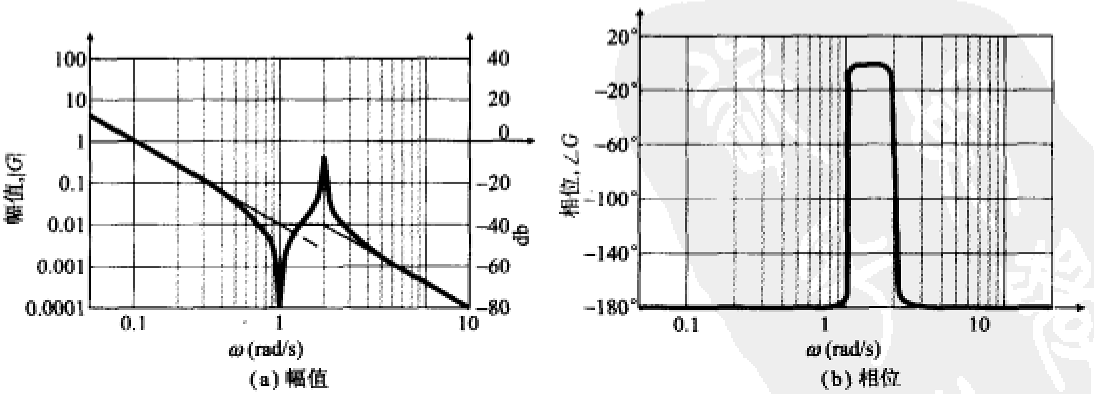


图 6-11　带复极点和零点的传递函数的伯德图

解：从低频段的渐近线 $0.01/\omega^2$ 开始。它的斜率是 $-2(-40$ db/10 倍频程)，而且通过点(1，0.01)，如图 6-11a 所示。在零点的转折频率 $\omega = 1$ 处，斜率变为 0，直至遇到极点的转折频率 $\omega = 2$，此时斜率变回到 -2。现在插入实际曲线：在零点的转折点 $\omega = 1$ 处，真实的幅值低于渐近线 $2\zeta = 0.01$，而在极点的转折点，真实的幅值高于渐近线 $1/2\zeta = 1/0.02 = 50$。幅值曲线先经历一个负脉冲，再经历一个正脉冲，就像一对"偶极"。图 6-11b 显示了系统的相位曲线，它开始是

$-180°$（与 $1/s^2$ 这个项对应），然后遇到零点跳高 180°，即当 $\omega=1$ 时 $\varphi=0°$，后又遇到极点跌落 180°，即当 $\omega=2$ 时 $\varphi=-180°$。对于这么小的阻尼比，这种分步近似得到曲线是很理想的。（我们没有在图 6-11b 中画出来，因为它很容易就与图中的实际曲线混淆了。）因此，实际的合成相位曲线在 $\omega=1$ 和 $\omega=2$ 间几乎是一个方波脉冲。

在实际设计中，许多伯德图都是在计算机帮助下制作出来的。但是，掌握手工绘图的技巧，仍然十分必要。因为它能令设计者深刻理解补偿参数的变化如何影响频率响应。这样，设计者运用迭代方法设计时就能快速地找到最好的设计。

例 6.6 利用计算机绘制具有复数零点和极点系统的伯德图

用 MATLAB 重做例 6.5。

解：我们在 MATLAB 下调用如下的 bode 函数可以得到伯德图：

```
numG = 0.01*[1   0.01   1];
denG = [0.25   0.01   1   0   0];
sysG = tf(numG,denG);
[mag, phase, w] = bode(sysG);
loglog(w,mag)
semilogx(w,phase)
```

执行这些命令得到的伯德图与图 6-11 非常相近。若要得到以分贝为单位的伯德图，最后三行可以用下面语句代替：

```
bode(sysG)
```

非最小相位系统

对于有一个零点在右半平面的系统，当输入频率从零变化到无穷大时，与幅值曲线对照，它的相位曲线的净变化量比所有零极点都在左半平面的系统的相位变化量都要大。这样的系统称为**非最小相位**(**nonminimum phase**)系统。就像我们在附录 B 的图 B-3 中所看到的，如果零点在右半平面，相位在零点的转折频率处减小。而不是像通常的零点在左半平面的系统那样增大。考虑如下的传递函数

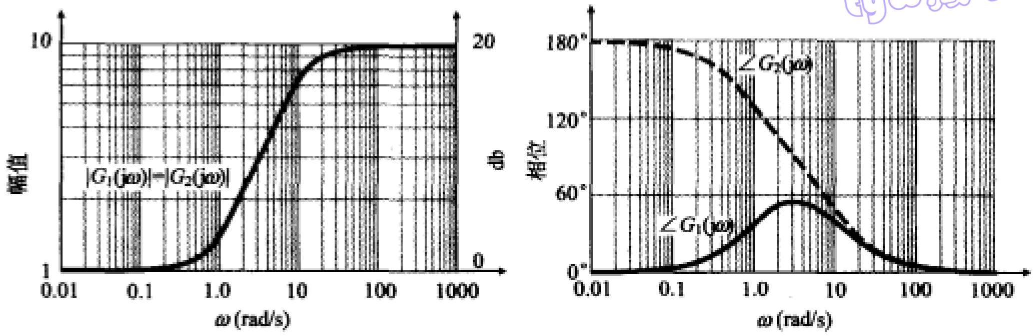
$$G_1(s)=10\frac{s+1}{s+10}$$

$$G_2(s)=10\frac{s-1}{s+10}$$

两个传递函数都有相同的幅值曲线，即

$$|G_1(j\omega)|=|G_2(j\omega)|$$

如图 6-12a 所示。但它们的相位显著不同[图 6-12b]。一个最小相位系统(所有零点在左平面)，当幅值确定时它的相位的净变化量最小。试比较最小相位系统 G_1 与非最小相位系统 G_2，如果有更多的零点在右半平面，G_1 和 G_2 的这种差异就会更显著。



(a) 幅值 (b) 相位

图 6-12 最小相位系统和非最小相位系统的伯德图

6.1.2 稳态误差

在 4.2 节我们已经知道，反馈系统的稳态误差随着开环传递函数增益的增大而减小，而且在 6.1.1 节我们绘制合成幅值曲线时发现，在非常低的频段，开环传递函数约等于下式：

$$KG(j\omega) \cong K_0 (j\omega)^n \tag{6-23}$$

因此，我们推断：幅值在低频段的渐近线的值越大，闭环系统的稳态误差越小。这个关系对补偿设计非常有用：通常我们想计算几种可替换的方案来改进稳定性，而上述关系可以使得我们能快速地知道补偿环节的变化会怎样影响系统的稳态误差。

对于式(6-16)所示的系统[即式(6-23)中 $n=0$(0 型系统)]，低频段的渐近线是一个常数，而且开环系统增益 K_0 与位置常数 K_p 相等。

对于单位反馈系统，若输入为单位阶跃信号，我们在 4.2.1 节运用终值定理得到的稳态误差是

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$$

对于那些在式(6-23)中 $n=-1$ 的单位反馈系统，我们在 4.2.1 节定义为 1 型系统，在低频段的渐近线的斜率为 -1。根据式(6-23)，低频渐近线的值与增益有关；因此，我们能直接从伯德图的幅值曲线读出增益 K_0/ω 。式(4-43)告诉我们速度误差常数

$$K_v = K_0$$

这里，当单位反馈系统的输入是单位斜坡函数时，稳态误差是

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

一个测出 1 型系统的 K_v 值的最容易方法是，当 $\omega=1$ rad/s 时读出低频段渐近线的幅值，因为这条渐近线是 $A(\omega)=K_v/\omega$ 。在某些情况下，最小转折频率会小于 $\omega=1$ rad/s；因此我们需要把渐近线延长到 $\omega=1$ rad/s 处以能直接读出 K_v 值。或者，我们在低频段渐近线上读出它在任意频率上的值，然后计算 $K_v=\omega A(\omega)$ 。

例 6.7 计算 K_v

举一个计算稳态误差的例子，图 6-13 是一个开环系统的伯德图的幅值曲线图。假定系统是如图 6-4 所示的单位反馈系统，求出速度误差常数 K_v。

解：因为在低频段，斜率为 −1，于是我们知道系统是 1 型的，低频段渐近线的延长线交 $\omega = 1$ rad/s于幅值 10 处。因此，$K_v = 10$，而且输入为单位斜坡函数的单位反馈系统的稳态误差是 0.1。或者，在 $\omega = 0.01$ rad/s 处，我们读出 $|A(\omega)| = 1000$；因此，从式(6-23)我们得到

$$K_0 = K_v \cong \omega|A(\omega)| = 0.01(1000) = 10$$

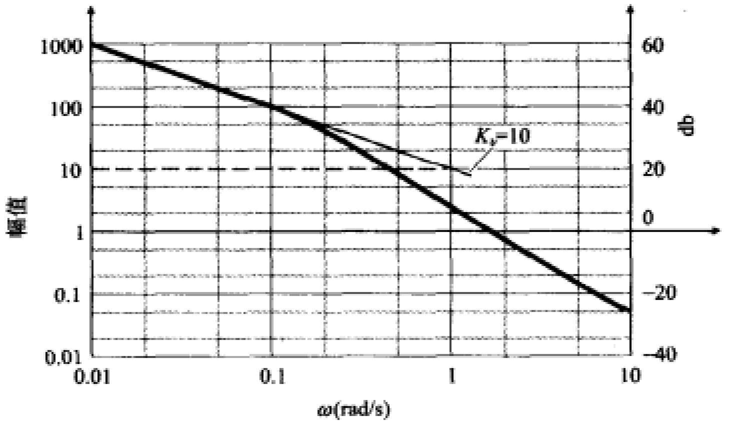


图 6-13 从系统 $KG(s) = 10/[s(s+1)]$ 的伯德图上计算 K_v

6.2 临界稳定

在电子通信工业的早期，许多仪器的性能都是由它们的频率响应来衡量的。因此很自然地，当反馈放大器被引入的时候，计算带反馈器件的稳定性技术就基于它的频率响应。

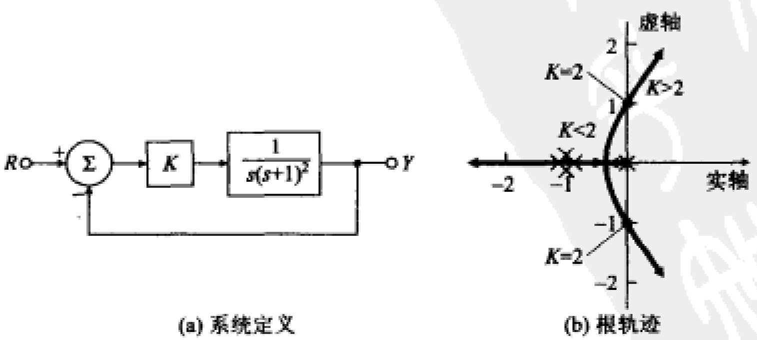


图 6-14 稳定性举例

假定系统的闭环传递函数已经知道，我们可以简单地通过检查因子相乘形式的分

母(因为各因数直接给出系统的根)来观察实部是正是负。但是,实际上闭环传递函数通常都不知道;事实上,我们要理解根轨迹法的目的:在只给定开环传递函数的情况下能够找出闭环传递函数分母的因子。另一个判定闭环稳定性的方法是计算开环传递函数 $KG(j\omega)$ 的频率响应,然后在响应上进行测试。我们注意到,这种方法并不需要把闭环传递函数的分母变为因子形式。在这一节,我们会解释这种方法的规则。

假定一个系统由图 6-14a 所定义,它的根轨迹如图 6-14b 所示;那就是如果 K 大于 2,系统不稳定。临界稳定点落在虚轴上——即当 $K=2$ 时,$s=j1.0$。还有,我们在 5.1 节知道,根轨迹上的所有点都符合下面两式:

$$|KG(s)| = 1 \text{ 和 } \angle G(s) = 180^\circ$$

在临界稳定点,我们知道这些根轨迹条件符合 $s = j\omega$,所以

$$|KG(j\omega)| = 1\text{,和 } \angle G(j\omega) = 180^\circ \tag{6-24}$$

因此一个临界稳定系统(即它的 K 值使得一个闭环根落在虚轴上)的伯德图满足式(6-24)的条件。图 6-15 显示了图6-14所示系统在不同 K 值下的频率响应曲线。当 $K=2$ 时幅值响应在 $\omega=1$ rad/s 时经过 1,而在相同的频率处,相位经过 180°,就如式(6-24)所示。

既然已经找出临界稳定点,那么我们试问一个关键问题:加大增益会增强还是降低系统的稳定性?我们可以从图 6-14b 中看到,当 K 小于临界稳定值时系统都是稳定的。在相位 $\angle G(j\omega) = -180^\circ$ 的频率处($\omega=1$ rad/s),当 K 是稳定值时,幅值 $|KG(j\omega)|<1.0$;而当 K 是不稳定值时,$|KG(j\omega)|>1$。因此,基于开环频率特性,我们得到下面的试验性稳定条件:

$$\text{当 } \angle G(j\omega) = -180^\circ \text{ 时,} |KG(j\omega)| < 1 \tag{6-25}$$

该稳定性判据对所有那些加大增益会导致不稳定而且 $|KG(j\omega)|$ 只经过一次幅值 1 的系统成立,这是大多数情况。但是,也存在加大增益会从不稳定变为稳定的系统;在这种情况下,稳定条件是:

$$\text{当 } \angle G(j\omega) = -180^\circ \text{ 时,} |KG(j\omega)| > 1 \tag{6-26}$$

同样,也存在 $|KG(j\omega)|$ 经过幅值 1 多于一次的系统。一种通常能充分解

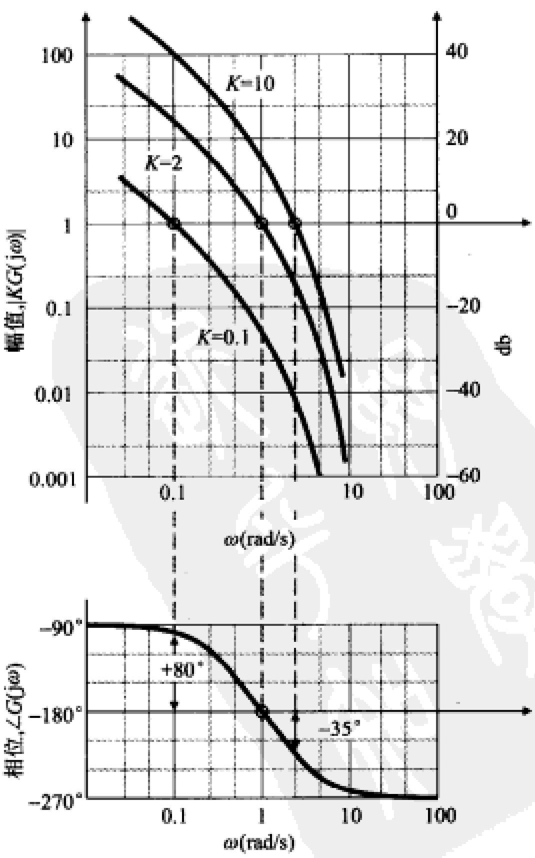


图 6-15　图 6-14 系统的频率响应的幅值和相位

决这种含糊情况的方法是画一个粗略的根轨迹图。另一种更加严密的方法是应用奈奎斯特稳定判据，这是下一节要讨论的内容。不管怎样，因为奈奎斯特判据相当复杂，学习它时，时刻记住本节的主题是很重要的，那就是对于大多数的系统，闭环稳定性与开环频率响应之间存在某种简单的关系。

6.3 奈奎斯特稳定性判据

对于大多数系统来说，就像我们在 6.2 节所看到的，加大增益最终导致不稳定。在反馈控制设计学科的早期，增益和稳定裕度的这种关系被认为是普遍成立的。但是，设计人员在偶然情况下在实验室里发现了这个关系自相矛盾了；就是，当增益减小时，放大器反而变得不稳定。这些互相抵触的情况带来的困惑，促使贝尔电话实验室的 Harry Nyquist 在 1932 年深入研究了这个问题。他解释了这种偶然反常的情况并且缜密而没有漏洞地进行分析。毫无疑问，他的成果自然被称为奈奎斯特稳定性判据。这个理论是基于复变量理论的幅角定理①，我们会在本节简要地介绍它，更详细的介绍请参看附录 B。

奈奎斯特稳定性判据把开环频率响应和系统的闭环根在右半平面的个数联系起来。学习奈奎斯特判据能让你从频率响应角度来判定复杂系统的稳定性。例如可能有一个或多个谐振频率，即幅值曲线多次经过 1 和/或相位多次经过 180°。它对处理开环、不稳定系统、非最小相位系统，以及还有纯时滞（传输滞后）系统都非常有用。

6.3.1 幅角原理

考虑传递函数 $H_1(s)$，它的极点和零点已经在图 6-16a 的 s 平面上表示出来。我们打算当变量 s 沿闭合曲线 C_1 顺时针取值时计算 H_1。[因此称为**等高线计算**(**contour evaluation**)。]我们选择测试点 s_0 计算，所得的结果是复数，并有如下形式 $H_1(s_0)=\vec{v}=|\vec{v}|e^{j\alpha}$。$H_1(s_0)$ 的幅角大小是

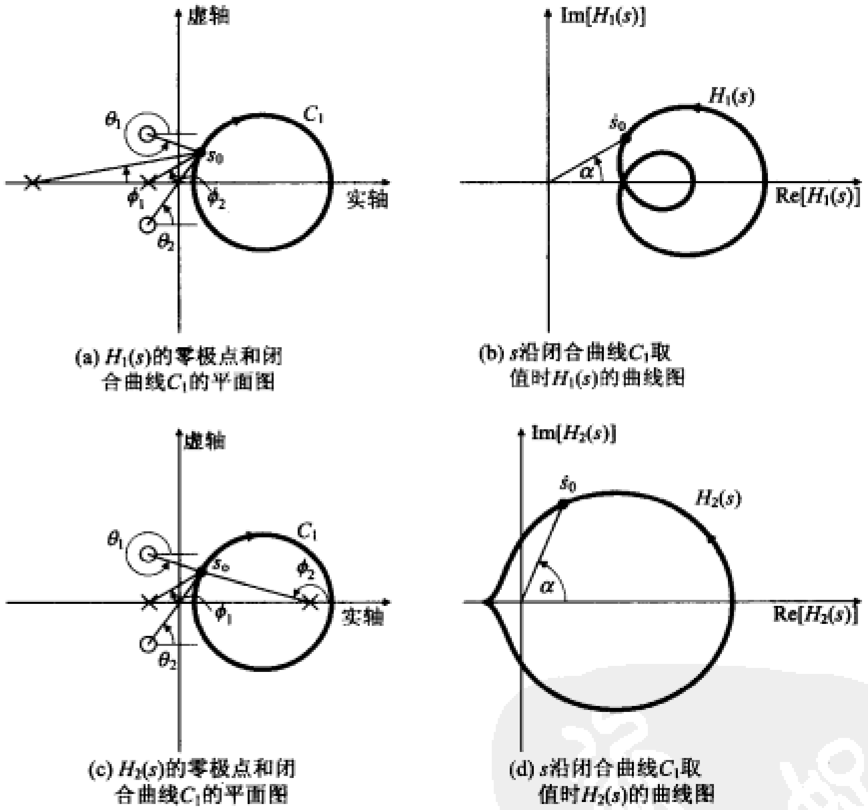
$$\alpha=\theta_1+\theta_2-(\varphi_1+\varphi_2)$$

当 s 从 s_0 开始沿 C_1 顺时针旋转时，在图 6-16b 中 $H_1(s)$ 的相角 α 随之改变（减小或增大），但只要没有极点和零点在 C_1 里面，相角的净改变量就总不会达到 360°。这是因为构成 α 的各相角中没有一个转了一个圈。当 s 沿着 C_1 旋转时，相角 θ_1、θ_2、φ_1 和 φ_2 增大或减小，但它们都没有变化超过 360° 就又回到初始值。这表明[图 6-16b]的相角图将不会包围原点。得出这个结论的依据是，α 是图 6-16a 中所示的各个角的总和，所以使 α 在 s 旋转 C_1 一圈后改变 360° 的唯一方法是 C_1 包含一个极点或零点。

现在我们考虑函数 $H_2(s)$，它的零极点分布已经在图 6-16c 显示出来。注意，它有一个奇点（极点）在 C_1 里面。同样，我们从测试点 s_0 开始。当变量 s 沿着顺时针方向旋

① 有时被称为“柯西幅角定理”。

转时，θ_1、θ_2 和 φ_1 三者之和改变，但它们都在 s 旋转一周回到 s_0 后也回到初始值。相比之下，当 s 旋转一周 C_1 后，C_1 里面的极点的相角 φ_2，它的净改变量是－360°。因此，$H_2(s)$ 的相角也有相同的改变，使得 H_2 逆时针包围原点，如图 6-16d 所示。如果 C_1 包含一个零点而不是一个极点，那么情况也是类似的。C_1 在 $H_2(s)$ 平面的映射会包围原点一次，只是这次是顺时针包围。



(a) $H_1(s)$的零极点和闭合曲线C_1的平面图

(b) s沿闭合曲线C_1取值时$H_1(s)$的曲线图

(c) $H_2(s)$的零极点和闭合曲线C_1的平面图

(d) s沿闭合曲线C_1取值时$H_2(s)$的曲线图

图 6-16　等高线计算

因此，我们有下面的**幅角原理**(**argument principle**)的基本内容：

一个复函数对闭合曲线的映射得到的曲线会包围原点 $Z-P$ 次，这里的 Z 和 P 分别是函数在闭合曲线里面的零点数和极点数。

举个例子，如果在 C_1 里面的极点数和零点数相等，那么各个角会相互抵消而不会包围原点。

6.3.2　在控制设计中的应用

为把这个定理应用于控制设计，我们把 s 平面的闭合曲线 C_1 包围整个右半平面，如果有极点在这个区域，那么系统都是不稳定的。只要 $H(s)$ 在右半平面有一个极点或零点，它的曲线都会包围原点。

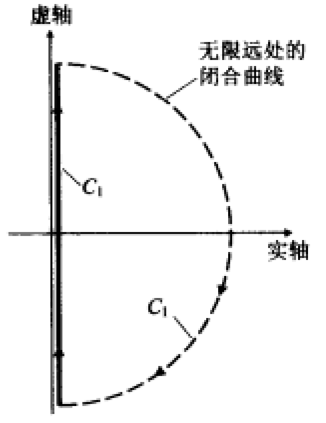


图 6-17 闭合曲线 C_1 包含整个右半平面的 s 平面图

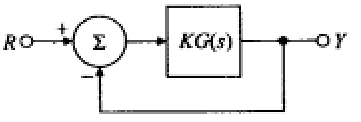


图 6-18 $Y(s)/R(s) = KG(s)/[1+KG(s)]$ 的框图

就像之前所说的，这种方法的用处在于：由开环 $KG(s)$ 的闭合曲线映射计算可以判定闭环系统的稳定性。具体来说，对于图 6-18 的系统，它的闭环传递函数是

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \mathcal{T}(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

因此，闭环根是下面方程的解：

$$1+KG(s)=0$$

我们把幅角原理应用于函数 $1+KG(s)$ 上，如果该函数有零点或极点在右半平面，那么对包含整个右半平面的闭合曲线进行映射计算时，$1+KG(s)$ 的曲线会包围原点。注意，$1+KG(s)$ 只不过是由 $KG(s)$ 右移一个单位得到的，如图 6-19 所示。因此，如果 $1+KG(s)$ 的曲线包围原点，那么 $KG(s)$ 的曲线就包围实轴上 -1 这个点。因此，我们可以画开环 $KG(s)$ 的映射曲线，检查它包围 -1 的情况，即可知道闭环函数 $1+KG(s)$ 包围原点的情况。$KG(s)$ 的这种曲线通常称为**奈奎斯特曲线图(Nyquist plot)**，或**极坐标图(polar plot)**，因为我们把 $KG(s)$ 的幅值和相角都表示出来了。

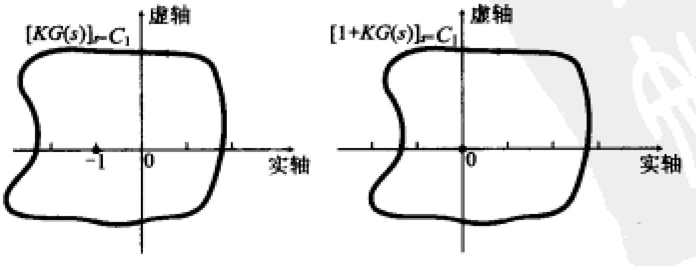


图 6-19 $KG(s)$ 和 $1+KG(s)$ 的映射计算：奈奎斯特曲线图

为判定包围原点是由极点还是零点引起的，我们把 $1+KG(s)$ 写成 $KG(s)$ 的零极点形式：

$$1+KG(s)=1+K\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{a(s)+Kb(s)}{a(s)} \tag{6-27}$$

式(6-27)表明 $1+KG(s)$ 的极点也是 $G(s)$ 的极点。因为假定 $G(s)$ 的极点[或者 $a(s)$ 的因子]是已知的，这种假设通常没有什么大碍，那么我们就可以先向读者交代极点在右半平面的分布情况。现在，我们假定 $G(s)$ 没有极点在右半平面，那么 $KG(s)$ 包围 -1 一圈意味着 $1+KG(s)$ 有一个零点在右半平面，因此闭环系统有一个不稳定的根。

我们可以把这个基本原理做更一般化的推广，注意到顺时针闭合曲线 C_1 包含 $1+KG(s)$ 的一个零点（即一个闭环系统的根）导致 $KG(s)$ 顺时针包围 -1。同样，如果 C_1 包含 $1+KG(s)$ 的一个极点（即如果有一个不稳定的开环极点）那么 $KG(s)$ 会逆时针包围 -1。更进一步地说，如果有两个或两个零点在右半平面，$KG(s)$ 会包围 -1 两次，等等。顺时针包围次数 N，等于在右半平面的零点（闭环系统的根）的个数 Z，减去右半平面的开环极点的个数 P：

$$N=Z-P$$

这就是奈奎斯特稳定判据的基本思想。

一个物理系统 $KG(s)$ 对无限大的频率响应为零（即极点多于零点），这个事实能简化 $KG(s)$ 曲线的画图步骤。它表明 C_1 对应于 s 无限大的弧段（图 6-17）使 $KG(s)$ 的值无限小。因此，只要计算当 s 沿着虚轴从 $-\mathrm{j}\infty$ 到 $+\mathrm{j}\infty$ 取值时 $KG(s)$ 的值就可以了。（事实上是从 $-\mathrm{j}\omega_h$ 到 $+\mathrm{j}\omega_h$，这里的 ω_h 足够大使得当 $\omega>\omega_h$ 时 $|KG(\mathrm{j}\omega)|$ 远小于 1。）当从 $s=0$ 到 $s=\mathrm{j}\infty$ 时，$KG(s)$ 的计算已经在 6.1 节求 $KG(s)$ 的频率响应时讨论过了。因为 $G(-\mathrm{j}\omega)$ 是 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的共轭复数，所以与 $KG(s)$ 在 $0\leqslant s\leqslant+\mathrm{j}\infty$ 部分的曲线关于实轴对称的图像就是 $KG(s)$ 的 $-\mathrm{j}\infty\leqslant s<0$ 部分的曲线，这样我们就轻易地画出了 $KG(s)$ 的整个曲线。所以，我们可以看到，对于所有情况都可以通过检验开环传递函数频率响应的极坐标图来判定闭环系统的稳定性。在某些应用场合，一些物理系统的模型被简化以消除一些高频动态特性。这些降了阶的传递函数可能有相同的极点和零点数。在这种情况下，C_1 无限远处的弧段就要重新考虑了。

在实际中，许多系统都是如 6.2 节所讨论的特性，所以你不需要把 $KG(s)$ 整个的曲线都画出来然后再检查它包围了 -1 多少圈；根据增益裕度和相位裕度，简单地观察频率响应可能就已足够判定其稳定性。但是，对于那些复杂系统，6.2 节所给出的过于简单的规则变得模棱两可，这时你就需要进行全面的分析，概括如下：

(1) 画 $KG(s)$ 的 $-\mathrm{j}\infty\leqslant s\leqslant+\mathrm{j}\infty$ 部分。首先从 $\omega=0$ 到 ω_h 计算，这里的 ω_h 足够大使得当 $\omega>\omega_h$ 时 $KG(\mathrm{j}\omega)$ 非常小，以致可以忽略，然后画与这一部分关于实轴对称的曲线，再把两部分曲线相连。对于所有的物理系统，在高频段，$KG(\mathrm{j}\omega)$ 的幅值很小。奈奎斯特曲线总是关于实轴对称的。

(2) 计算曲线顺时针包围 -1 的次数，令其为 N。可以画一条任意方向的从 -1 指向 ∞ 的直线，然后计数 $KG(s)$ 从左到右穿越直线的次数。如果是逆时针方向包围，那

么 N 是负的。

(3) 计算的不稳定极点(在右半平面)的个数,令其为 P。

(4) 计算不稳定闭环根的数量 Z:

$$Z=N+P \tag{6-28}$$

对于稳定性,我们希望 $Z=0$;那就是,没有特征方程的根在右半平面。

现在让我们来计算几个严格应用奈奎斯特曲线的例子。

例 6.8 二阶系统的奈奎斯特曲线图

确定图 6-20 所示的系统的稳定特性。

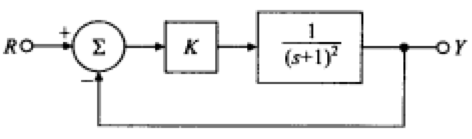


图 6-20 例 6.8 的控制系统

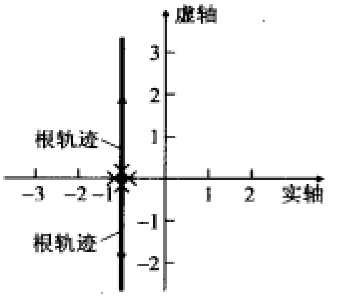


图 6-21 参数为 K 的 $G(s)=1/(s+1)^2$ 的根轨迹图

解:图 6-20 所示系统的根轨迹图已经画在了图 6-21 上。它表明对于所有的 K 值,系统都是稳定的。$K=1$ 时 $KG(s)$ 频率响应的幅值曲线已经画在了图 6-22a 上,相位曲线画在图6-22b 上;这是典型的表示频率响应的伯德方法,在我们感兴趣的频率范围内把 $G(s)$ 表示出来。但包含同样信息的奈奎斯特(极坐标)曲线也在图 6-23 上画出来了。注意,A、B、C、D 和 E 点是怎样从伯德图映射到图 6-23 的奈奎斯特曲线上的。在实轴下面的从 $G(s)=+1(\omega=0)$ 到 $G(s)=0(\omega=\infty)$ 的弧段是从图 6-22 得到的。图 6-17 中 C_1 无限远的弧段在图 6-23 中变换成 $G(s)=0$;因此将实轴下面曲线的部分关于实轴对称就得到了 s 沿着 C_1 运动时 $G(s)$ 的整个闭合曲线的连续映射曲线。通过这一步骤我们得到了实轴上面的曲线,奈奎斯特曲线也完成了。因为曲线并没有包围 -1,$N=0$。而且 $G(s)$ 也没有极点在右半平面,所以 $P=0$。根据式(6-28),我们得到 $Z=0$,这表明了当 $K=1$ 时闭环系统没有不稳定根。还有,不同的 K 值只是改变极坐标图的幅值,但并没有大于零的 K 值使曲线包围 -1,因为极坐标曲线总是在 $KG(s)=0$ 时穿越负实轴。因此,奈奎斯特稳定性判据验证了根轨迹所表明的结论:对于所有的 $K>0$,闭环系统都是稳定的。

画奈奎斯特曲线的 MATLAB 语句是:

```
numG = 1;
denG = [1  2  1];
sysG = tf(numG,denG);
nyquist(sysG);
```

通常,零控制系统工程师更感兴趣的是,找出系统稳定时增益 K 的范围而不是对一个具体的 K 值测定其稳定性。为满足这个要求,但又要避免画许多条对应不同增益的奈奎斯特曲线,我们

可以稍微修改一下测试。我们以 K 为因子缩小 $KG(s)$，检验一定范围内 K 的值确定 $G(s)$ 的稳定性。这是可能的，因为 $KG(s)$ 包围 -1 等价于 $G(s)$ 包围 $-1/K$。因此我们只需考虑 $G(s)$ 而不用处理 $KG(s)$ 了，然后计算包围点 $-1/K$ 的次数。

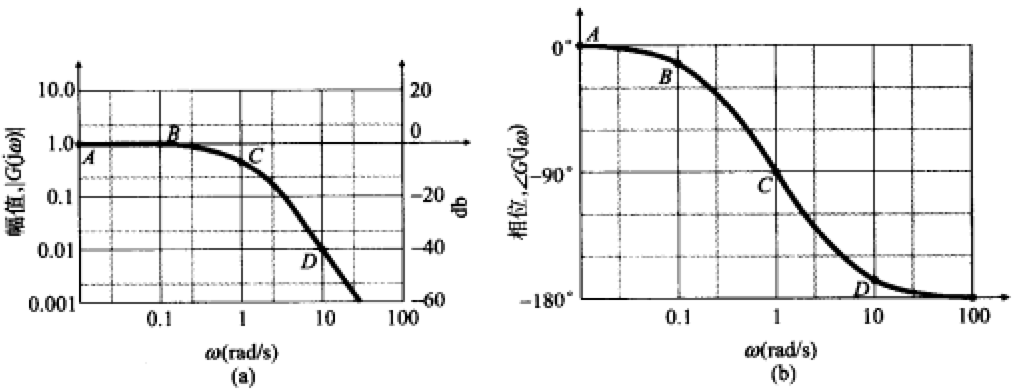


图 6-22　$G(s)=1/(s+1)^2$ 的开环伯德图

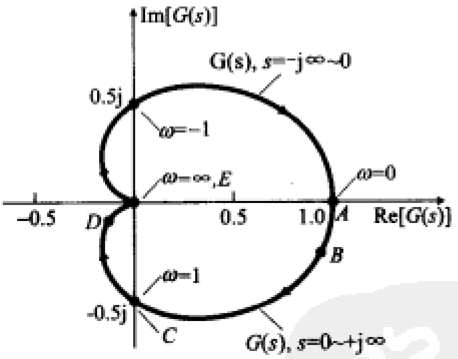


图 6-23　当 $s=C_1$ 和 $K=1$ 时，$KG(s)$ 的奈奎斯特曲线图

将这个思想应用于例 6.8，我们可以看到奈奎斯特曲线并不能包围点 $-1/K$。对于 K 大于零，点 $-1/K$ 沿着负实轴移动，所以对于任意 $K>0$ 都不能包围这个点。

（当 $K<0$ 时，奈奎斯特曲线也表明系统是稳定的；特别地，$-1<K<0$。这个结果可以通过画 0° 根轨迹来验证。）

例 6.9　三阶系统的奈奎斯特曲线图

举第二个例子，考虑系统 $G(s)=1/s(s+1)^2$，它的闭环系统如图 6-24 定义。用奈奎斯特判据确定它的稳定特性。

解：这是在 6.2 节讨论过的相同系统。图 6-14b 的根轨迹图表明，对小的 K 值系统是稳定的。但对大一点的 K 值就不稳定了。图 6-25 系统的幅值和相位图已经转换成如图 6-26 所示的奈奎斯特曲线图。注意在图 6-25 伯德图中的 A、B、C、D 和 E 点怎样映射

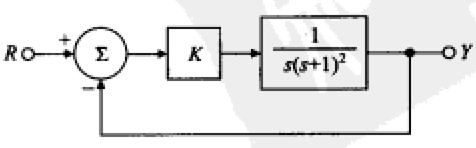


图 6-24　例 6.9 的控制系统

到图 6-26 中奈奎斯特曲线上的点。同样，注意无限大的弧段是从开环极点 $s=0$ 转换过来的。这个极点导致 $G(s)$ 的幅值在 $\omega=0$ 处无限大；事实上，任意在虚轴上的极点都会产生无限大的弧段。为正确判定包围点 $-1/K$ 的次数，我们必须把这一弧段在合适的半平面上画出来：它应该如图 6-26 所示的穿越正实轴吗，还是穿越负实轴？同样也有必要确定弧段旋转 180°（就像图6-26），360°还是 540°。

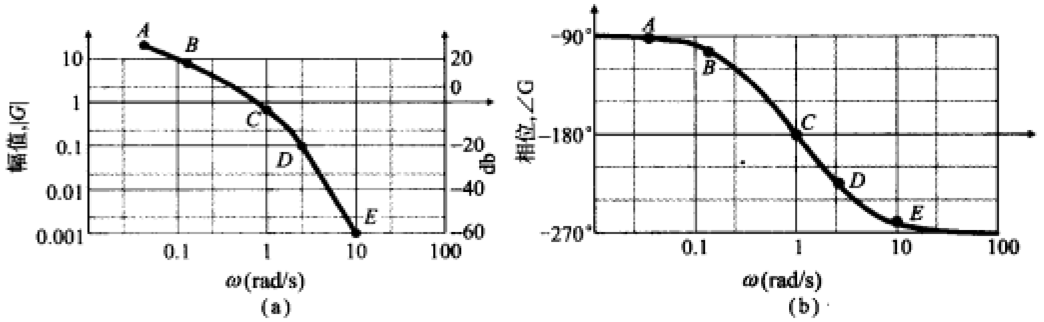


图 6-25　$G(s)=1/[s(s+1)^2]$ 的伯德图

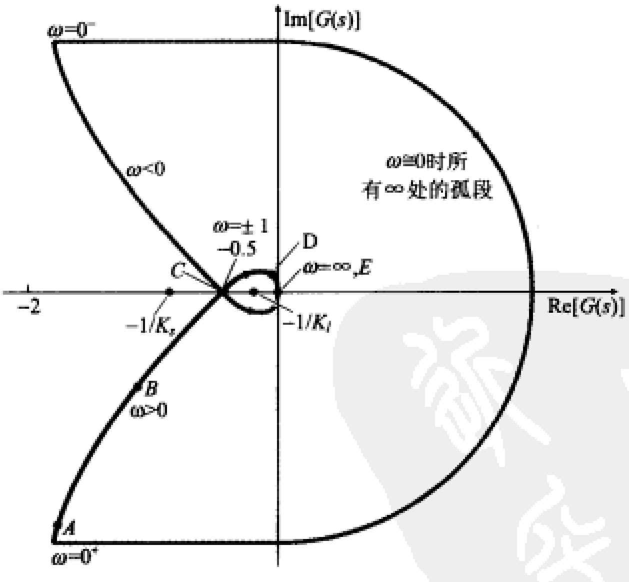


图 6-26　$G(s)=1/[s(s+1)^2]$ 的奈奎斯特曲线

我们只要简单变通一下就能解决这些问题。我们对闭合曲线略作修改，它在右边（图 6-27）或左边轻轻绕过极点。走哪一边对最终要解决的稳定性问题其实没有区别，但走右边就比较方便，因为这样闭合曲线 C_1 就不会引入极点了，使得 P 等于 0。因为 $G(s)$ 的相位是各极点相角之和的负数，所以我们看到在奈奎斯特曲线上，当 s 刚刚小于极点 $s=0$ 时为 $+90°$，然后穿过正实轴，在 s 刚刚大于极点 $s=0$ 时为 $-90°$。如果在 $s=0$ 有两个极点，那么奈奎斯特曲线无限大的弧段会旋转 360°，三个或更多个极点也如此类推。还有，如果极点在虚轴的其他地方，那么对应的弧段仍顺时针旋转 180°，但其指向可能与图 6-26 所示的例子不同。

奈奎斯特曲线在 $\omega=1$ 处以 $|G|=0.5$ 穿过实轴，其实从伯德图也可以指出来。当 $K>0$ 时，$-1/K$ 的位置有两种可能：在奈奎斯特曲线的两个环里面，或者完全在封闭的奈奎斯特曲线外面。对于比较大的 K 值(例如图 6-26 中的 K_l)，$-0.5<-1/K_l<0$ 会落在环里面；因此 $N=2$，所以 $Z=2$，表明有两个不稳定根。这是 $K>2$ 时的情况。对于较小的 K 值(例如图 6-26 中的 K_s)落在环外面；因此 $N=0$，所有的根都是稳定的。所有的这些结论都与图 6-14b 的根轨迹图相一致。(当 $K<0$ 时，$-1/K$ 落在正实轴上，那么 $N=1$，从而得到 $Z=1$，这时系统有一个不稳定根。0°根轨迹会验证这个结果。)

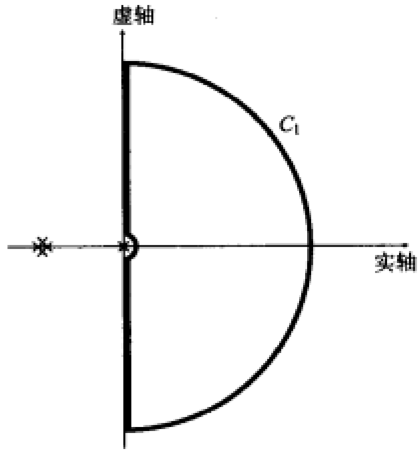


图 6-27　与例 6.9 系统对应的包含整个右半平面的闭合曲线 C_1

对于这样的情况，还有很多类似的系统，我们可以看到包围判据简化为非常简单的以开环频率响应为基础的稳定性测试：当 $G(j\omega)$ 的相位为 180° 时，若 $|KG(j\omega)|<1$，那么系统是稳定的。注意，这个结论与式(6-25)给出的稳定性判据是一样的；但是，运用奈奎斯特判据并不需要画根轨迹图来确定 $|KG(j\omega)|<1$ 还是 $|KG(j\omega)|>1$。

我们用下面的 MATLAB 语句来画奈奎斯特曲线：

```
numG = 1;
denG = [1  2   1   0];
sysG = tf(numG,denG);
axis([-5  5   -5   5])
nyquist(sysG);
```

坐标轴命令用来调整图像，使其只包含实轴和虚轴上分别从 +5 到 −5 这个区间的点。如果不进行调整，那么图像的范围是 $\pm\infty$，图像在 −1 附近区域的最重要特征就会丢失。

对于开环不稳定系统，我们必须小心，因为此时在式(6-28)中 $P\neq 0$。我们会看到在这种情况下，6.2 节的那条简单规则需要做进一步的改进。

例 6.10　开环不稳定系统的奈奎斯特曲线

第三个例子如图 6-28 所定义。运用奈奎斯特判据确定它的稳定特性。

解：这个系统的根轨迹图已经画在了图 6-29 中。开环系统是不稳定的，因为它有一个极点在右半平面。开环的伯德图也画在了图 6-30。注意，在伯德图里 $|KG(j\omega)|$ 表现出来的特性很像极点都在左半平面。但是，$\angle G(j\omega)$ 在极点增加了 90°而不是像通常那样减小。任何系统只要有极点在右半平面都是不稳定的；因此不可能用实验方法来确定频率响应，因为对正弦输入，系统永远不会达到正弦响应的稳态。但是，我们可以根据 6.1 节的规则来计算传递函数的幅值和相位。右半平面的极点影响奈奎斯特曲线包围次数的判定，因为在式(6-28)中 P 值为 +1。

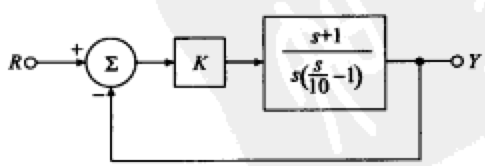


图 6-28　例 6.10 的控制系统

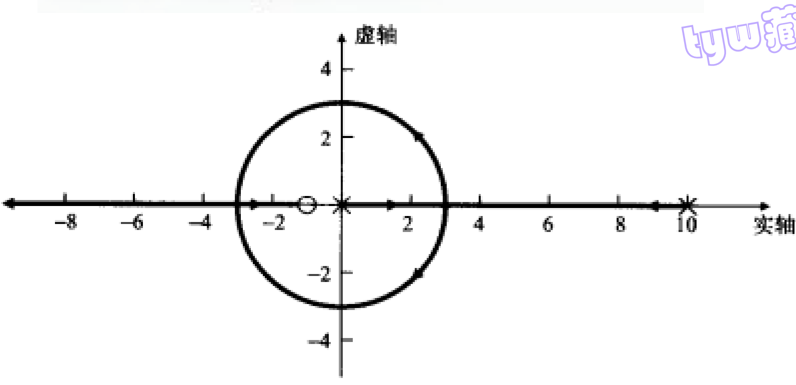


图 6-29　$G(s)=(s+1)/[s(s/10-1)]$ 的根轨迹图

就像上一个例子，我们把图 6-30 的频率响应信息转换成奈奎斯特曲线(图 6-31)。也像之前的，在图 6-32 中稍稍绕过极点 $s=0$ 的闭合曲线 C_1，在图 6-31 产生了一个无限远的大圆弧。这个圆弧穿越负实轴，因为在右半平面的极点"贡献"了 180°的相位。

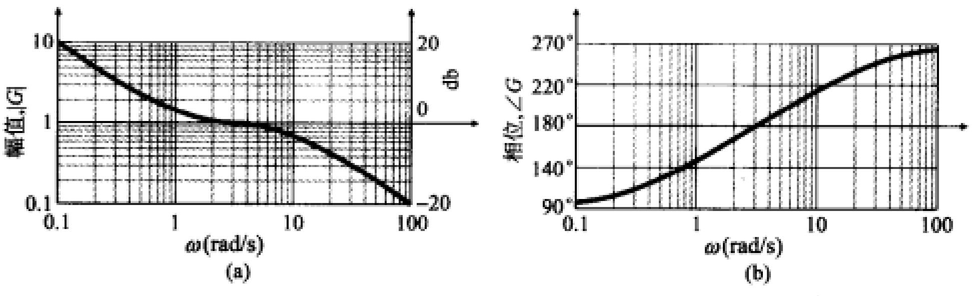


图 6-30　$G(s)=(s+1)/[s(s/10-1)]$ 的伯德图

曲线在 $|G(s)|=1$ 穿越实轴，因为在伯德图中 $\angle G(s)=180°$时 $|G(s)|=1$，而这时 $\omega\cong 3$ rad/s。

对于 K 值(>0)的情况，奈奎斯特曲线表现出两种不同的特性。对于比较大的 K 值(例如图 6-31 的 K_l)，曲线逆时针包围一次；因此 $N=-1$。但是，因为有一个极点在右半平面，$P=1$，$Z+P=0$，所以系统没有不稳定根，当 $K>1$ 时系统是稳定的。对于比较小的 K 值(例如图 6-31 的 K_s)，$N=+1$，因为曲线顺时针包围一次，$Z=2$，表明有两个不稳定根。这时 $K>1$。这些结果都可以在图 6-29 的根轨迹图上定性地验证。(如果 $K<0$，那么 $-1/K$ 在实轴上，所以 $N=0$，$Z=1$，表明系统有一个不稳定的闭环根，这可以由 0°根轨迹来验证。)

对于所有的系统，稳定的分界好像都是当相位为 $\angle G(j\omega)=180°$时，$|KG(j\omega)|=1$。但是，在这种情况下，$|KG(j\omega)|$ 必须大于 1 才能使包围 -1 的次数合适以达到稳定。

要用 MATLAB 画奈奎斯特曲线，可用下面的命令：

```
numG = [1  1];
denG = [0.1  -1  0];
sysG = tf(numG,denG);
axis([-5  5  -5  5]);
nyquist(sysG)
```

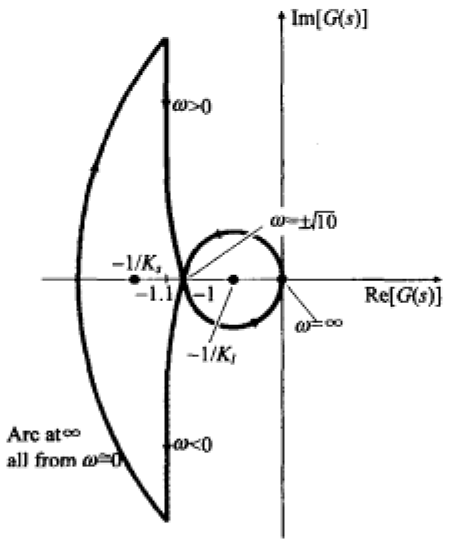


图 6-31　$G(s)=(s+1)/[s(s/10-1)]$ 的奈奎斯特曲线

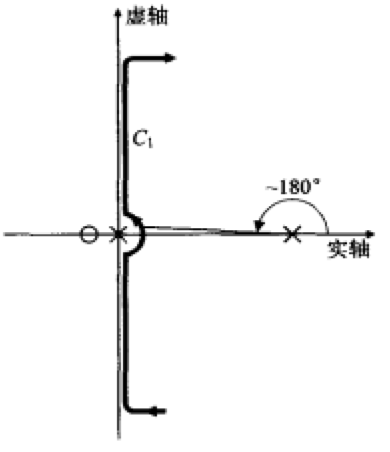


图 6-32　例 6.10 的闭合曲线 C_1

在例 6.10 中，右半平面极点的存在影响着伯德图相位曲线的画图规则，也影响着包围次数与不稳定闭环根的关系，因为在式(6-28)中 $P=1$。但我们仍无须修改应用奈奎斯特稳定性判据。对于右半平面存在零点的系统，也有相同结论，那就是，非最小相位系统对奈奎斯特稳定性判据没有影响，但对伯德图的画图规则有影响。

6.4　稳定裕度

在控制系统设计所面对的系统中，有相当一部分是类似于 6.2 节的系统或 6.3 节例 6.9 所描绘的系统；其特点是：对于小的增益，系统是稳定的；如果增益增大超过某一临界点，系统就会变得不稳定。用来衡量这样的系统的稳定裕度的两个普遍指标：增益裕度和相位裕度，与式(6-25)的稳定判据有直接联系。在这一节，我们会定义和使用这两个概念来学习系统设计。另一个衡量稳定性的指标，最初是由 O. J. M. Smith (1958)定义的，他把上面两个裕度指标合并成一个新的指标，而且对复杂的情况给出了一个更好的手段。

增益裕度(GM)就是增益在稳定系统达到临界稳定之前所能放大的倍数。举一个典型的例子，我们可以直接从伯德图上读取数据(例如图 6-15)，这样增益裕度就可以通过在 $\angle G(j\omega)=180°$ 的频率处测量 $|KG(j\omega)|$ 曲线与水平线 $|KG(j\omega)|=1$ 的垂直距离来得到。我们从图中可以看到，当 $K=0.1$ 时，系统是稳定的，而且 GM=20(或 26db)。当 $K=2$ 时，系统临界稳定，GM=1(0db)；而 $K=10$ 时，系统不稳定，此时 GM=0.2(−14db)。注意，GM 就是增益 K 在导致系统不稳定之前能增大到的倍数；因

此，|GM| <1(或 |GM| <0 db)表明系统不稳定。GM 也可以在参数为 K 的根轨迹图上测量得到，只要找出两个地方的 K 值：(1)根轨迹穿过 jω 轴时的值；(2)标称的闭环极点对应的 K 值。GM 就是这两个的比值。

另一个衡量系统稳定裕度的指标是**相位裕度(PM)**。它是当 $|KG(j\omega)|=1$ 时相位超过 $-180°$的度数。这是另一种在式(6-25)的稳定条件下测量稳定程度的方法。在图 6-15 的例子中，我们可以看到，当 $K=0.1$ 时 PM$\cong 80°$；当 $K=2$ 时 PM$=0°$；当 $K=10$ 时 PM$=-35°$。要保证系统的稳定性，PM 必须是正的。

我们注意到，PM 和 GM 这两个稳定指标一起确定了复变量 $G(j\omega)$ 到点 -1 的距离，这个点也是式(6-24)所描述的临界稳定点。

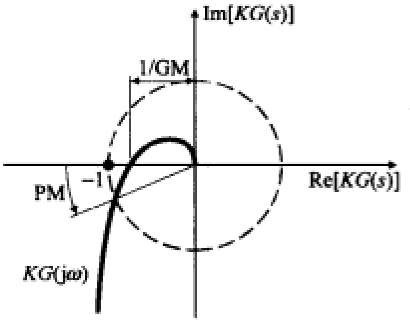


图 6-33　定义 GM 和 PM 的奈奎斯特图

稳定裕度也可以在奈奎斯特曲线上定义。图 6-33 表明，GM 和 PM 衡量了奈奎斯特曲线离包围点-1有多近。同样，我们可以看到，GM 描述了增益在导致系统不稳定之前能增大多少，就像例 6.9。PM 是在 $KG(j\omega)$ 穿过圆 $|KG(j\omega)|=1$ 时 $G(j\omega)$ 的相位与$-180°$之差；PM 的正值对应于稳定状态(即没有奈奎斯特包围)。

相比奈奎斯特曲线，直接从伯德图上更容易测量这些裕度。**穿越频率(crossover frequency)** ω_c，通常定义为增益为 1 或 0db 时的频率。图 6-34 显示了图 6-25 相同的数据，但只是在 $K=1$ 附近。PM($=22°$)和 GM($=2$)，这些相同的数据也可以从图 6-26 的奈奎斯特曲线上得到。与实轴的交点-0.5对应的 GM 等于 1/0.5 或 2，而 PM 则可以通过在图上测量 $G(j\omega)$ 穿过圆 $|G(j\omega)|=1$ 时的相位来计算得到。

频率响应设计的一个有用之处是，我们可以容易地评估增益改变所带来的影响。事实上，我们在图 6-34 上确定任意 K 值的 PM 而不需要重画幅值和相位曲线。我们只需要从图中找出对于选定的 K 值，$|KG(j\omega)|=1$ 对应的水平线，例如图 6-35 所示的短划线。现在我们看到，$K=5$ 产生了不稳定的$-22°$PM，而 $K=0.5$ 则产生$+45°$ PM。还有，如果我们想要得到一定的 PM(例如 70°)，那么我们可以简单地在产生期望 PM 的频率处，找出对应的 $|G(j\omega)|$ 值(这里 $\omega=0.2$ rad/s 产生 70°，而此时 $|G(j\omega)|=5$)。注意到，在这个频率处幅值是 $1/K$，因此 $K=0.2$ 可以产生 70° 的 PM。

PM 更普遍地用来描述控制系统的性能，因为它与系统的阻尼比有着非常紧密的关系。这可以从开环二阶系统很容易地看出来。设

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \tag{6-29}$$

若为单位反馈，则闭环系统是

$$T(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{6-30}$$

该系统的 PM 和 ζ 的关系如下：

$$\mathrm{PM} = \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}\right] \tag{6-31}$$

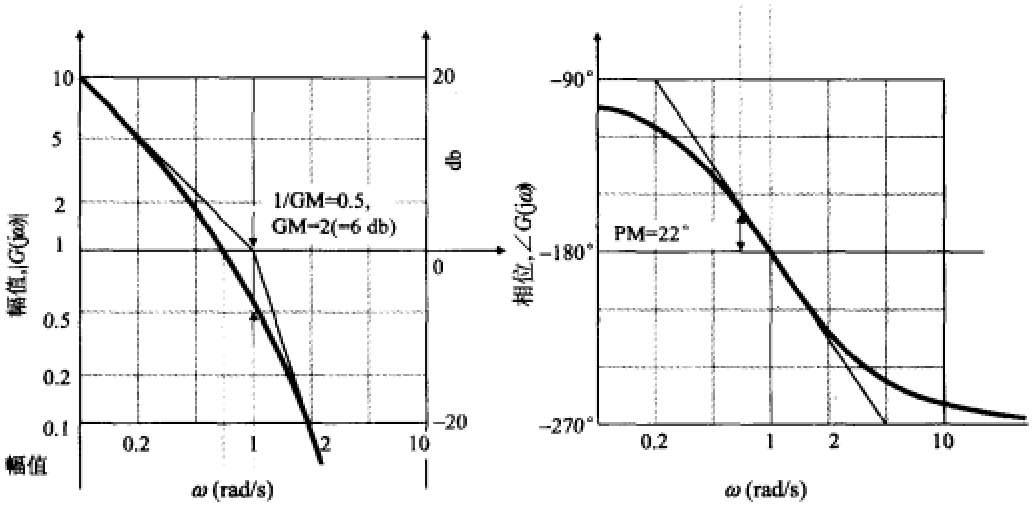


图 6-34 幅值和相位曲线图上的 GM 和 PM

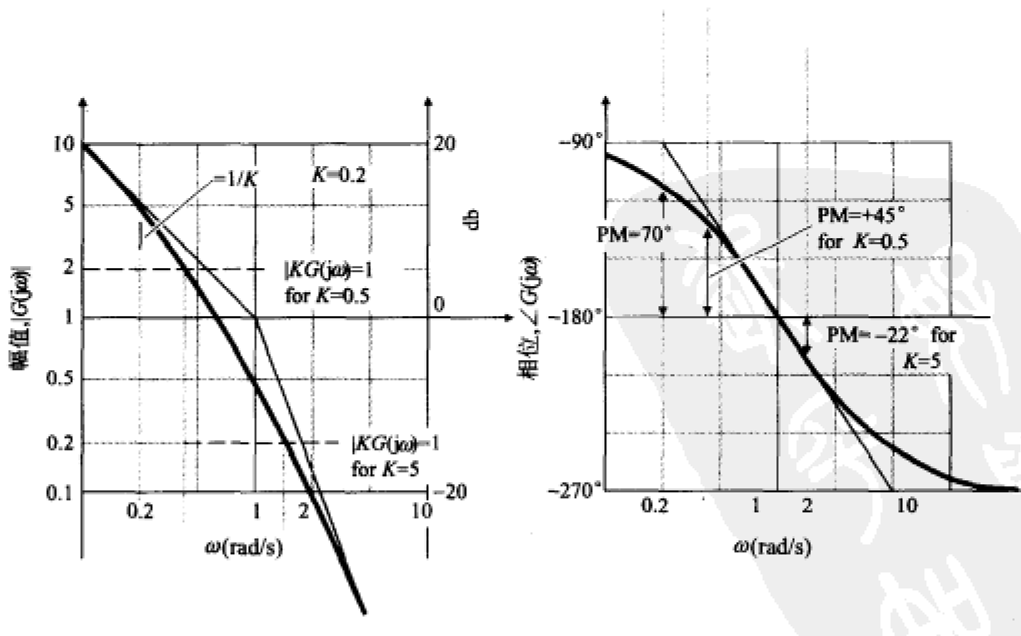


图 6-35 PM 和频率响应数据的 K 的关系

该函数的图像如图 6-36 所示。我们注意到，直到 PM＝60°这个函数近似一条直线。短划线表示一条与这个函数近似的直线，这里

$$\zeta \cong \frac{\mathrm{PM}}{100} \tag{6-32}$$

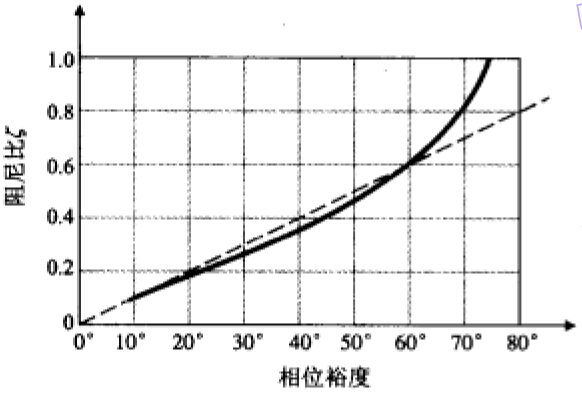


图 6-36 阻尼比和相位裕度(PM)的关系

从图中看得很清楚，在低于 70°的相位裕度，这条直线还是近似的。还有，式(6-31)只对式(6-30)的二阶系统才是准确的。尽管有这些限制，式(6-32)还是经常作为 PM 与闭环阻尼比之间关系的简易描述。以此作为设计的开始有很大用处；但是，像其他方面的性能指标一样，在宣布完成设计之前，总是检查设计的实际阻尼比也是很重要的。

二阶系统[由式(6-29)给出]的增益裕度无限大，因为即使频率增大，相位曲线都不会穿过−180°。这个结论对任何的一阶或二阶系统都是成立的。

从图 6-3 可以看出，谐振峰值 M_r 和 ξ 存在函数关系，据此我们可以得到额外的数据来帮助评估基于 PM 的控制系统。注意，图 6-3 的系统[式(6-9)]是与式(6-30)系统相同的。我们可以把图 6-36 转换成 M_r 与 PM 的关系，已绘制在图 6-37 中，还描绘了阶跃响应的超调量 M_p 。因此，我们可以看到，给出 PM，就可以推断闭环阶跃响应的超调量是怎样的。

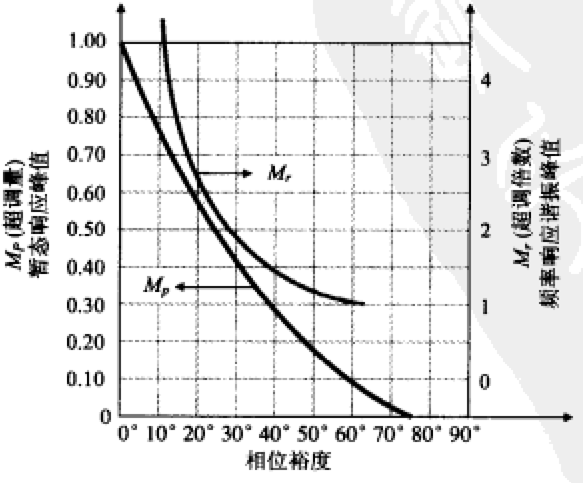


图 6-37

许多工程师直接用PM来判断控制系统是否足够稳定。从这个角度来说，通常认为PM=30°是最小充分值。除了用PM来测试系统的稳定性外，设计人员一般还会关心系统的响应速度，具体而言，例如在6.1节讨论过的带宽。到目前为止，在所讨论过的频率响应参数中，穿越频率是最好的描述系统的响应速度的一个指标，这将在6.6节和6.7节进一步讨论。

在某些情况下，PM和GM并不是稳定的有用指标。对一阶系统和二阶系统，相位曲线永远不会穿过180°；因此GM总是∞，因而并不是一个有用的设计参数。对高阶系统来说，它可能在 $|KG(j\omega)|=1$ 或 $\angle KG(j\omega)=180°$ 时处有多个频率，这时就需要澄清在前面定义的裕度。这种情况的例子可以在图10-12看到，它的幅值曲线穿过1三次。我们决定用第一次穿越定义PM，因为在这次穿越时PM是三个值中最小的，得到的是最保守的稳定性估计。根据图10-12的数据绘制的奈奎斯特曲线表明，曲线最接近点−1的那部分才是有决定性的稳定指标，因此用产生最小值的穿越频率是合乎逻辑的选择。在应用图6-33描述的裕度定义时，设计人员最好时刻保持清新的头脑。事实上，系统的实际稳定裕度只能由计算奈奎斯特曲线最近点到点−1的距离来严格地评定。

为帮助分析，O. J. M. Smith(1958)引进了**向量裕度(vector margin)**这个概念，定义为奈奎斯特曲线上点到−1的最近距离[①]。图6-38图解了这个概念。因为向量裕度是一个单独的裕度参数，所以它消除了因同时使用GM和PM评价稳定性带来的多义性。在过去，它因为难以计算而得不到广泛应用。但是，随着计算机辅助的广泛应用，运用向量裕度来描述稳定性变得越来越可行。

存在这样的实际例子：加大增益会使系统稳定。就像我们在第5章所说的，这些系统被称为条件稳定。图6-39是这类系统的一个典型的根轨迹图。对于一些根轨迹上的点，例如A点，加大增益会把不稳定根拉回到左半平面从而使系统变得稳定。但对于B点，不管是加大还是减小增益，都会使系统变得不稳定。因此，增益的减小或增大都会对应着几个增益裕度，显然，图6-33中GM的定义也变得不可用。

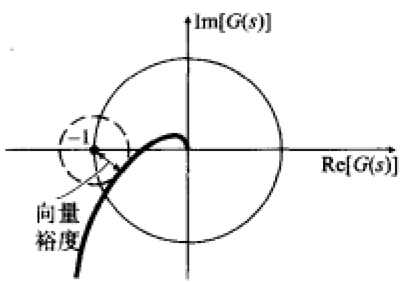


图6-38　奈奎斯特曲线上向量裕度的定义

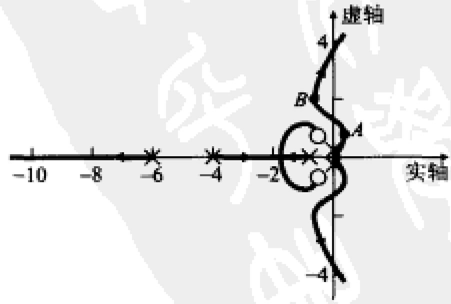


图6-39　一个条件稳定系统的根轨迹图

① 这个值与设计的灵敏度函数和系统稳定的鲁棒性这个概念密切相关，这些都将在选读的6.9节讨论。

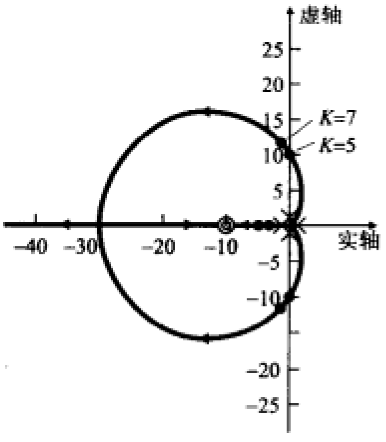
例 6.11 条件稳定系统的稳定特性

计算系统以 K 为函数的稳定性质，它的开环传递函数如下：

$$KG(s)=\frac{K(s+10)^2}{s^3}$$

解：这是一个加大增益会从不稳定过渡到稳定的系统。图 6-40a 所示的根轨迹表明，在 $K<5$ 时，系统不稳定。图 6-40b 是取稳定值 $K=7$ 时的奈奎斯特曲线。根据图 6-33 计算出稳定裕度 PM=+10°(稳定)和 GM=0.7(不稳定)。根据前面讨论的稳定性规则，这两个裕度对系统的稳定性作出了矛盾的结论。

为解决这个矛盾，我们在图 6-40a 数了奈奎斯特包围的圈数。曲线顺时针和逆时针各包围点 −1 一次，因此总的包围次数为零，这说明系统在 $K=7$ 时是稳定的。对于这样的系统，最好是借助根轨迹图和/或奈奎斯特曲线图(而不是伯德图)来判定其稳定性。



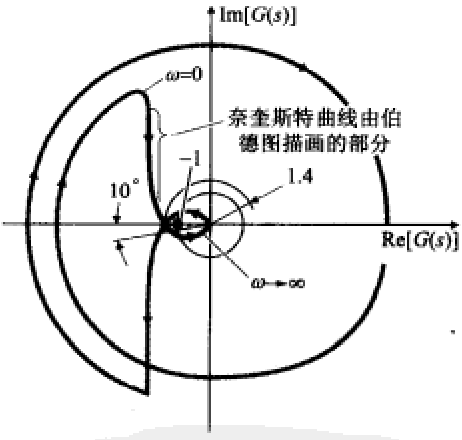


图 6-40 加大增益会从不稳定变为稳定的系统

例 6.12 具有多个穿越频率系统的奈奎斯特曲线

画下面系统的奈奎斯特曲线

$$G(s)=\frac{85(s+1)(s^2+2s+43.25)}{s^2(s^2+2s+82)(s^2+2s+101)}=\frac{85(s+1)(s+1\pm 6.5j)}{s^2(s+1\pm 9j)(s+1\pm 10j)}$$

并计算它的稳定裕度。

解：该系统的奈奎斯特曲线如图 6-41 所示，可以看出系统有三个穿越频率($\omega=0.7$ rad/s，8.5 rad/s 和 9.8 rad/s)，分别对应的相位裕度是 37°、80°和 40°。但是，系统稳定的关键指标是奈奎斯特曲线穿过实轴时与点 −1 的距离有多近。在这个例子中，只有 GM 表明了系统具有很少的一点稳定裕度。系统的伯德图(图 6-42)同样显示，幅值曲线在 0.7 rad/s，8.5 rad/s，9.8 rad/s穿过幅值=1。从伯德图中可读得，在频率 $\omega=10.4$ rad/s 处对应的 GM 值为 12.6 rad/s，与从奈奎斯特曲线上读到的 GM 值相一致。在这个例子中，GM 是没有歧义的且最有用的稳定性指标。

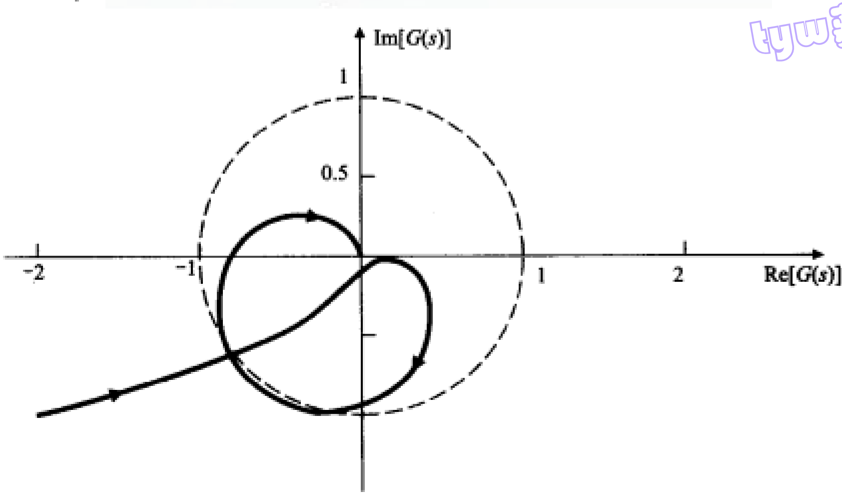


图 6-41 例 6.12 中复杂系统的奈奎斯特曲线图

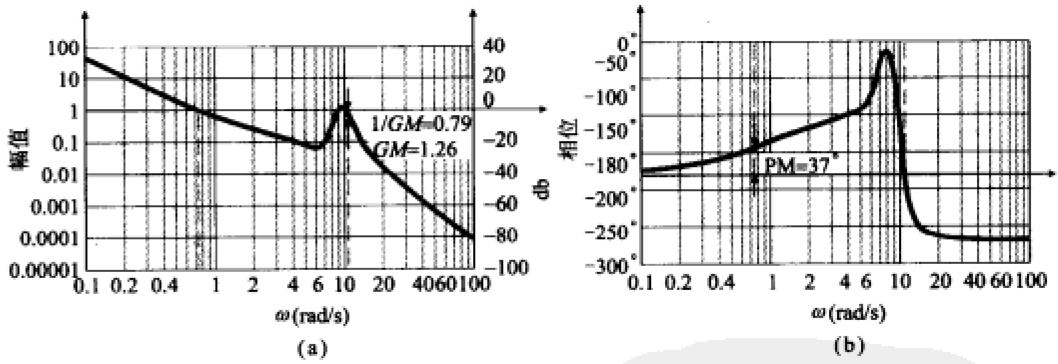


图 6-42 例 6.12 中系统的伯德图

总的来说，许多系统的性质大概像例 6.9 所示的，对它们来说，GM 和 PM 的定义是合适的，也是有用的。但也经常遇到一些复杂的系统在多个频率点上的幅值为 1，或是一些不稳定的大开环系统。此时，图 6-33 所定义的稳定性判据就是模棱两可的或是不正确的；因此，我们需要验证 GM 和 PM 之前的定义，和/或回到奈奎斯特稳定性判据来判断系统的稳定性。

6.5 伯德增益—相位关系

伯德的一个重要贡献就是下面的定理：

对于任意稳定的最小相位系统（就是没有零点和极点在右半平面），$G(j\omega)$ 的相位和 $G(j\omega)$ 的幅值之间的对应关系是唯一的。

在 log-log 标度的坐标图中，随着 ω 的变化，$|G(j\omega)|$ 的斜率在频率的大约 10 倍频

程内都保持一个常数值，那么它们的关系比较简单，可由下式给出：

$$\angle G(j\omega) \cong n \times 90^\circ \tag{6-33}$$

其中，n 是 $|G(j\omega)|$ 曲线的斜率，表示每 10 倍频程内幅值变化了多少个十倍量。举个例子，单独考虑图 6-43 的幅值曲线，我们看到式(6-33)对两个频率 $\omega_1=0.1$（这里 $n=-2$）和 $\omega_2=10$（这里 $n=-1$）都成立，它们刚好离斜率转折点一个 10 倍频程，产生近似的相位值为 -180° 和 -90°。在图中，真实的相位曲线验证了这种近似是相当好的，但也表明这种近似在接近斜率转折点的地方会变差。

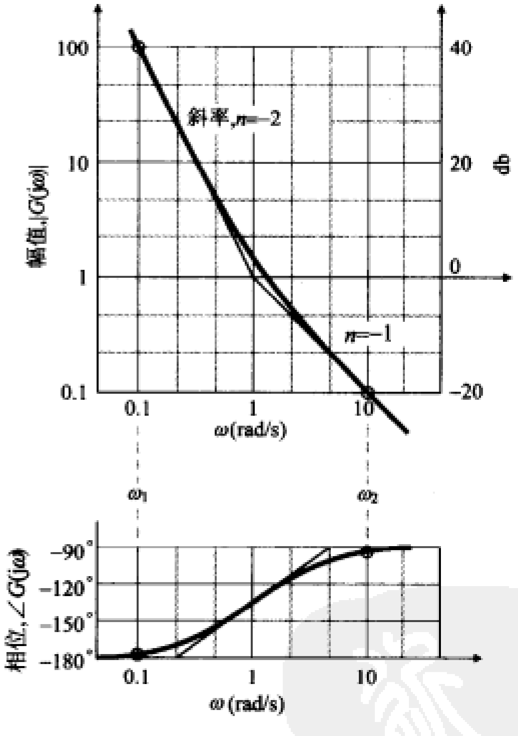


图 6-43　近似的增益—相位关系示意图

伯德增益—相位定理的准确叙述如下：

$$\angle G(j\omega_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{dM}{du}\right)W(u)du \text{（单位是弧度）} \tag{6-34}$$

其中，

M=幅值对数= $\ln|G(j\omega)|$；

u=归一化频率= $\ln(\omega/\omega_0)$；

$dM/du \cong$ 斜率 n，如式(6-33)所定义；

$W(u)$ =加权函数= $\ln(\coth|u|/2)$。

图 6-44 是加权函数 $W(u)$ 的曲线图，它表明了相位在 ω_0 处与斜率非常相关；当然，在附近的频率也相关，但是相关程度小一些。图像也表明，加权函数可以用中心在 ω_0 的脉冲函数来近似，我们把加权函数近似成

$$W(u) \cong \frac{\pi^2}{2}\delta(u)$$

通过脉冲函数的"筛选"性质(还有把弧度转换为度数),这个公式能精确地近似式(6-33)。

在实际中,人们从来不用式(6-34),而用式(6-33)根据单独的 $|G(j\omega)|$ 来推断其稳定性。当 $|KG(j\omega)|=1$ 时,

若 $n=-1$,则 $\angle G(j\omega) \cong -90°$;

若 $n=-2$,则 $\angle G(j\omega) \cong -180°$。

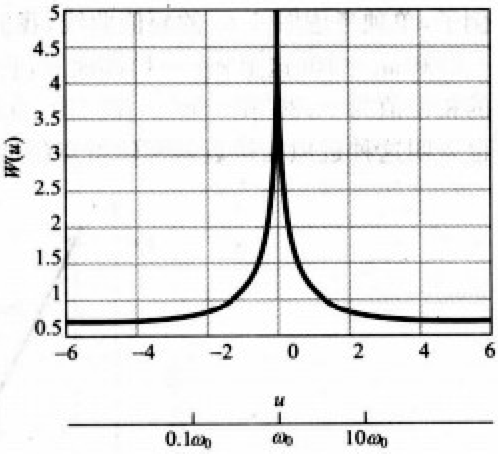


图　6-44

对于系统的稳定性,我们希望 $\angle G(j\omega) > -180°$,从而 PM > 0。因此,我们调整 $|KG(j\omega)|$ 曲线使它在穿越频率 ω_c(就是,在这里 $|KG(j\omega)|=1$)处的斜率为−1。如果在穿越频率点的一个10倍频程内,斜率都保持为−1,那么 PM ≅ 90°;但是,为保证存在合适的PM,通常必须要求以穿越频率为中心,斜率在一个10倍频程内保持为−1(−20db/10倍频程)。因此,可以得出下面的一个非常简单的设计准则:

调整幅值曲线 $|KG(j\omega)|$,使它在 ω_c 的一个10倍频程内以斜率−1穿过幅值1。

一般地,这条准则能够提供满意的相位裕度PM,因而也提供了足够的系统阻尼。为得到期望的响应速度,我们调整系统增益使得穿越频率产生期望的带宽或响应速度,如式(3-49)所计算的。回忆一下,固有频率 ω_n、带宽和穿越频率都是近似相等的,我们会在6.6节做进一步的讨论。

例6.13　运用简单的设计准则设计航天器姿态控制系统

对图6-45所定义的航天器姿态控制问题,找出 $KD(s)$ 的合适表达式,使得系统具有良好的阻尼和大约0.2 rad/s的带宽。

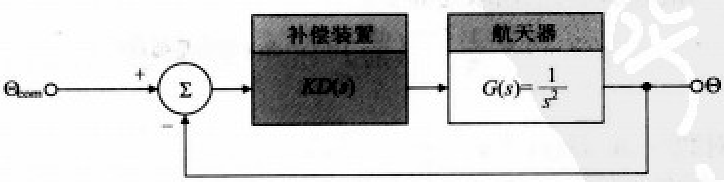


图6-45　航天器的姿态控制系统

解:很明显,(图6-46)航天器频率响应的幅值曲线需要重新调整,因为它的整个曲线的斜率都是−2(或−40db/10倍频程)。能完成这项工作的最简单的补偿装置是采用比例和微分环节(PD补偿器),它们的关系式是

$$KD(s) = K(T_D s + 1) \tag{6-35}$$

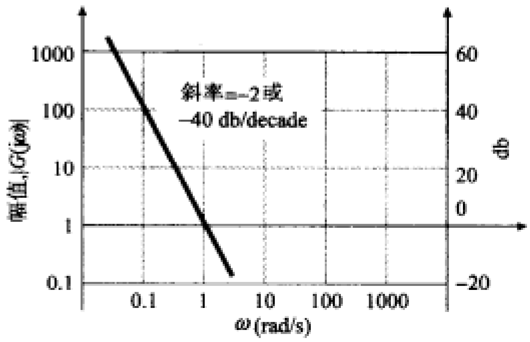


图 6-46 航天器频率响应的幅值曲线

我们的任务就是调整增益 K 来产生期望的带宽，调整转折频率 $\omega_1=1/T_D$，使幅值曲线在穿越频率处的斜率为 -1。现在的设计过程就变得简单了：选取一个 K 值，使穿越频率为 0.2 rad/s，然后选择一个 ω_1 值，它大概是穿越频率的 1/4 倍，这样在穿越频率附近斜率保持为 -1。图 6-47 显示了我们求得最终的补偿环节的步骤：

步骤 1 画 $|G(j\omega)|$ 的幅值曲线。

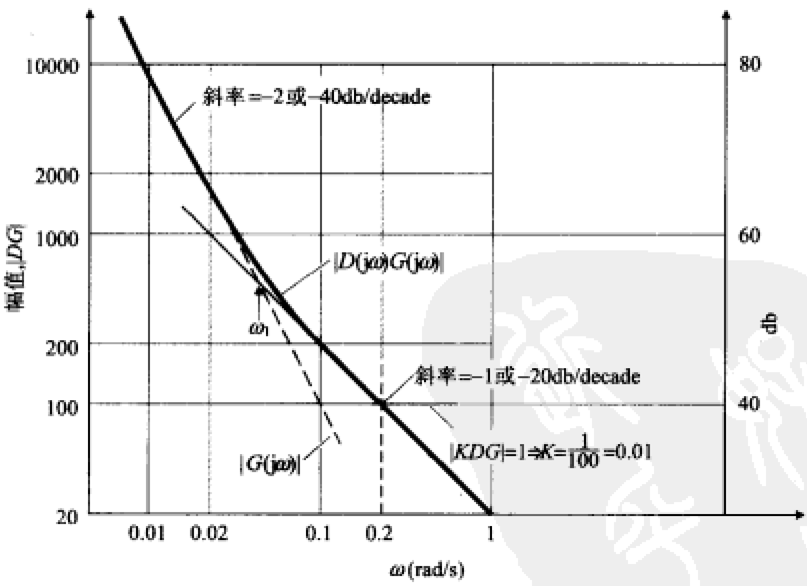


图 6-47 补偿后的开环传递函数

步骤 2 修正图像以包括 $|D(j\omega)|$，令 $\omega_1=0.05$ rad/s（$T_D=20$），使得在 $\omega=0.2$ rad/s 处斜率 $\cong -1$。

步骤 3 当 $|DG|$ 穿过频率 $\omega=0.2$ rad/s，即在期望的幅值 1 穿越处，令 $|DG|=100$。

步骤 4 为得到期望得的穿越频率为 $\omega=0.2$ rad/s，计算

$$K=\frac{1}{[\,|DG|\,]_{\omega=0.2}}=\frac{1}{100}=0.01$$

因此，$KD(s)=0.01(20s+1)$

我们满足了各项性能要求，因此设计完成。

如果绘制了 KDG 的相位曲线，我们会发现相位裕度 PM＝75°，这对满足期望的性能指标已相当足够了。闭环频率响应的幅值曲线（图 6-48）表明，在这个例子里，穿越频率和带宽确实几乎相等。闭环系统的阶跃响应已经在图 6-49 显示出来，它的超调量只有 14%，表明了有足够的系统阻尼。

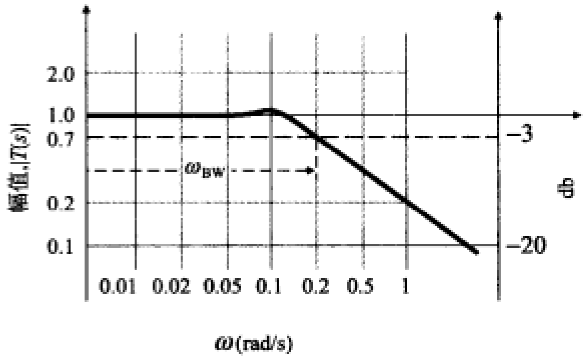


图 6-48 闭环频率响应

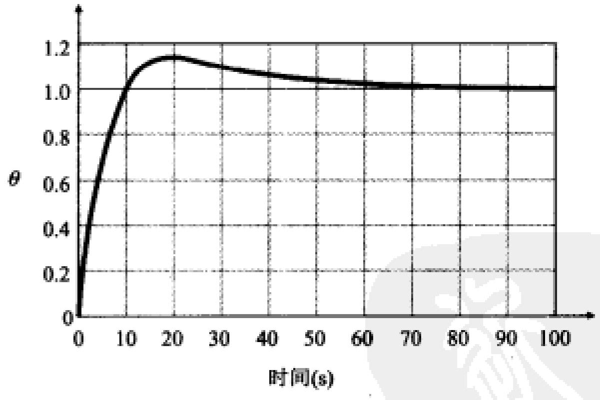


图 6-49 PD 补偿环节的阶跃响应

6.6 闭环频率响应

闭环带宽的定义已经在 6.1 节和图 6-5 中给出。图 6-3 表明，对于二阶系统，带宽总是在 2 倍的固有频率的范围内。在例 6.13 中，我们设计补偿环节使得穿越频率在期望的带宽上，然后通过计算验证带宽等于穿越频率。通常，穿越频率和带宽并不如例 6.13 匹配得那么理想。借助必要的观测，可以在两者之间建立起更加准确的关系。考虑一个这样的系统，其 $|KG(j\omega)|$ 具有典型的性质：

若 $\omega \ll \omega_c$，则 $|KG(j\omega)| \gg 1$；

若 $\omega \gg \omega_c$，则 $|KG(j\omega)| \ll 1$。

其中，ω_c 为该系统的穿越频率。该系统的闭环频率响应的幅值近似地表示为

$$|\mathcal{T}(j\omega)| = \left|\frac{KG(j\omega)}{1+KG(j\omega)}\right| \cong \begin{cases} 1, \omega \ll \omega_c \\ |KG|, \quad \omega \gg \omega_c \end{cases} \tag{6-36}$$

在穿越点 $|KG(j\omega)| = 1$ 附近，$|\mathcal{T}(j\omega)|$ 与相位裕度 PM 有很大关系。PM=90°意味着 $\angle G(j\omega) = -90°$。因此，则有 $|\mathcal{T}(j\omega_c)| = 0.707$。另外，如果 PM=45°，则有 $|\mathcal{T}(j\omega_c)| = 1.31$。

根据式(6-36)的近似关系，绘制出 $|\mathcal{T}(j\omega)|$ 的曲线，如图 6-50 所示。由图可以看出，对于较小的 PM 值，闭环带宽一般会大于穿越频率 ω_c，但通常总小于 $2\omega_c$；因此，有

$$\omega_c \leqslant \omega_{BW} \leqslant 2\omega_c$$

另一个与闭环频率响应有关的性能指标是谐振峰值 M_r，具体定义见图 6-5。由图 6-3 和图 6-37 可以看出，对于线性系统而言，M_r 通常与系统的阻尼系数有关。在实际中，M_r 是很少用到的；大部分设计人员选择相位裕度 PM 来评价系统的阻尼，因为系统的非线性或时延对系统相位特性的影响，要比对幅值特性的影响更严重。

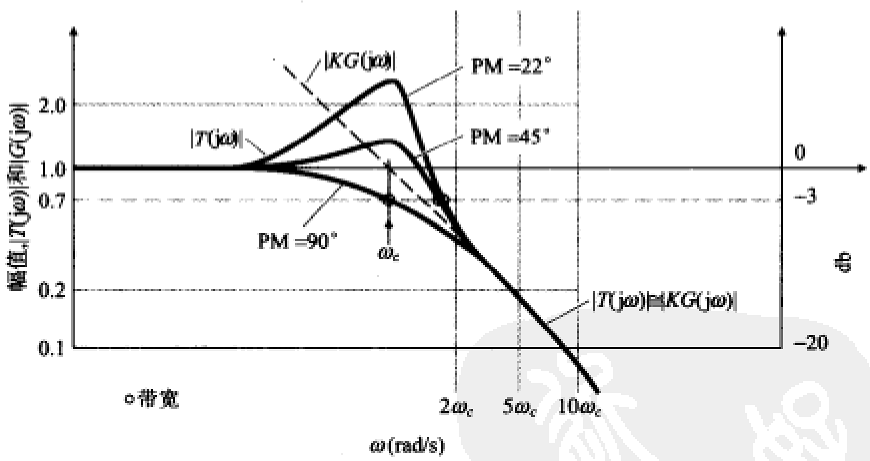


图 6-50 参数为 PM 的闭环带宽

6.7 补偿环节

就像在第 4 章和第 5 章所讨论过的，当仅有的比例反馈控制无法得到满意的系统性能时，需要在反馈控制系统中加入动态元件(补偿环节)，以提高系统的的稳定性和误差特性。

4.3 节曾讨论了三种基本的反馈类型：比例反馈、微分反馈和积分反馈。同时，5.5 节还讨论了三种动态补偿环节：超前补偿，其控制规律类似于比例微分(PD)控制；滞后补偿，其控制规律类似于比例积分(PI)控制；还有一种是超前滞后补偿，多用于处理存在谐振特性的系统。在这一节，我们会根据频率响应特性，讨论这些和另外一些补偿

环节的特点。在多数情况下，由微处理器来实现补偿环节。这时就需要把连续的补偿环节 $D(s)$ 转换成计算机可处理的形式，这个问题已在 4.4.1 节简略地讨论过，在本节我们还会进一步讨论，并将在第 8 章有更加详细的讨论。

到目前为止，频率响应稳定分析所考虑的闭环系统的特征方程，是指 $1+KG(s)=0$ 的情况。在引入了补偿环节后，闭环特征方程变为 $1+KD(s)G(s)=0$，并且本章之前关于 $KG(s)$ 的频率响应的讨论，都可直接应用于 $KD(s)G(s)$。通常，我们把变量 $L(s)$ 称为“回路增益”，或系统的开环传递函数，并记为 $L(s)=KD(s)G(s)$。

6.7.1 PD 补偿

在学习补偿设计开始，让我们来看看 PD 控制的频率响应特性。PD 补偿器的传递函数由下式给出：

$$D(s)=(T_D s+1) \tag{6-37}$$

从图 5-22 可以看出，PD 补偿对二阶系统的根轨迹具有稳定作用。式(6-37)的频率响应特征，如图 6-51 所示。因为可以增加系统的相位，同时在转折频率点 $1/T_D$ 的右侧有 +1 的斜率，所以 PD 补偿对于改善系统稳定性，效果是明显的。只要使 $1/T_D$ 位于穿越频率附近，也就是，处于满足 $|KD(s)G(s)|=1$ 的频率附近，就可以明显地增加系统的相位裕度。

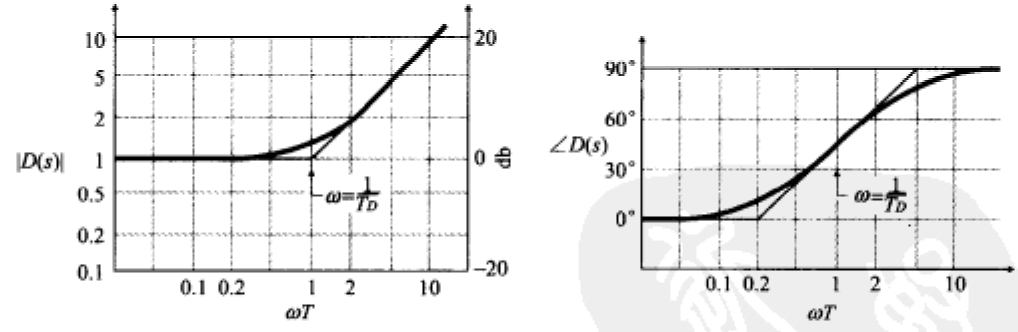


图 6-51 PD 控制的频率响应

注意，随着频率的增大，该补偿环节的幅值也在增大。这种特征并不是我们期望的，因为它会对在真实系统存在的高频噪声起到放大作用。同时，这样的控制规律不可能用真实的连续系统实现。这也正是采用纯微分补偿所面临的困扰，这在 5.5 节有过讨论。

6.7.2 超前补偿

为了减小 PD 补偿的高频放大效应，我们在分母中增加一个一阶极点，使之远大于 PD 补偿器的转折频率，这样仍然会有相位增加(超前)发生，但高频放大效应却得到了抑制。这就是超前补偿，其传递函数是

$$D(s)=\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1},\alpha<1 \tag{6-38}$$

其中，$1/\alpha$ 是极点/零点转折频率的比值。图 6-52 是超前补偿的频率响应。注意，超前补偿仍可提供超前的相位，但在高频段，放大作用比原来要小得多。通常，无论何时系统的阻尼需要多大的改善，超前补偿都是常用的补偿形式。

式(6-38)的超前补偿提供的相位由下式给出：

$$\phi=\tan^{-1}(T\omega)-\tan^{-1}(\alpha T\omega)$$

它表明(参看题 6-43)，其最大相位的频率是：

$$\omega_{max}=\frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \tag{6-39}$$

最大相位——就是图 6-52 的 $\angle D(s)$ 曲线的峰值——有下面的关系：

$$\sin\phi_{max}=\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tag{6-40}$$

或

$$\alpha=\frac{1-\sin\phi_{max}}{1+\sin\phi_{max}}$$

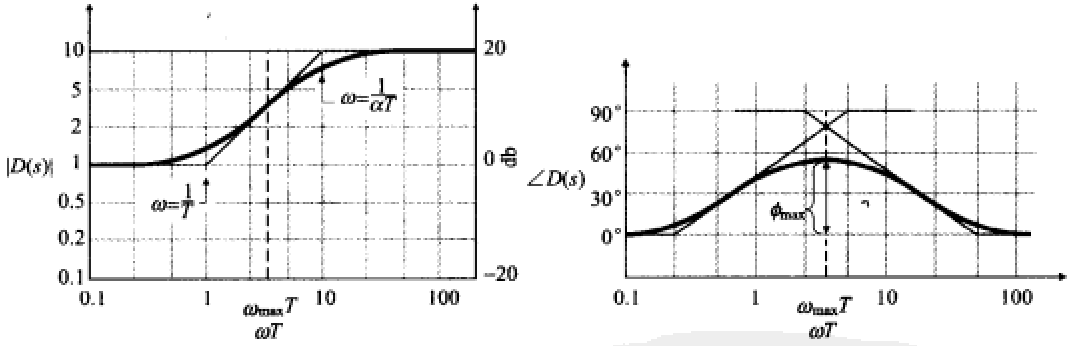


图 6-52 $1/\alpha=10$ 时超前补偿的频率响应

也可以这样观察：在对数刻度坐标上，最大相位 ω_{max} 恰好发生在两个转折频率的几何中心(有时成为拐点频率)上，如图 6-52 所示，它满足如下关系

$$\log\omega_{max}=\log\frac{1/\sqrt{T}}{\sqrt{\alpha T}}=\log\frac{1}{\sqrt{T}}+\log\frac{1}{\sqrt{\alpha T}}=\frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{1}{T}\right)+\log\left(\frac{1}{\alpha T}\right)\right] \tag{6-41}$$

此外，也可以把这些结果写成零极点形式。以根轨迹分析的形式重写 $D(s)$，我们得到

$$D(s)=\frac{s+z}{s+p} \tag{6-42}$$

在章后习题 6-43 中将会看到

$$\omega_{max}=\sqrt{|z||p|} \tag{6-43}$$

$$\log\omega_{max}=\frac{1}{2}(\log|z|+\log|p|) \tag{6-44}$$

如果我们在式(6-39)和式(6-41)中令 $z=-1/T$ 和 $p=-1/\alpha T$ 那么所得的结果就会与之前的结果一致。

举个例子，某超前补偿有一个零点为 $s=-2(T=0.5)$ 和一个极点为 $s=-10(\alpha T$

=0.1)(因此 $\alpha=1/5$)，在下面的频率处产生最大的超前相位

$$\omega_{max}=\sqrt{2\cdot 10}=4.47\ \mathrm{rad/s}.$$

在中点的相位超前大小只决定于式(6-40)的 α，它们的关系如图 6-53 所示。对于 $\alpha=1/5$，从图 6-53 得到 $\phi_{max}=40°$。注意，我们能通过增加超前比率(lead ratio)$1/\alpha$ 的值，把相位超前提高到接近 90°；但是，从图 6-52 看出，增大 $1/\alpha$ 的值也会在高频段产生较大的放大作用。因此，我们的任务是选择一个合适的 $1/\alpha$ 值，使得在理想的相位裕度和理想的高频噪声灵敏性之间有一个良好的折中。通常情况下，选择的办法是超前补偿要提供最大 60°的相位。如果需要更大的相位超前，那么可以采用双重超前补偿，即

$$D(s)=\left(\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}\right)^2$$

即使系统的噪声干扰可以忽略，并且式(6-37)所描述的纯微分补偿也可以接受，当采用连续控制时，还是倾向于利用式(6-38)而不是式(6-37)所描述的补偿形式，因为无法实现纯微分器。任何实际的系统，无论是机械的还是电气的，都不可能在无穷大的频率处有无穷大的增益，所以能提供微分作用(或相位超前)的频率范围是相当有限的。对采用数字形式实现的补偿设计，也会有同样的问题。这里，有限的采样频率限制了高频放大作用，因此也需在 PD 补偿环节的传递函数中增加极点。

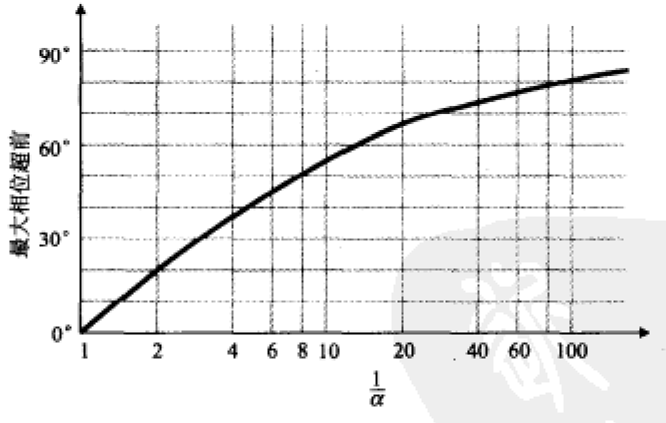


图 6-53　超前补偿的最大相位增长曲线

例 6.14　DC 电动机的超前补偿

作为超前补偿设计的例子，我们重新考虑 5.5.1 节所提及的直流电动机的补偿设计问题。系统的传递函数是

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

它同时也代表了卫星追踪天线的模型(参看图 3-52)。这一次我们想达到的目标是：系统对单位斜坡输入的稳态误差小于 0.1，并且超调量 $M_p<25\%$。

(a) 确定超前补偿环节，使它满足各项性能指标。

(b) 当 $T_s=0.05$ s 时，确定超前补偿环节的数字控制形式。

(c) 比较两种实现形式对阶跃和斜坡输入的响应。

解：

(a) 系统的稳态误差由下式给出

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\left[\frac{1}{1+KD(s)G(s)}\right]R(s) \tag{6-45}$$

其中，对于单位斜坡 $R(s)=1/s^2$，所以式(6-45)可简化为

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\left\{\frac{1}{s+KD(s)[1/(s+1)]}\right\}=\frac{1}{KD(0)}$$

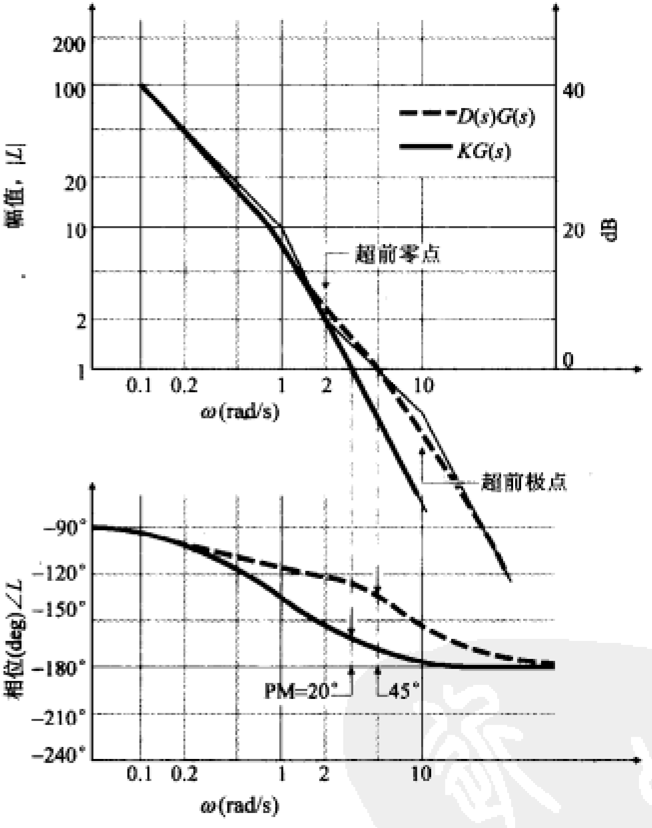


图 6-54 超前补偿设计的频率响应

因此，为满足稳态误差精度的要求，补偿环节的稳态增益 $KD(0)$ 不能小于 10($K_v\geqslant 10$)，所以我们取 $K=10$。把超调量要求与相位裕度联系起来，从图 6-37 看出，系统应有相位裕度 PM>45°。从图 6-54 看出，在没有超前补偿的情况下，系统的相位裕度只有 PM=20°。如果能够不影响幅值的话，那么我们只需简单地在 $KG(s)$ 的穿越频率 $\omega=3$ rad/s 处加上 25°相位。但是，保持低频增益不变，增加一个补偿零点会增大穿越频率；因此我们需要超前补偿环节提供大于 25°的相位。为留有余量，超前补偿器取最大超前相位 40°。图 6-53表明，当 $1/\alpha=5$ 时，就能达到期望的目标。如果补偿器的最大相位发生在穿越频率处，那么我们就能从补偿环节上得到最大的效益。经过试验，将补偿环节的零点设置在 $\omega=2$ rad/s 和其极点设置在 $\omega=10$ rad/s 处，系统会在穿越频率处得到最大的相位超前。因此，补偿环节的表达式是

$$KD(s)=10\,\frac{s/2+1}{s/10+1}$$

图 6-54 是 $L(s)=KD(s)G(s)$ 的频率响应特性曲线，可以看到，现在系统有 45°的相位裕度，已经满足了期望的设计目标。

在图 5-23 中，曾绘制了该系统设计的根轨迹，为便于观察，现在将其重画在图 6-55 中，图中标出了 $K=10$ 时的对应根的位置。绘制根轨迹并非本例的要求，在此只是想同第 5 章基于根轨迹的设计法作个比较。

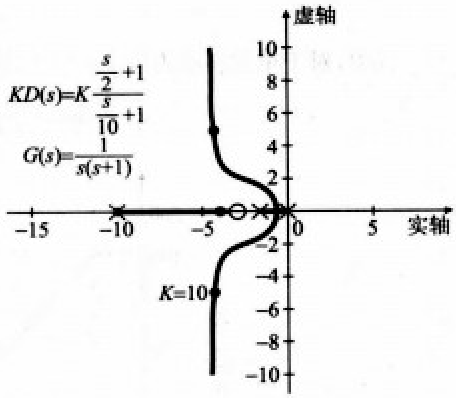


图 6-55　超前补偿设计的根轨迹

(b) 运用式(4-93)的梯形规则来求 $D(s)$ 的离散形式，那就是

$$D_d(z)=\frac{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}/2+1}{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}/10+1} \tag{6-46}$$

取 $T_s=0.05\text{s}$，上式可简化为

$$D_d(z)=\frac{4.2z-3.8}{z-0.6} \tag{6-47}$$

用以下 MATLAB 语句可得到相同的结果：

```
sysD = tf([0.5  1],[0.1  1]);
sysDd = c2d(sysD, 0.05, 'tustin').
```

因为

$$\frac{U(z)}{E(z)}=KD_d(z) \tag{6-48}$$

所以得到的离散控制方程是：

$$u(k+1)=0.6u(k)+10(4.2e(k+1)-3.8e(k)) \tag{6-49}$$

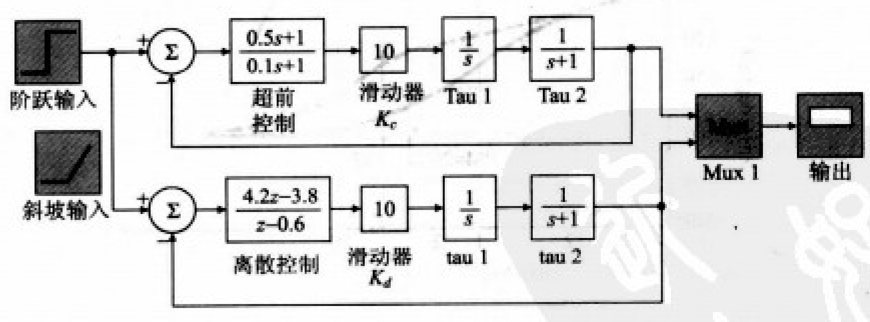


图 6-56　超前补偿的瞬态响应的框图

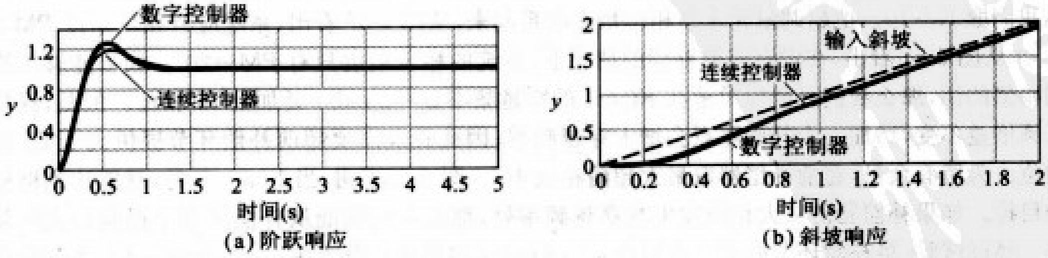


图 6-57　超前补偿设计

(c) DC 电动机采用连续控制器和离散控制器的 Simulink 框图如图 6-56 所示。两种控制器

的阶跃响应曲线绘制在图 6-57a 中，可以看出，二者的曲线相当接近；只是相比连续控制器，离散控制器的超调量略大一些，这是符合常理的。二者的超调量都小于 25%，因而满足系统的性能要求。两种控制器的斜坡输入对应的响应曲线绘制在图 6-57b 中，可以看到，两条曲线几乎完全重合，而且都满足稳态误差小于 0.1 的性能指标。

例 6.14 的设计步骤可概括如下：

(1) 确定低频增益，使得稳态误差满足性能要求。

(2) 选择超前比值 $1/\alpha$ 和零点($1/T$)值的组合，使得在穿越点有满意的相位裕度。

(3) 将极点配置在($1/\alpha T$)。

该设计步骤可以应用到许多场合；但是，要记住，为适应独特的性能要求就要有独特的设计，因此具体的设计步骤也是不同的。

例 6.14 有两项性能指标：超调峰值和稳态误差。我们把超调指标转换成相位裕度 PM，而稳态误差则直接地运用。本例子并没有给出关于响应速度类型的性能指标，但是它对设计的要求和稳态误差对设计的要求是一致的。系统的响应速度或带宽与穿越频率直接相关，这在 6.6 节已经指出。从图 6-54 可知，穿越频率是大约5 rad/s。为了增大穿越频率，我们可以通过加大增益 K 的值和提高超前补偿环节极点和零点的频率，以保持在穿越频率处的斜率为－1。提高系统增益，也会使稳态误差减小到比指定的性能指标更好一些。在本例中，一直没有提及到增益裕度，是因为仅考虑相位裕度就已足够保证系统的稳定性。此外，在本例中增益裕度对该系统没有用处，因为相位曲线永远不会穿过 180°，并且幅值裕度 GM 总是无穷大。

在超前补偿设计中，有下面三个主要的设计参数需要选定：

(1) 穿越频率 ω_c，它直接决定带宽 ω_{BW}、上升时间 t_r 和调节时间 t_s；

(2) 相位裕度(PM)，它确定了阻尼系数 ζ 和超调 M_p；

(3) 低频增益，它决定了系统的稳态误差特性。

设计的问题就是，对给定的要求找出上述参数的最优值。本质上，超前补偿会增大 $\frac{\omega_c}{L(0)}\left(=\frac{\omega_c}{K_v}\right.$，针对 1 型系统$\left.\right)$的值。那就是说，如果低频增益保持不变，那么穿越频率会增大。或者说，如果保持穿越频率不变，那么低频增益会减小。有了这种认识后，设计人员就可以假定这三个参数的其中一个是确定的，然后反复调整另外两个参数直到满足性能指标的要求。一个方法是，首先设置低频增益，使之满足误差要求并保持不变，然后增加一个超前补偿器，使得在穿越频率处的相位裕度 PM 增大。另一种方法是，首先确定穿越频率，使之满足时间响应性能指标的要求，然后调整增益和超前补偿环节的参数，最终使其满足相位裕度 PM 的要求。以下将把这两个例子的设计过程作以归纳。它只适用于采用单一的超前补偿环节即可获得满意性能的系统设计。对于所有的设计过程，这都只是一个起点；设计人员一般会发现，必须反复进行几次设计才能最终满足所有的性能要求。

超前补偿设计步骤

(1) 确定开环增益 K，使其满足误差或带宽的要求。

(a) 要满足误差要求，令 K 满足误差常数（K_p、K_v 或 K_a），使得 e_{ss} 误差要求得到满足；

(b) 要满足带宽要求，取 K 值使得开环穿越频率小于要求闭环带宽的 1/2。

(2) 根据步骤 1 得到的 K，计算未加补偿环节时系统的相位裕度(PM)。

(3) 考虑到额外的裕度(大约 10°)，计算所需的相位超前 ϕ_{max}。

(4) 根据式(6-40)或图 6-53，确定 α 的值。

(5) 选取 ω_{max} 为穿越频率；于是超前补偿环节的零点在 $1/T=\omega_{max}\sqrt{\alpha}$，其极点在 $1/\alpha T=\omega_{max}\sqrt{\alpha}$。

(6) 画出带补偿的系统频率响应，检验相位裕度 PM 是否满足要求。

(7) 重复上面的设计过程。调整补偿参数(极点、零点和增益)，直到所有性能指标都得到满足。如果需要，再增加一个额外的超前补偿器(就是双重补偿)。

这些指导性的准则，未必适用于设计人员在实际中遇到的所有系统，它们只是最终成功地设计补偿环节的系统性的试探方法。

例 6.15 温度控制系统的超前补偿

一个三阶系统，其传递函数为

$$KG(s)=\frac{K}{(s/0.5+1)(s+1)(s/2+1)}$$

它代表了一个典型的温度控制系统。试设计一个超前补偿环节，使 $K_p=9$，相位裕度至少为 25°。

解：让我们按照下面的步骤来进行设计：

步骤 1 根据对给定的 K_p 的要求，我们计算 K：

$$K_p=\lim_{s\to 0}KG(s)=K=9$$

步骤 2 可以用下面的 MATLAB 语句绘制当 $K=9$ 时，未带补偿时系统的伯德图，如图 6-58 所示。

```
numG = 9;
den2 = conv([1 0.5],[1 1]);
denG = conv(den2,[1 2]);
sysG = tf(numG,denG);
[mag,phas,w] = bode(sysG);
```

很难直接从伯德图上精确地读出系统的相位裕度 PM 和穿越频率；因此可调用下面的 MATLAB 命令：

```
[GM,PM,Wcg,Wcp] = margin(mag,phas,w)
```

其中，PM 就是相位裕度，Wcp 是增益穿过幅值 1 时的频率。(GM 是开环增益裕度，Wcg 是相位穿过 180 时的频率。)对于这个例子，运行结果是：

```
GM =1.2500, PM = 7.1249, Wcg = 1.8708, Wcp = 1.6844,
```

也就是说，未带补偿的系统的 PM 是 7°，穿越频率是 1.7 rad/s。

步骤 3 考虑到留有 10°的额外余量，超前补偿器在穿越频率处需提供 25°+10°−7°=28°的最大超前相位。额外的裕度一般是需要的，因为相位超前会增大开环的穿越频率，在这个点上我们需要更多的相位。

步骤 4 从图 6-53 可知，取 $\alpha=1/3$，可以在零极点中间提供约 30°的相位增加值。

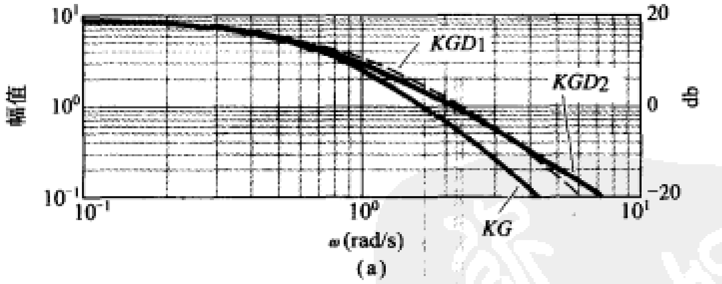
步骤 5 不妨先设置零点为 1 rad/s($T=1$)，极点为 3 rad/s($\alpha T=1/3$)，因此，确定了开环穿越频率的范围和零点与极点之间的 3 倍关系，就如 $\alpha=1/3$ 所表明的那样。超前补偿器的传递函数是

$$D_1(s)=\frac{s+1}{s/3+1}=\frac{1}{0.333}\left(\frac{s+1}{s+3}\right)$$

步骤 6 加上补偿环节 $D_1(s)$ 后系统的伯德图(在图 6-58 中中间的曲线)的相位裕度 PM 为 16°。我们并没有得到期望的 PM=30°，这是因为超前补偿环节的引入，把穿越频率从 1.7 rad/s 变为 2.3 rad/s，因此增大了从相位超前环节得到的必要相位增值。带 $D_1(s)$ 的系统的阶跃响应(图 6-59)振荡得很厉害，就像我们所预料的，这是因为过小的相位裕度(PM=16°)导致的。

步骤 7 我们重新设计，附加更多相位。为了不至于使穿越频率上升过大，还将零点稍微地向右移动。这里，选择 $\alpha=\frac{1}{10}$，零点为 $s=-1.5$，所以

$$D_2(s)=\frac{s/1.5+1}{s/15+1}=\frac{1}{0.1}\left(\frac{s+1.5}{s+15}\right)$$



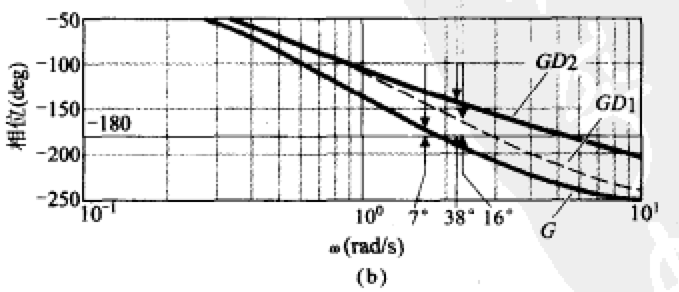


图 6-58 例 6.15 的超前补偿设计的伯德图

该补偿环节能提供的相位裕度 PM=38°，穿越频率降低到 2.2 rad/s。图 6-58(上面的曲线)给出了改进后的频率响应。图 6-59 表明，系统的振荡明显地变小了，你应该知道，这是因为 PM 提高了。

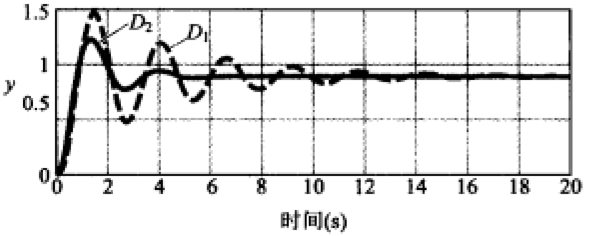


图 6-59 超前补偿设计的阶跃响应

例 6.16 1 型伺服系统的超前补偿设计

考虑下面的三阶系统

$$KG(s)=K\frac{10}{s(s/2.5+1)(s/6+1)}$$

该系统是直流电机的轴的位置传感器存在滞后的情况。设计超前补偿环节，使得 PM=45° 和 $K_v=10$。

解：同样，我们按之前的设计步骤进行：

步骤 1 根据给定的要求，如果 $K=1$，那么 $KG(s)$ 会使得 $K_v=10$。因此 $K=1$ 能满足对 K_v 的要求，补偿环节的低频增益为 1。

步骤 2 图 6-60 给出了系统的伯德图。未带补偿环节时，系统(下面的曲线)的相位裕度约为－4°，穿越频率为 $\omega_c\cong 4$ rad/s。

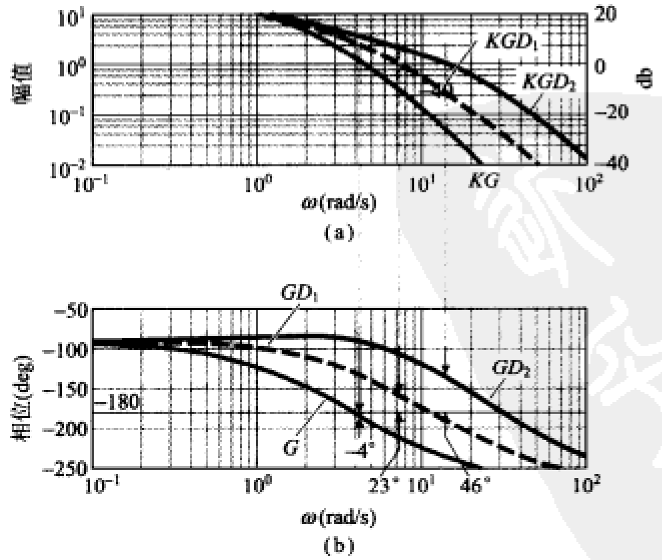


图 6-60 例 6.16 超前补偿设计的伯德图

步骤 3 允许 5° 的额外相位裕度，我们需要超前补偿器能提供的相位裕度 PM=45°+5°−(−4°)=54°。

步骤 4 从图 6-53 可知，要满足最大超前相位为 54°，α 应取为 0.1。

步骤 5　新的增益穿越频率会比开环值 $\omega_c=4$ rad/s 要高，所以我们选择超前补偿的极点和零点分别为 20 rad/s 和 2 rad/s。于是，候选的补偿器为

$$D(s)=\frac{s/2+1}{s/20+1}=\frac{1}{0.1}\frac{s+2}{s+20}$$

步骤 6　带补偿环节后，系统（如图 6-60 所示，中间的曲线）的伯德图表明，系统的相位裕度为 PM=23°。进一步的反复试验表明，单个超前补偿器无法满足这项性能要求，因为高频段的斜率为 −3。

步骤 7　在这个系统中我们需要一个双重超前补偿器。我们改用下面的补偿器

$$D_2(s)=\frac{1}{(0.1)^2}\frac{(s+2)(s+4)}{(s+20)(s+40)}=\frac{(s/2+1)(s/4+1)}{(s/20+1)(s/40+1)}$$

经过计算，最终得到的相位裕度 PM=46°。图 6-60 中上面的曲线是本例的伯德图。

例 6.15 和例 6.16 都是三阶的。例 6.16 很难设计补偿，因为要满足误差要求 K_v，穿越频率 ω_c 必须足够大，单一的超前补偿环节无法提供足够的相位补偿，也就无法得到满意的相位裕度 PM。

6.7.3　PI 补偿

对于许多设计问题，保持低的带宽和减小稳态误差是很重要的。为达到这个目标，比例−积分(PI)或滞后补偿器就显得很有用。在式(4-74)中令 $K_D=0$，即可得到 PI 控制的传递函数为

$$D(s)=\frac{K}{s}\left(s+\frac{1}{T_I}\right) \tag{6-50}$$

图 6-61 描绘了它的频率响应特性。这种补偿器的优点在于：它是在零频率处，具有无限大的增益，这对减小系统的稳态误差是非常有益的。但是其代价是，在小于转折频率 $\omega=1/T_I$ 的频段处，存在明显的相位减小。因此，$1/T_I$ 通常配置在远小于穿越频率的地方，这样系统的相位裕度就不会受到太大的影响。

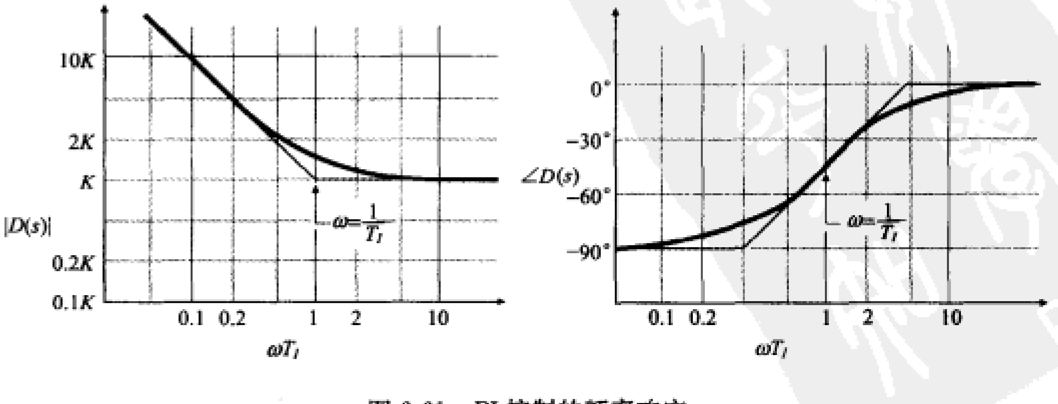


图 6-61　PI 控制的频率响应

6.7.4　滞后补偿

就像我们在5.5节所讨论的，**滞后补偿（lag compensation）**与PI控制很近似。它的传递函数在根轨迹设计时曾由式(5-91)给出，但是把单独的滞后补偿的传递函数写成伯德形式更为方便些：

$$D(s)=\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1},\ \alpha>1 \tag{6-51}$$

其中，α是零点和极点的转折频率的比值。除了滞后补偿外，完整的控制器还包括总增益K，可能还有其他的动态元件。虽然式(6-51)看上去同式(6-38)的超前补偿环节很相似，但事实上因$\alpha>1$，这样，极点的转折频率比零点的低。这个关系式表明，在低频段幅值增大，而相位减小，如图6-62所示；同时还表明，这种补偿具有积分控制的基本特征——在低频处，增益变大。滞后补偿设计的主典型目标是，在低频范围内提供额外的增益，和保持系统有足够的相位裕度(PM)。当然，相位滞后是不希望看到的，因此在选取参数时，应使零极点的转折频率尽量小于未加滞后补偿前系统的穿越频率，从而使相位滞后对相位裕度的影响降到最小。因此，滞后补偿的作用在于提高了系统的开环DC增益，从而在不需要明显改变系统原有的瞬态响应特性的情况下，就能改善系统的稳态响应特性。如果极点和零点相对靠近，而且在原点附近（就是T的值比较大），那么可以通过增大α的取值来增大低频增益(K_p，K_v或K_a)，而不必改变闭环极点的分布，从而在保证系统原有瞬态响应特性的同时，改善系统的稳态性能。

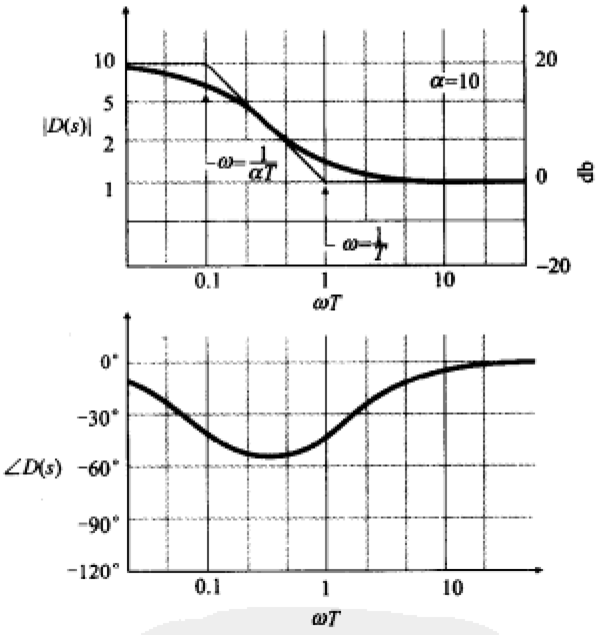


图6-62　$\alpha=10$时滞后补偿的频率响应

现在，我们来归纳出滞后补偿的设计步骤：

(1) 确定开环增益K，使得系统在不带补偿环节时也能满足相位裕度的要求。

(2) 根据(1)绘制出未带补偿环节的系统伯德图，找出穿越频率，并计算低频增益。

(3) 确定α的取值，以满足低频增益误差的要求。

(4) 选择拐点频率$\omega=1/T$（滞后补偿器的零点）为穿越频率的1/8～1/10。

(5) 另一个拐点频率（滞后补偿器的极点）为$\omega=1/\alpha T$。

(6)重复上述的设计过程。调整补偿器的参数（极点、零点、增益）以满足所有的性能要求。

例 6.17 温度控制系统的滞后补偿设计

我们再次考虑例 6.15 中的三阶系统

$$KG(s)=\frac{K}{\left(\frac{1}{0.5}s+1\right)(s+1)\left(\frac{1}{2}s+1\right)}$$

设计滞后补偿器，使得相位裕度至少为 40°和 $K_p=9$。

解：我们按之前列举的步骤进行设计：

步骤 1 图 6-58 是 $K=9$ 时的 $KG(s)$ 系统伯德图，可以看出，如果调整穿越频率 $\omega_c \leqslant$ 1 rad/s，那么就可以达到 PM>40°的目标。如果 $K=3$，这种情况就可能发生。所以，取 $K=3$，就可以满足相位裕度 PM 的性能要求。

步骤 2 图 6-63 是 $K=3$ 时 $KG(s)$ 的伯德图，可以看到，PM≈50°，现在的低频增益为 3。用 MATLAB 的 margin 语句，计算出的准确结果是 PM=53°。

步骤 3 低频增益需要放大 3 倍，这意味滞后补偿环节的 $\alpha=3$。

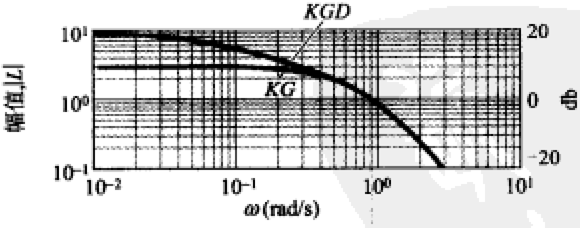
步骤 4 选择零点的拐点频率近似为期望的穿越频率的 1/5——就是 0.2 rad/s，所以 $1/T=0.2$，或 $T=5$。

步骤 5 我们得到另外的拐点频率的值：$\omega=1/\alpha T=1/15$ rad/s。因此，补偿器为

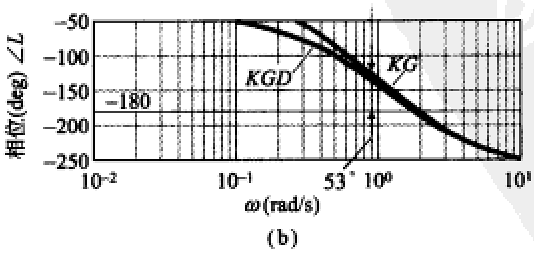
$$D(s)=3\,\frac{5s+1}{15s+1}$$

加入补偿后的频率响应，同样显示在图 6-63。低频增益为 $L(0)=KD(0)G(0)=3K=9$，因此有 $K_p=9$，PM 稍微降低到 44°，但仍可满足要求。图 6-64 显示了系统的阶跃响应，表明系统的阻尼是合理的，这也是我们期望看到的：PM=44°。

步骤 6 至此，我们已不需要重复试验了。



(a)



(b)

图 6-63 例 6.17 的滞后补偿设计的频率响应

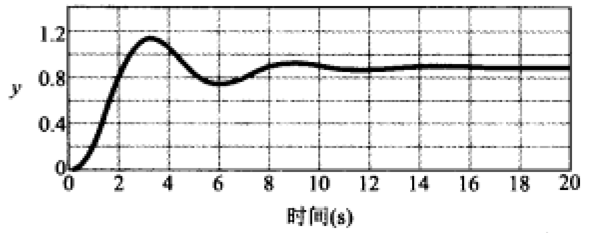


图 6-64　例 6.17 的滞后补偿设计的阶跃响应

注意，例 6.15 和例 6.17 都是针对相同的装置进行补偿设计的，都是具有相同的稳态误差要求。一个采用超前补偿，另一个采用滞后补偿。比较两种补偿后系统的穿越频率，可以得出这样的结果：用超前补偿设计后系统的带宽是用滞后补偿设计后系统带宽的 3 倍。

例 6.17 演示了一个有效的滞后补偿设计，提高低频增益以得到更好的误差特性。但是，本质上，滞后补偿减小了 $\frac{\omega_c}{L(0)}$（$=\frac{\omega_c}{K_v}$，针对 1 型系统）的值。这意味着，如果保持穿越频率不变，低频增益就会提高。同样地，如果保持低频增益不变，穿越频率就会减小。因此，滞后补偿可以被解释成：通过减小穿越频率，从而得到更理想的相位裕度。在这种情况下，需部分地修改设计过程。首先，求出满足误差要求的低频增益，然后配置滞后补偿的极点和零点，以使得到的穿越频率有足够的相位裕度 PM。下一个例子将采用这种方法。不管采用何种设计方法，设计的结果都应总是相同的。

例 6.18　DC 电动机的滞后补偿

重新设计例 6.14 的 DC 电动机控制，这一次采用滞后补偿设计。确定满足误差要求 $K_v=10$ 的低频增益；然后设计滞后补偿环节，使其满足 45°的 PM 要求。

解：系统的频率响应曲线如图 6-65 所示，其中增益是我们所希望的 $K=10$。未加补偿的系统的穿越频率大约是 3 rad/s，而 PM=20°。设计人员的任务是选择滞后补偿的转折频率，以使穿越频率降低和产生更好的 PM。为抑制补偿的相位滞后的影响，补偿环节的极点和零点必须比新的穿越频率低很多。图 6-65 显示了这样一种选择：滞后零点是 0.1 rad/s，滞后极点是 0.01 rad/s。这一次参数的选择，得到了 50°的相位裕度 PM，因此满足了系统的性能要求。这里，通过把穿越频率保持在 $G(s)$ 具有较好相位特性的区域，从而完成了系统稳定性目标。选择极点和零点位置 $1/T$ 的准则是，使它们足够小，以使得补偿的相位滞后对穿越频率的影响降低到最小程度。但是，通常极点和零点的配置并不比必需的低，因为由滞后环节带来的额外的系统根（与图 5-29b 相似的系统的根轨迹比较）与补偿环节的零点在相同的频率范围内，也对输出响应有相同的影响，尤其是对干扰输入的响应。

图 6-66 给出了系统对阶跃参考输入的响应。它表明系统对阶跃输入没有稳态误差，因为这是 1 型系统。但是，由滞后补偿引进的慢速特征根使响应需要 25 s 才能达到零稳态值。根据图 6-37 可知，相对于 PM=50°，本例的超调 M_p 略大一些；但是，系统的性能已足够了。

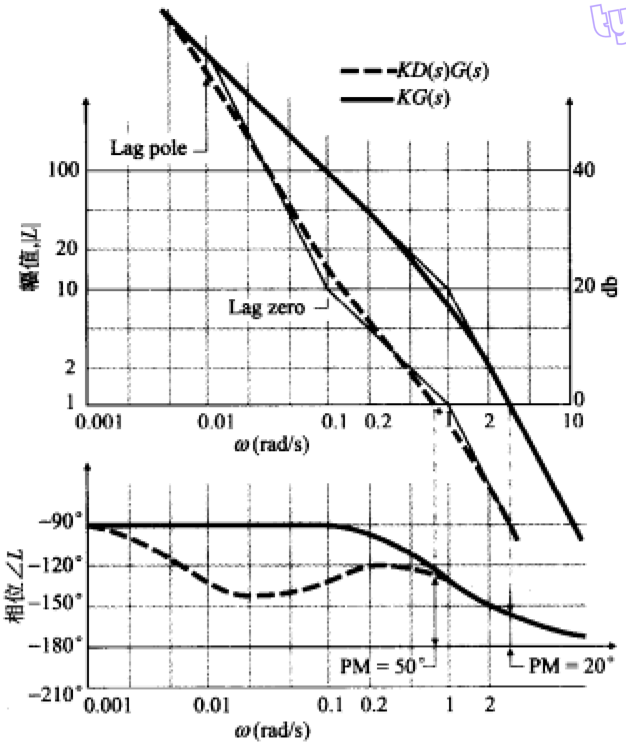


图 6-65 例 6.18 滞后补偿设计的频率响应

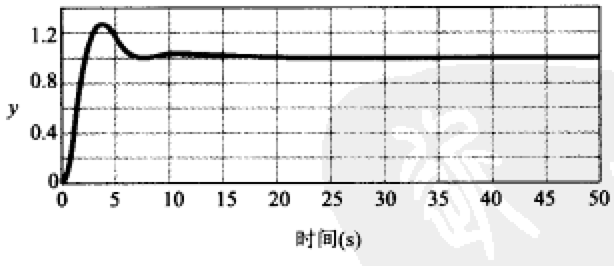


图 6-66 例 6.18 滞后补偿设计的阶跃响应

就像之前看到的相似情况，例 6.14 和例 6.18 分别对相同的系统采用完全不同的补偿形式，满足的是相同的性能指标。在第一个例子中，采用的是超前补偿，满足各项性能要求，穿越频率是 $\omega_c=5$ rad/s($\omega_{BW}\cong 6$ rad/s)。在第二个例子中，采用的是滞后补偿，满足同样的性能要求，得到的 $\omega_c\cong 0.8$ rad/s($\omega_{BW}\cong 1$ rad/s)。很明显，如果有上升时间或带宽的要求，它们就会影响到补偿环节的选择(超前或滞后)。同样，如果需要解决系统很慢达到稳态值的问题，我们建议采用超前补偿而不是滞后补偿。

在实际系统中，正如过程本身，动态元件通常表示执行器或传感器，所以一般不可能使穿越频率提高到比它们的响应频率还要高。虽然线性理论的分析表明，几乎所有的系统都可以加上补偿，但事实上，如果我们使元件工作在比它们的固有频率高很多

的频率上，系统就会进入饱和状态，这样，线性系统的假设就不再成立，那么线性设计也只是我们的空想。据此，我们看到，简单地增大系统的增益然后加上补偿器来取得足够的相位裕度 PM，这一做法有可能是不成功的。更可取的做法可能是，加入滞后网络来满足误差要求，这样闭环带宽就保持在一个合理的频率上。

6.7.5　PID 补偿

对于那些同时需要在 ω_c 处改善相位裕度和在低频改善增益的问题，有效的方法是同时采用微分控制和积分控制。通过合并式(6-37)和式(6-50)，我们得到了 PID 控制规律。它的传递函数是：

$$D(s)=\frac{K}{s}\left[(T_D s+1)\left(s+\frac{1}{T_I}\right)\right] \tag{6-52}$$

图 6-67 给出了它的频率响应特性。这种形式与式(4-75)略有不同；但是这种差异带来的影响却是无关紧要的。这种补偿形式，大概相当于在同一个设计中同时采用超前和滞后补偿器，所以经常被称为**超前—滞后补偿器(lead-lag compensator)**。因此，它能同时改善瞬态响应和稳态响应。

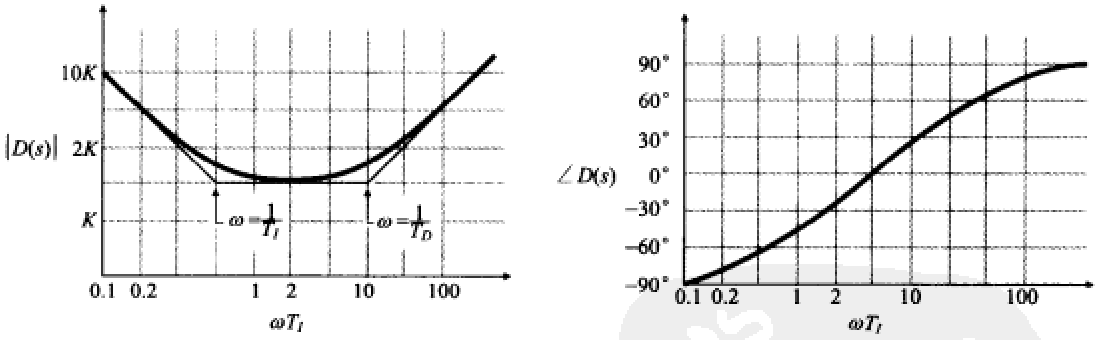


图 6-67　T_I / T_D =20 时 PID 补偿的频率响应

例 6.19　航天器姿态控制的 PID 补偿设计

一个简化的航天器姿态控制设计问题已在 6.5 节描述过；但是，这里我们有更真实的条件，包括传感器的滞后和一个干扰转矩。图 6-68 定义了这个系统。设计一个 PID 控制器，使对常量的干扰转矩的稳态误差为零，要求系统的相位裕度 65°。同时，在合理范围内带宽尽可能高。

解：首先，我们考虑系统的稳态误差。若要航天器达到一个稳定的终值，总输入转矩 T_d+T_c 必须为零。因此，如果 $T_d\neq 0$，那么 $T_c=-T_d$。若要此式成立，并且没有误差($e=0$)，$D(s)$ 必须包含一个积分项。因此补偿环节包含积分控制可以满足系统的稳态要求。这个也可以在数学上运用终值定理来验证(参看题 6-46)。

图 6-69 给出了航天器和传感器

$$G(s)=\frac{0.9}{s^2}\left(\frac{2}{s+2}\right) \tag{6-53}$$

的频率响应。可以看到，曲线斜率为 −2(就是 −40 db/10 倍频程)和 −3(−60db/10 倍频程)。

如果没有微分反馈，对于任何的 K 值，系统都是不稳定的。这可以明显地从伯德的增益－相位关系看出来，因为对于－2 的斜率，相位为－180°；对于－3 的斜率，相位为－270°，与之对应的相位裕度 PM 分别为 0°和 90°。因此，为使系统稳定，需要一个微分环节把幅值曲线在穿越频率处的斜率变为－1，因此微分控制是必需的。现在的任务，就是确定式(6-52)中的三个参数——K、T_D 和 T_I，以满足系统的各项性能要求。

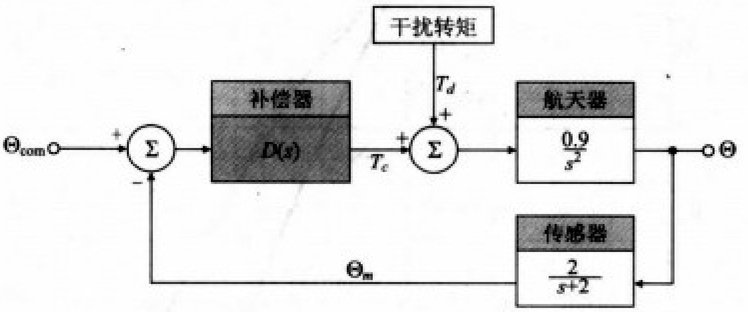


图 6-68　例 6.19 应用 PID 设计的航天器控制的框图

最简单的方法，就是从考虑相位裕度着手，在一个较高的频率点上，使系统的相位裕度为 PM＝65°。注意到，如果 T_I 比 T_D 大很多，T_I 的影响是次要的，因此，主要通过调节 T_D 就可以达到这个目标。当相位调好以后，我们也就确定了穿越频率；这样，我们可以很容易地确定增益 K。

根据图 6-67 中 PID 控制器的相位曲线，判定一下随着 T_D 取值的变化，带补偿的航天器系统 $D(s)G(s)$ 会有怎样的变化。如果 $1/T_D \geqslant 2$ rad/s，PID 控制所能提供的相位超前刚好跟传感器的相位滞后抵消，合成的相位永远不会超过－180°。如果 $1/T_D \leqslant 0.01$，那么合成的相位会在某些频率范围接近－90°，即使在更广的频率范围内，其相位也不会超过－115°；这就是说，系统能提供的相位裕度不会小于 65°。图 6-69 中的短划线显示了 $1/T_D=0.1$ 时的特性曲线，可以看出，要保证系统能提供相位裕度为 PM＝65°，$1/T_D$ 的取值不能大于 0.1。对于任意的 $1/T_D>0.1$，相位在任频率处永远不会穿过－115°。对于 $1/T_D=0.1$，为得到相位裕度 PM＝65°，穿越频率应是 0.5 rad/s。对于 $1/T_D \ll 0.05$ 的值，相位曲线基本上如图 6-69 所示的点线，若 $1/T_D=0.05$，则穿越频率 ω_c 最大可取为 1 rad/s。因此，$0.05<1/T_D<0.1$ 是 $1/T_D$ 的较合理的取值范围；任意小于 0.05 的取值，系统的带宽不会再有明显的增大，而任意大于 0.1 的取值，就不可能满足相位裕度 PM 的要求。虽然最终的选择都是有点随意的，我们还是选择 $1/T_D=0.1$ 来完成最终的系统设计。

我们选择 $1/T_I$ 为 $1/T_D$ 的 1/20；就是 $1/T_I=0.005$。小于 1/20 的取值，就会影响穿越频率处的相位，从而降低相位裕度 PM。另外，一般希望在低于穿越频率 ω_c 的频段上，系统有较大的增益，这样可以保证系统有较快的瞬态响应速度和更小的误差。在设计中，把 $1/T_D$ 和 $1/T_I$ 的取值尽量大一些，就是基于这样的考量。

剩下的任务就只是确定 PID 控制器的比例部分，即 K。不像例 6.17，那时我们选择 K 要满足稳态误差要求，在这里我们选择 K，以得到与期望的 PM＝65°对应的穿越频率。在 6.6 节中讨论的求 K 的基本过程包括：画 $K=1$ 时带补偿系统的幅值，求出幅值在穿越点的值，然后令 $1/K$ 等于那个值。图 6-69 表明，当 $K=1$ 时，在我们期望的穿越频率 $\omega_c=0.5$ rad/s 处，$|D(s)G(s)|=20$。因此，

$$\frac{1}{K}=20,\quad 所以\quad K=\frac{1}{20}=0.05$$

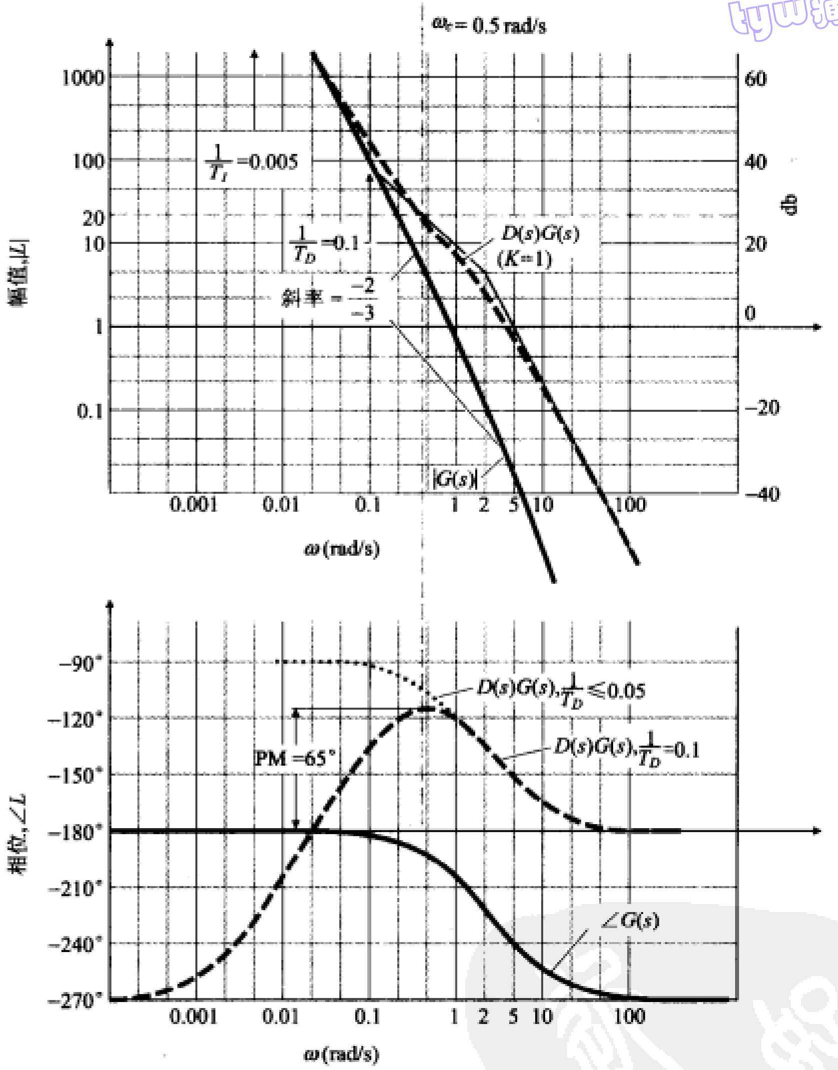


图 6-69　例 6.19 的 PID 补偿设计

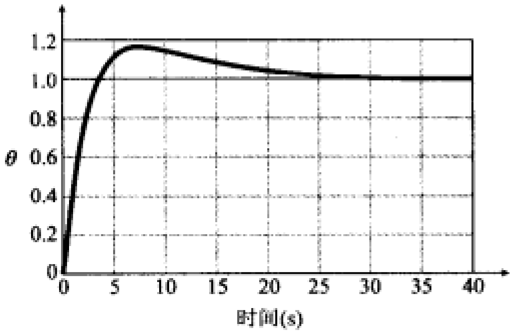
现在,我们得到了满足所有性能要求的补偿方程:

$$D(s)=\frac{0.05}{s}[(10s+1)(s+0.005)]$$

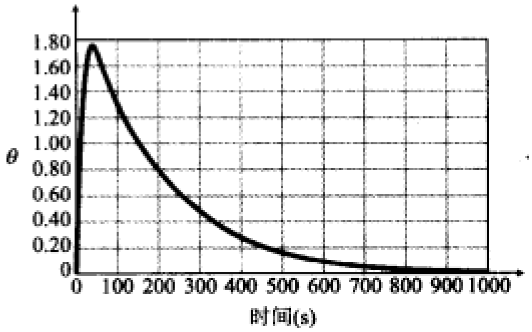
值得注意的是,如果降低系统增益,以致 $\omega_c \leqslant 0.02$ rad/s,那么图 6-69 中带补偿的系统对应的相位就小于−180°,于是,系统就会变得不稳定。就像在 6.4 节提过的,这种情况就是条件稳定系统。该系统和所有其他条件稳定系统的参数为 K 的根轨迹图会表明,对于非常小的增益 K,其根轨迹曲线会分布在右半平面。图 6-70a 显示了系统对单位阶跃 θ_{com} 的响应,可以看到,系统表现出良好的阻尼特性,其相位裕度 PM=65°。

图 6-70b 显示了系统对阶跃干扰转矩=0.1 N 的响应曲线。我们注意到,积分控制项逐渐逼使误差趋向于零;但是,这个过程是很缓慢的,因为在零点附近存在一个闭环极点=−0.005。不管怎样,我们回忆一下设计过程,这个零点是为了使积分项不过分影响相位裕度 PM 而设置的。

所以，如果这个缓慢的干扰响应是不可接受的，可以加大极点来减小相位裕度 PM 和系统的阻尼。折中在控制系统设计中是经常必需的！



(a) 阶跃响应



(b) 干扰阶跃响应

图 6-70 PID 例子的瞬时响应

(1) PD 控制会在大于转折点的频段加上相位超前。如果增益在低频段的渐近线不变，PD 补偿会增大穿越频率和响应速度。频率响应高频段幅值的增大会增强系统对噪声的灵敏性。

(2) 超前补偿会在两个转折点之间的频带加上相位超前。如果增益的低频段渐近线不变，超前补偿会同时增大原系统的穿越频率和响应速度。

(3) PI 控制会在小于转折点的频段增大频率响应的幅值，从而减小稳态误差。它也在小于转折点的地方带来相位滞后，所以我们需要把它保持在足够小的频率上以避免过分降低系统的稳定性。

(4) 滞后补偿会在低于两个转折点的频段增大频率响应的幅值，从而减小稳态误差。另一方面，合理调整 K，滞后补偿可以用来减小频率响应在高于两个转折点的频段的幅值，使得 ω_c 产生可接受的相位裕度。滞后补偿也在两个转折点之间提供相位滞后，所以我们要把它们保持在足够小的频率上避免相位减小使相位裕度 PM 降低过多。用滞后补偿的响应速度一般比用超前补偿要低。

6.7.6 设计的考虑因素

在前面的设计例子中已看到回路增益 $L(s)$ (=KDG)的开环伯德图的特性，确定了系统的稳态误差和动态响应这些方面的性能。在第 4 章，对反馈的其他性质(包括减小传感器噪声和参数改变对系统性能的影响)都进行了讲解。在现有的各种不同的设计方法中，控制输入和干扰输入是设计的重要组成部分，因此有必要对系统的稳态误差进行认真的研究。要满足特定的稳态误差指标，就需要保证在较低的频段上系统增益高于某个下线。而系统的高频段的增益是系统灵敏度问题需要考虑的另一个方面。到目前为止，第 4 章、5.5 节和 6.7 节都简洁地讨论了这样一种思想：为减小传感器噪声的影响，系统在高频段的增益必须很小。事实上，在讲解超前补偿的时候，我们

特别在纯微分控制加上一个极点来减少传感器噪声在高频段的影响。设计人员在补偿环节加上额外的极点并不少见，就是运用下面的关系式来引进更多的衰减以减少噪声的影响。

$$D(s)=\frac{Ts+1}{(\alpha Ts+1)^2}$$

在设计中，考虑高频增益的第二个原因是，许多系统都有的高频动态现象，例如机械谐振，它可以影响到系统的稳定性。在系统性能要求极高的设计中，这些高频动态特性也应被包括在系统模型中，并且在对这些动态特性有充分认识的基础上设计补偿器。其标准做法是，尽量保持高频段的低增益，就像我们为减小传感器噪声所做的那样。观察图 6-71 所示的典型系统的增益一频率关系图，对此会有清楚的理解。可以看到，高频动态特性导致系统不稳定的唯一可能性就是，未知的高频谐振会引起幅值升高至 1 以上。相反，如果保证未知的高频动态也行不会导致系统幅值超过 1，那么系统的稳定也就得到保证了。如果在 $D(s)$ 增加额外的极点，能够在高频段降低标称的回路增益(L)，那么也就减小了 G 中未知谐振导致系统不稳定的可能性。对于具有谐振现象的系统，通过调整系统高频段的幅值，使其不超过 1，以保证系统的稳定性，这个过程通常被称为**幅值镇定**(**amplitude stabilization**)或**增益镇定**(**gain stabilization**)。当然，如果能准确知道谐振的特性，我们就可以通过精心设计的补偿环节来改变某特定频率点上的相位，以避免奈奎斯特图包围 −1 点，从而即使幅值超过 1，也仍能把系统稳定下来。这种使系统稳定的方法，常常被称为**相位镇定**(**phase stabilization**)。采用相位镇定要面对一个难题，就是很难对高频动态特性有足够的认识，况且它可能还是不断变化的。因此，在设计中很难有一个精确的系统模型。于是只有一种选择，那就是采用幅值镇定，将高频段的标称回路增益降到足够低。这样，可同时降低系统对模型不确定性和传感器噪声的灵敏度。

灵敏度的两个方面，高频特性和低频特性，可以用图表来形象地描述，如图 6-72 所示。可以看到，系统的增益值在某低频范围内应有下限，该频段上的最小增益不得小于该下限值，这可以保证系统有满意的稳态误差。而系统在高频段的增益也应有上限，该频段上的最大增益不得大于此上限值，这对抑制噪声有较好的效果，同时可降低因受控对象模型中存在的误差而导致系统不稳定的可能性。为方便起见，从频率响应的角度，将低频处的下限和高频处的上限分别定义为 W_1 和 W_2^{-1}，并在系统的幅值曲线上描述出来，如图 6-72 所示。在这两个频率范围之间的频段上，控制工程师应使增益曲线在期望的带宽附近穿越横轴，且穿越处的渐近线斜率为 −1。于是，系统获得了理想的相位裕度，同时也有满意的系统阻尼。

举个例子，如果要求一个控制系统从频率 0 到 ω_d 跟随一个正弦参考输入，误差不大于 1%，那么函数 W_1 从 $\omega=0$ 到 ω_d 的值为 100。也可以用同样的方法来定义 W_2^{-1} 函数的取值。这些方法将在 6.9 节进一步讨论。

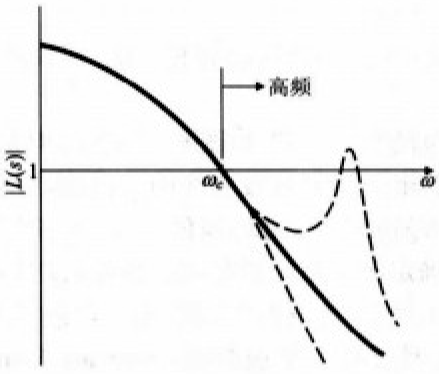


图 6-71 受控对象不确定性的高频影响

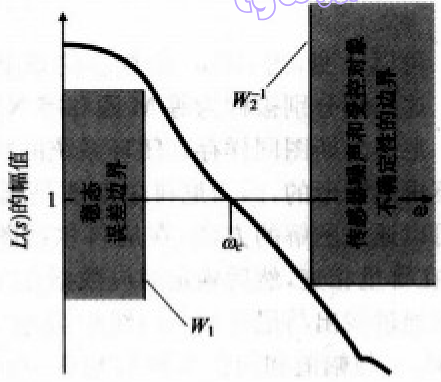


图 6-72 低灵敏度的设计准则

▲6.8 频率特性的其他图示方法

在计算机得到广泛应用之前，人们还发明了其他方法来表示频率响应数据来，以帮助理解设计和减轻设计人员的工作负担。计算机的广泛应用已经减少了人们对这些方法的需要。在这一节，由于它们的历史地位非常重要，我们介绍其中的两种：尼科尔斯图和逆奈奎斯特曲线。

6.8.1 尼科尔斯图

尼科尔斯图的纵坐标表示的是 $|G(\mathrm{j}\omega)|$，而横坐标则为 $\angle G(\mathrm{j}\omega)$。由伯德图的幅值曲线和相位曲线，可直接地绘制出相应的尼科尔斯图。像伯德图一样，幅值采用对数刻度的坐标，而相位则采用线性刻度的坐标。新的曲线是以频率 ω 为参变量的，曲线上的每一个点都对应着一个频率值。该模型是由 N. Nichols 提出的，因此通常被称为**尼科尔斯图(Nichols chart)**。尼科尔斯图和奈奎斯特图的基本思想是相似的，一个是 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的幅值相对其相位绘图，另一个则是描述的实部和虚部，这已在 6.3 节和 6.4 节中讨论过。但是，在以线性刻度描述的奈奎斯特曲线很难表示出 $G(\mathrm{j}\omega)$ 有关的所有特性，而在尼科尔斯图中的幅值轴是采用对数刻度的，正好弥补了这个不足，从而在系统设计中得到了广泛的应用。

对于复传递函数 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的任意取值，正如 6.6 节所表明的，都存在唯一的单位反馈闭环传递函数

$$\mathcal{T}(\mathrm{j}\omega)=\frac{G(\mathrm{j}\omega)}{1+G(\mathrm{j}\omega)} \tag{6-54}$$

或采用极坐标的形式

$$\mathcal{T}(\mathrm{j}\omega)=M(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha(\omega)} \tag{6-55}$$

其中，$M(\mathrm{j}\omega)$ 是闭环传递函数的幅值，$\alpha(\omega)$ 是闭环传递函数的相位。特别地，

$$M=\left|\frac{G}{1+G}\right| \tag{6-56}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(N) = \angle \frac{G}{1+G} \tag{6-57}$$

可以证明，当 $G(j\omega)$ 用线性的奈奎斯特图表示时，闭环幅值和相位的“等高线”是圆。这些圆分别被称为**等 M 圆**和**等 N 圆**。

尼科尔斯图同样存在闭环系统的幅值和相位的“等高线”，如图 6-73 所示；但是，它们不再是圆形的，因为尼科尔斯图是幅值相对于相位的半对数曲线图。因此，设计人员可以通过图解的方法，在尼科尔斯图上找出开环曲线与闭环幅值为 0.70 的“等高线”在哪里相交，然后确定对应数据点的频率来确定闭环系统的带宽。同样，设计人员可以通过找出与尼科尔斯曲线相切的闭环幅值的最大“等高线”的值，来确定谐振的幅值 M_r。与幅值和相位关联的频率，在相切点有时被称为**谐振频率（resonant frequency）** ω_r。相似地，设计人员可以通过观察在尼科尔斯曲线穿过直线 −180°处对应的增益值来确定增益裕度（GM），通过观察在曲线穿过幅值 1 的直线处对应的相位大小来确定相位裕度（PM）。[①]通过使用 MATLAB 中的 nicholsm—文件可以很容易画出尼科尔斯图。

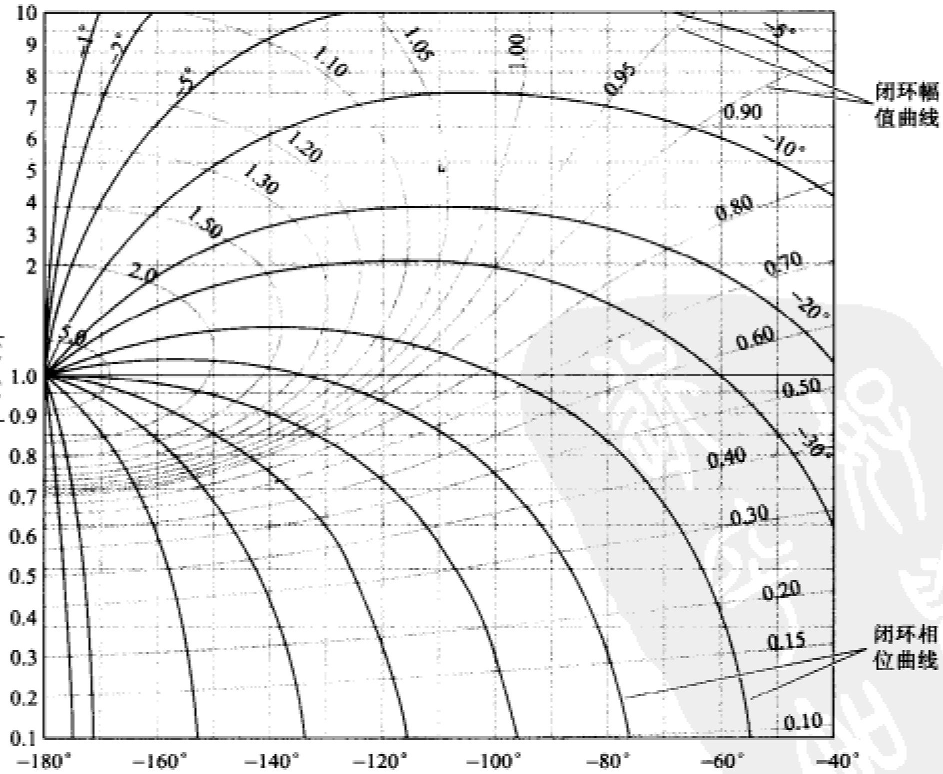


图 6-73　尼科尔斯图

① James, H. M., N. B. Nichols 和 R. S. Phillips(1947)。

例 6.20 PID 控制的尼科尔斯图

某系统的频率响应曲线如图 6-69 所示，试确定引入补偿后系统的的带宽和谐振幅值。

解：根据图 6-69 中系统的幅值曲线和相位曲线，绘制出尼科尔斯图，如图 6-74 所示。当比较两幅图时，重要的是将图 6-69 的幅值除以 20，以得到 $|D(s)G(s)|$ 而不是图 6-69 的标称值。因为曲线在 $\omega=0.8$ rad/s 与闭环幅值为 0.70 的“等高线”相交，所以系统的带宽是0.8 rad/s。因为与曲线相切的幅值的最大“等高线”是 1.20，所以谐振幅值 $M_r=1.2$。

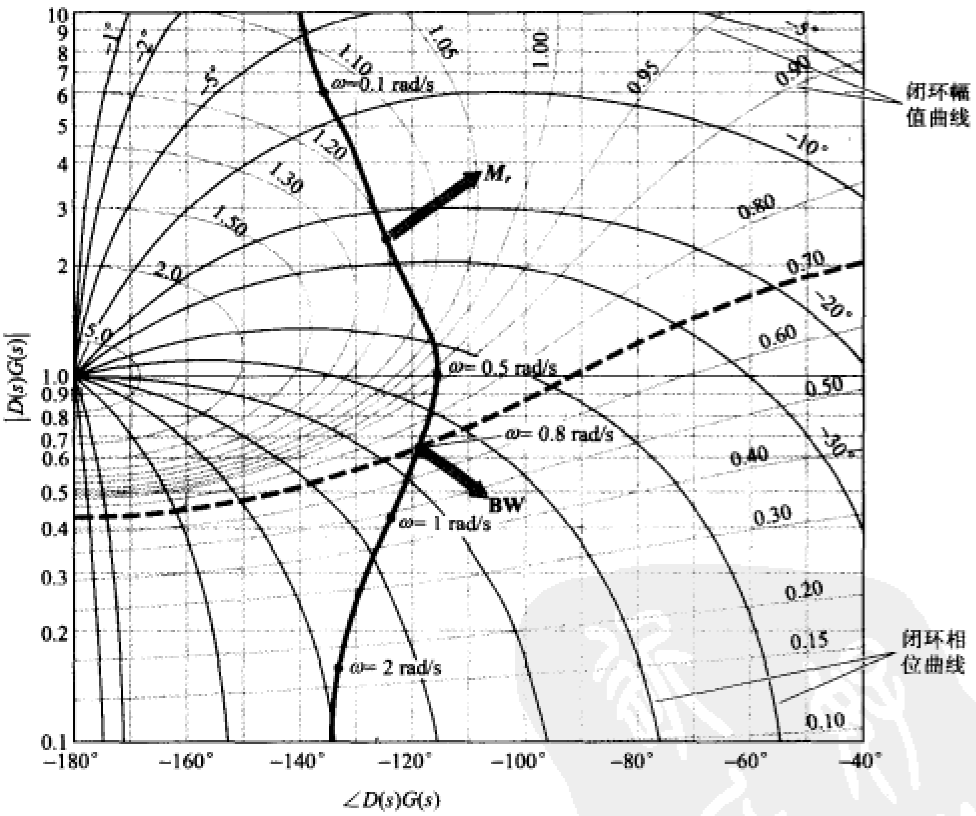


图 6-74 由尼科尔斯图确定带宽和 M_r 的示例图

当设计人员要手工画图和计算的时候，这种采用图形方式的数据表示方法就变得特别有价值。例如，增益的改变，可以通过在覆盖标准的尼科尔斯图的透明纸上垂直移动曲线来计算。这样 GM、PM 和带宽都很容易从图上读出来，因此可以花最小的力气完成几种增益值的计算。但是，有了计算机辅助设计的办法后，我们现在只需敲几个键就能完成带宽和增益的的许多重复计算或其他参数的计算。今天，尼科尔斯图主要作为奈奎斯特曲线法的一种替补方法，来表示信息的。对于那些需要计算包围 −1 次数的复杂系统，尼科尔斯图由于采用的是对数刻度，可以考查更大的频率范围，而奈奎斯特曲线图可表现的范围则要小的多。此外，尼科尔斯图还允许我们直接从图上读

取到增益裕度和相位裕度。

例 6.21　从尼科尔斯图上求稳定裕度

对于例 6.12 的系统，它的尼科尔斯图如图 6-41 所示，运用尼科尔斯图计算 PM 和 GM。

解：图 6-75 是根据图 6-41 中的特性曲线绘制的尼科尔斯图。注意到，曲线穿过幅值为 1 的直线时，相位裕度 PM=36°，而 GM 是 1.25(=1/0.8)。从这种数据的表示方法可以明显地看出，曲线最关键的部分是穿过−180°的那段；因此，在这个例子中，GM 是最相关的稳定裕度指标。

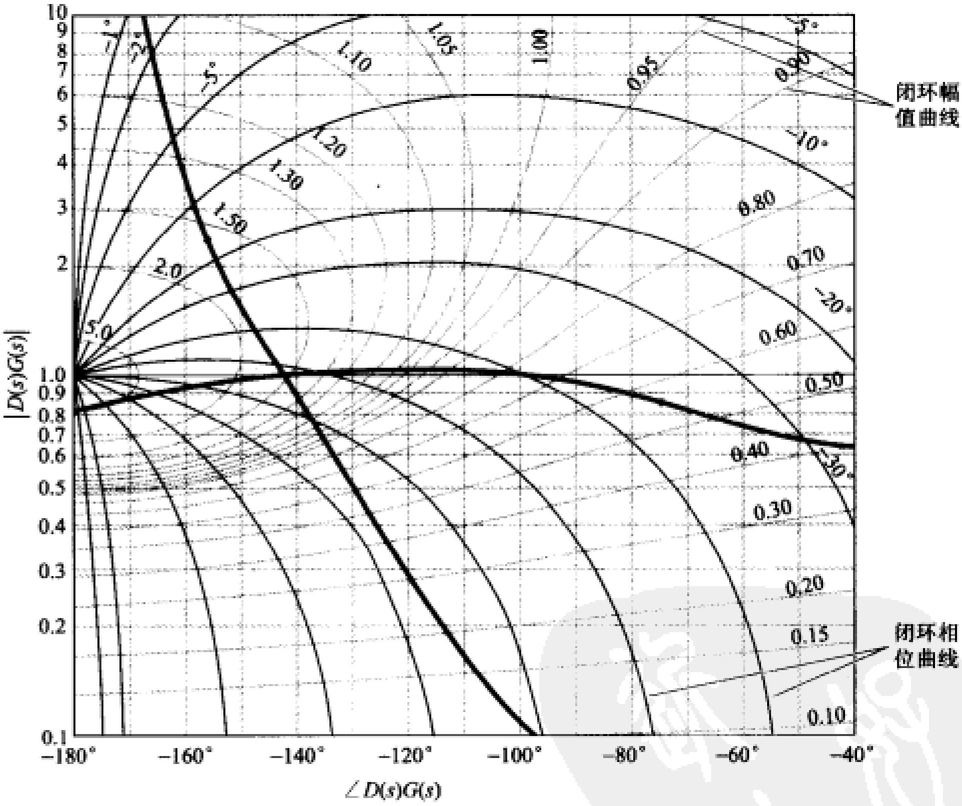


图 6-75　例 6.12 和 6.21 复杂系统的尼科尔斯图

6.8.2　逆奈奎斯特图

在 6.3 节中介绍了奈奎斯特图，在 6.4 节曾在奈奎斯特图上定义和讨论了稳定裕度的概念，现在来介绍**逆奈奎斯特图**(**inverse Nyquist plot**)。绘制逆奈奎斯特图也是很容易的，伯德图上某频率点对应幅值的倒数值和相应的相位值就确定了复平面上的一个点，将各频率值确定的点连接起来，得到的曲线就是系统的逆奈奎斯特图。像奈奎斯特曲线一样，在逆奈奎斯特图上可直接求取 PM 和 GM。当 $|G(j\omega)|=1$ 时，

$|G^{-1}(j\omega)|$ 也等于 1,所以相位裕度 PM 在这两种图上的定义是一样的。但是,当相位为$-180°$或$+180°$时,$|G^{-1}(j\omega)|$ 的值就是 GM,并不需要像奈奎斯特曲线那样还要计算倒数。

图 6-76 给出了图 6-24(例 6.9)中当 $K=1$ 系统稳定时的逆奈奎斯特曲线。从图中注意到,GM=2 和 PM $\cong$ 20°。作为一个更加复杂的例子,图 6-77 显示了一个六阶系统的逆奈奎斯特曲线,它的奈奎斯特曲线如图 6-41 所示,而其尼科尔斯图如图 6-75 所示。在这里我们注意到,GM=1.2 和 PM $\cong$ 35°。因为两次穿越单位圆不在同一个点,那么在两个穿越点求出的 PM 值的最小值就是最重要采用的 PM 值。

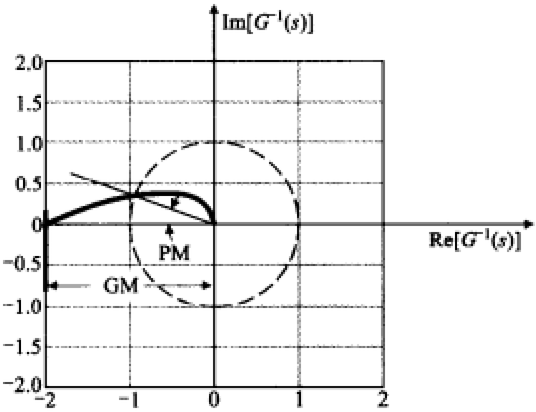


图 6-76 例 6.9 的逆奈奎斯特曲线图

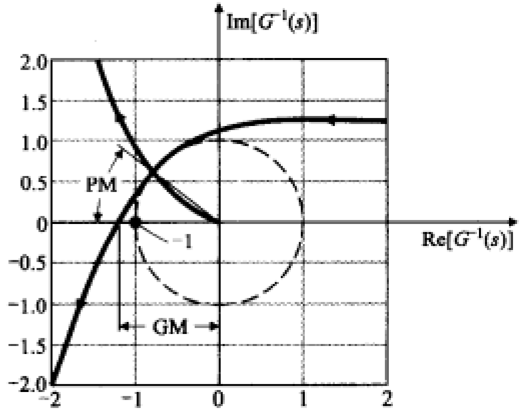


图 6-77 于图 6-41 中奈奎斯特图对应的逆奈奎斯特图

▲6.9 根据灵敏度函数定义的性能指标

我们已经看到,增益裕度和相位裕度不但包含了关于系统的相对稳定性的有用信息,而且还可以作为超前补偿和滞后补偿设计的指南。但是,在实际的控制系统设计中,仅有 GM 和 PM 两个性能指标时不够的。如果以频率响应的观点将一些外部信号,例如参考输入和干扰输入,给出频率描述,然后考虑在 4.1 节定义的灵敏度函数,那么我们就可以在频率域上表达更完整的设计要求。例如,到目前为止,我们还只是通过系统对简单的阶跃输入和斜坡输入的瞬态响应来描述系统的动态性能。对于实际的输入信号,更为精确的描述是将它们看成是有一定功率谱密度的随机过程。为简化分析,但又不失准确性,可以认为这些信号是由某特定频率范围内的正弦信号合成的。例如,我们可以在频域上描述参考输入信号:它是一组具有不同频率的正弦信号的和,而各种频率的正弦信号的幅值,是有图 6-78 所描述的幅值方程 $|R|$ 所决定的。换句话说,由正弦信号分量组成的信号,一直到某个频率 ω_1,各分量都有相同的幅值。而在大于 ω_1 的频率范围内,幅值极小,可以忽略不计。于是可以这样来描述系统响应的指标:对于任何频率为 ω_0,ω_0 满足 $0\leqslant\omega_0\leqslant\omega_1$,幅值为 $|R(j\omega_0)|$ 的正弦信号,系统

误差的幅值应小于边界值 e_b（一个值，例如 0.01）。为了提出在设计中便于应用的性能指标，再次考虑图 6-79 所示的单位反馈系统。对于这个系统，其误差由下式给出：

$$E(j\omega)=\frac{1}{1+DG}R\triangleq\mathcal{S}(j\omega)R \tag{6-58}$$

这里我们使用如下形式的**灵敏度函数**（**sensitivity function**）：

$$\mathcal{S}(j\omega)\triangleq\frac{1}{1+DG} \tag{6-59}$$

除了用作与系统误差相乘的因子外，灵敏度函数也是 DG 的奈奎斯特曲线到关键点−1 的距离值的倒数。因此，$\mathcal{S}$ 的取值越大，表明奈奎斯特曲线距离临界点越近。根据式(6-58)，频域内的误差指标可表示成 $|E|=|\mathcal{S}||R|\leqslant e_b$。为了使问题规范化，而且不必每次都定义频谱 R 和误差边界 e_b，我们定义了频率 ω 的实数函数 $W_1(\omega)=|R|/e_b$，这样，性能要求就可以写成

$$\boxed{|\mathcal{S}|W_1\leqslant 1} \tag{6-60}$$

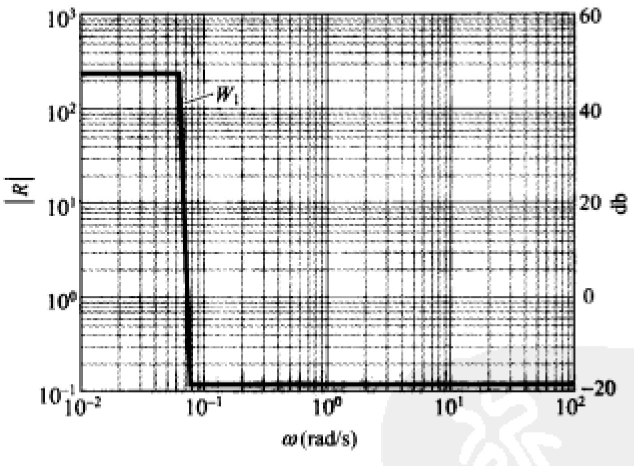


图 6-78 典型参考输入信号的频谱图

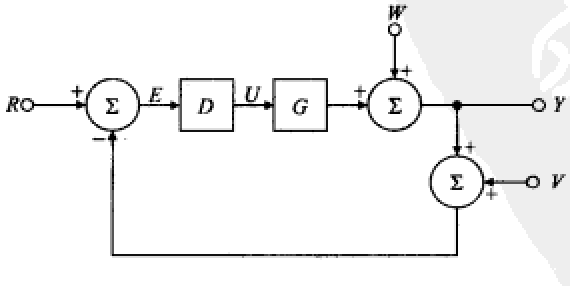


图 6-79 闭环系统框图

例 6.22 性能界定函数

一个单位反馈系统，对于频率低于 100 Hz、幅值为单位值的正弦输入信号，要求其误差小于

0.005。画出该设计的性能频率函数 $W_1(\omega)$ 。

解:从问题的描述知道,频谱在 $0\leqslant\omega\leqslant200\pi$ 是一个单位。因为 $e_b=0.005$,所以要求的函数是在给定的范围内幅值是 $1/0.005=200$ 的矩形。图 6-80 是性能界定函数 $W_1(\omega)$ 的函数曲线。

回到熟悉的伯德图上来考虑式(6-60),我们发现它实际上描述了对回路增益的要求。对要求系统误差很小的频率范围内,回路增益很大。在这种情况下,$|S|\approx 1/|DG|$,于是系统的性能要求可近似于

$$\frac{W_1}{|DG|}\leqslant 1$$

$$\boxed{|DG|\geqslant W_1} \tag{6-61}$$

该性能要求可以看作是稳态误差指标的延伸,只不过频率由 $\omega=0$ 一点变成了 $0\leqslant\omega_0\leqslant\omega_1$ 的范围。

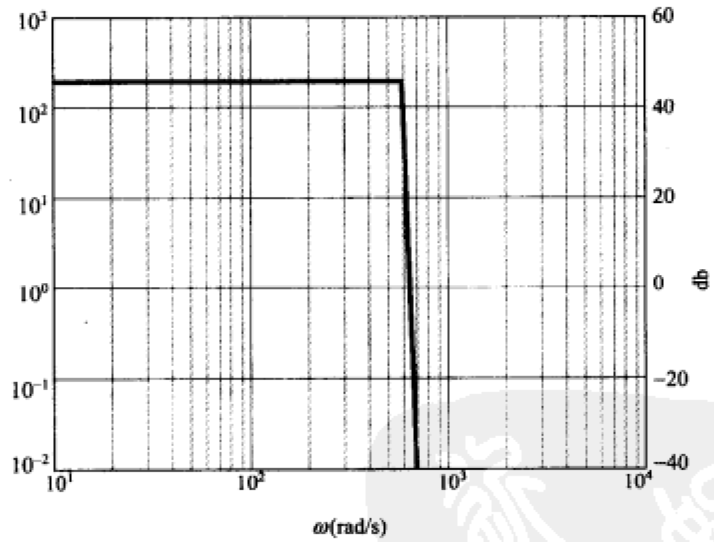


图 6-80 性能函数 W_1 的曲线图

除了保证系统的动态性能要求外,设计人员通常还应考虑系统的**稳定鲁棒性**(**stability robustness**)。也就是说,在可预期的不确定性因素(如温度、年龄和其他操作上的或环境因素)的影响下,受控对象的传递函数发生变化时,针对标称传递函数所作的设计仍是稳定的。为了描述这种不确定性,比较现实的做法是利用一个描述不确定性的乘数因子,来描述受控对象的传递函数:

$$G(j\omega)=G_o(j\omega)[1+W_2(\omega)\Delta(j\omega)] \tag{6-62}$$

在式(6-62)中,实数函数 W_2 表示的是不同频率处传递函数幅值变化的大小。用 G 和 G_o 来可表示为:

$$W_2=\left|\frac{G-G_o}{G_o}\right| \tag{6-63}$$

W_2 在低频处的形状几乎总是非常小(在这里,我们对模型非常了解),而在高频段

寄生参数作用明显，通常在会有结构变化的高频处，W_2 会突然变大。图6-81是 W_2 的典型函数曲线。复函数 $\Delta(j\omega)$ 表示相位的不确定性，它只有一个约束条件：

$$0 \leqslant |\Delta| \leqslant 1 \tag{6-64}$$

假定标称设计已经完成，而且 DG_o 的奈奎斯特曲线满足奈奎斯特稳定性判据，即系统是稳定的。在这种情况下，标称的特征方程 $1+DG_o=0$ 对于任何实频率都不会成立。要使系统具有鲁棒性，采用式(6-62)所描述的不确定对象的特征方程也应是不成立的。具体而言，应满足以下条件：

$$1+DG \neq 0 \tag{6-65}$$

$$1+DG_o[1+W_2\Delta] \neq 0$$

$$(1+DG_o)(1+\mathcal{T}W_2\Delta) \neq 0$$

其中，$\mathcal{T}$ 被定义为**灵敏度余函数**(**complementary sensitivity function**)：

$$\mathcal{T}(j\omega) \triangleq DG_0/(1+DG_0) = 1-\mathcal{S} \tag{6-66}$$

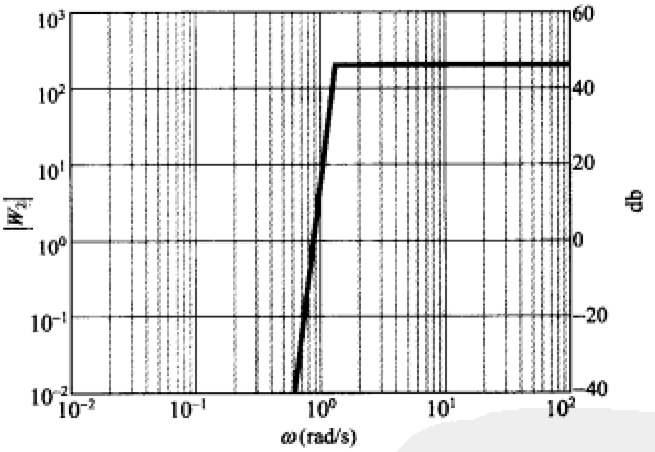


图6-81　典型的对象不确定性 W_2 的曲线图

因为标称系统是稳定的，式(6-65)的第一个项是成立的，即 $(1+DG_o)$ 从不等于零。因此，如果式(6-65)对于任意的频率和 Δ，都不等于零，那么其成立的必要和充分条件是：

$$|\mathcal{T}W_2\Delta| < 1$$

利用式(6-64)，上式可简化成：

$$|\mathcal{T}|W_2 < 1 \tag{6-67}$$

对于单输入单输出单位反馈系统，该性能坐标还可近似为一种更简便的形式。我们知道，在高频段，W_2 是不可忽略的，因为受控对象在高频段的不确定性突出，但此处的 DG_o 很小。因此，$\mathcal{T}$ 可以近似为 $\mathcal{T} \approx DG_o$，从而，约束条件简化为：

$$|DG_o|W_2 < 1$$

$$\boxed{|DG_o| < \frac{1}{W_2}} \tag{6-68}$$

例6.23　典型的对象不确定性

受控对象的不确定性由 W_2 描述，W_2 为零直到 $\omega=3000$；从 $\omega=3000$ 开始到 $\omega=10\,000$，线

性地增大到 100；在更高频段，则保持为 100。试确定 DG_o 应满足的约束条件。

解：当 $W_2=0$ 时，对回路增益没有约束条件；从 $\omega=3000$ 到 $\omega=10\,000$，$1/W_2=DG_o$ 是从∞到 0.01 的双曲线，对于 $\omega>10\,000$，DG_o 保持为 0.01。图 6-82 给出的是 DG_o 的边界曲线。

在实际中，回路增益的幅值采用对数—对数坐标，因此式(6-61)和(6-68)的约束条件也可以图像的形式描述在同样的坐标系中。一种典型的曲线图如图 6-83 所示。设计人员希望构造的开环增益曲线，应在低于 ω_1 的频段保持大于 W_1，然后在 $\omega_1\leqslant\omega\leqslant\omega_2$ 的范围穿过幅值为 1 的直线（$|DG|=0$），最后在大于 ω_2 的频段内小于 W_2。

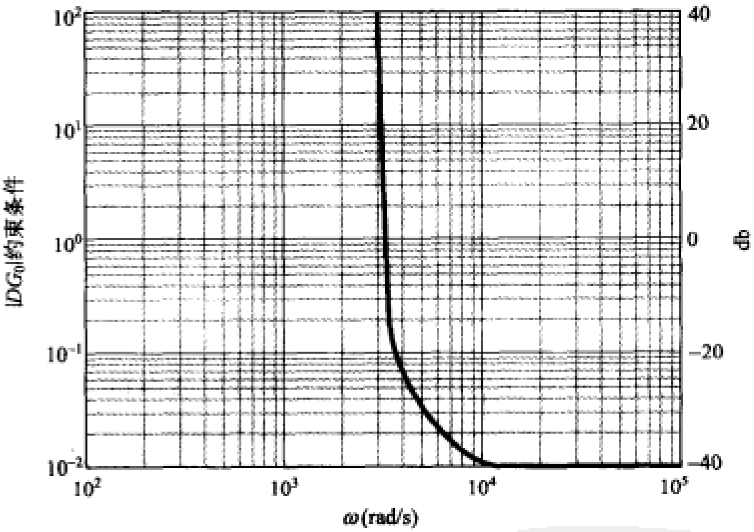


图 6-82 $|DG_o|$（$=|W_2^{-1}|$）的约束条件曲线图

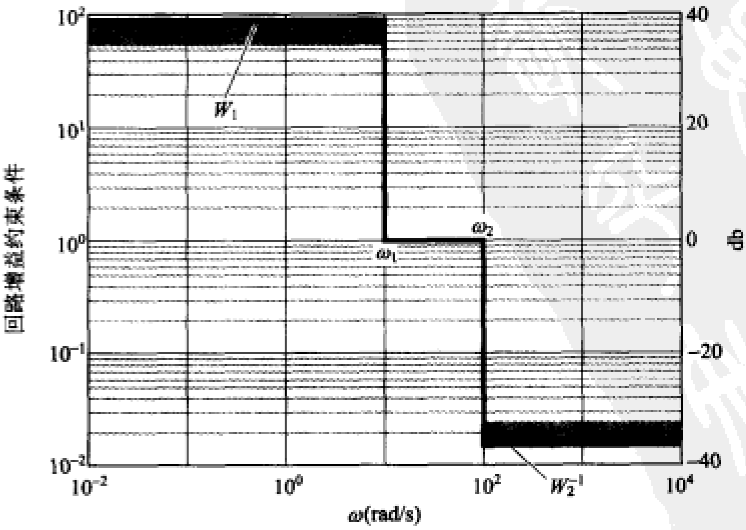


图 6-83 伯德图上关于系统跟踪能力和鲁棒性的约束条件

由灵敏度函数确定的设计限制条件

系统要有良好的性能，其传递函数应满足一定的限制条件，发现这些限制条件并将其具体为可实现的设计目标，这又是伯德的主要贡献之一。例如，我们期望系统的误差在尽可能广的频率范围内保持为一个较小的值，又期望系统对非常不确定的对象具有鲁棒性。对于图6-83所示的曲线来说，希望W_1和W_2在各自的频率范围内尽可能的大，并且ω_1要尽可能地接近ω_2。因此，回路增益就能在一个非常小的范围内以很大的负斜率从大于W_1急降到小于$1/W_2$，同时又保持理想的相位裕度，以保证系统的稳定性和良好的动态性能。但是，根据前面给出的伯德增益一相位关系方程可知，利用线性控制器是无法实现上面的期望的。因为相位是由幅值曲线斜率的积分来决定的。如果这个斜率在在ω_0附近相当宽的频率范围内保持为一个常数，那么幅值相位关系方程可近似为：

$$\phi(\omega_0) \approx \frac{\pi}{2}\left.\frac{dM}{du}\right|_{u=0} \tag{6-69}$$

其中，M是幅值的对数值，$u=\log\frac{\omega}{\omega_0}$。如果要求相位保持在$-150°$以上，以得到$30°$的相位裕度，那么幅值曲线在$\omega_0$附近的斜率可由下式估算：

$$\frac{dM}{du} \approx \frac{2}{\pi}\left(-150\frac{\pi}{180}\right) \approx -1.667$$

如果要使曲线变化得更快（更大的负值），那就必需以减小相位裕度为代价。于是我们可得到这样的一个设计规则，那就是，伯德图上的幅值曲线应以斜率为-1穿越幅值为1的水平线，并在穿越频率ω_c附近约十倍频程的范围内保持该斜率。这个结论已在6.5节讨论过。在特殊的情况下，这一规则需要做些调整，但式(6-69)无论在什么情况下都是成立的。

例6.24　关于鲁棒性的约束条件

如果$W_1=W_2=100$，并且我们要求得到$PM \doteq 30°$，那么ω_2/ω_1的最小比值是多少？

解：斜率是：

$$\frac{\log W_1 - \log\frac{1}{W_2}}{\log\omega_1 - \log\omega_2} = \frac{2+2}{\log\frac{\omega_1}{\omega_2}} = -1.667$$

因此，比值的对数是　　$\log\frac{\omega_1}{\omega_2} = -2.40$，　$\omega_2 = 251\,\omega_1$

像标准伯德图可作为系统设计的指南一样，以频率为变量的灵敏度函数，其函数曲线同样可作为设计工作的指南。根据式(6-60)可知，要得到满意的系统性能，在$0\leqslant\omega\leqslant\omega_1$的范围内，应满足$|S|<\frac{1}{W_1}$，而根据式(6-68)可知，要使系统具有鲁棒性，要求在$\omega_2\leqslant\omega$的范围内，应满足$|S|\approx 1$。那么上述条件是否预定能得到满足呢？无需惊讶的是，伯德又发现了这些条件成立所面临的限制。由Freudenberg和Looze推广的约束条件，表明灵敏度函数的积分是由分布在右半平面的极点所决定的。假设DG_o有n_p个极点p_i位于右半平面，而且在高频段以大于1的斜率"骤降"。对于有理函数来说，这

表明有穷极点的数量至少比零点的数量多两个。在这种假设下，积分式可以表示成：

$$\int_0^{\infty} \ln(|\mathcal{S}|)d\omega = \pi \sum_{i=1}^{n_p} \mathrm{Re}\{p_i\} \tag{6-70}$$

如果没有极点分布在右半平面，则积分项为零。这表明，如果在某个频率范围内使 $\ln|\mathcal{S}|$ 取绝对值很大的负值，以使该频率范围内的系统误差很小，那么在另一个频率范围内，$\ln|\mathcal{S}|$ 必然会取绝对值很大的正值，从而使该范围内的系统误差变大。如果有不稳定的极点，情况会更糟糕，因为积分面积为正的区域将比积分面积为负的区域大，也就是对系统误差的放大作用要比对误差的抑制作用大。如果系统是最小相位系统，那么在原则上认为，只要灵敏度在所有正的频率内是一直增加的，就可以保证灵敏度函数的幅值保持为一个较小的值。但这样的设计要求系统有足够的带宽，在工程上是无法实现的。如果要求系统带宽为一个具体值，那么在带宽范围内的某个频率点上，灵敏度函数必须有一个有限的、可能很大的正值。就像在 6.4 节(图 6-38)所定义的向量裕度(VM)，可以知道，一个较大的 $\mathcal{S}_{max}$ 对应着奈奎斯特曲线靠近临界点 -1，并且系统有一个较小的向量裕度，因为

$$\mathrm{VM} = \frac{\mathcal{S}_{max}}{\mathcal{S}_{max}-1} \tag{6-71}$$

如果系统是非最小相位系统，情况会更糟糕。如果 DG_o 有一个非最小相位零点，且是分布在右半平面的零点，那么就需要重新修正式(6-70)。假定该零点为 $z_o=\sigma_o+j\omega_o$，这里，$\sigma_o>0$。同样，还假设 DG_o 有 n_p 个极点 p_i (共轭极点为 $\overline{p_i}$)。现在，式(6-70)可以表达为双边加权积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(|\mathcal{S}|)\frac{\sigma_o}{\sigma_o^2+(\omega-\omega_o)^2}d\omega = \pi\sum_{i=1}^{n_p}\ln\left|\frac{\overline{p_i}+z_o}{p_i-z_o}\right| \tag{6-72}$$

在这种情况下，我们不再需要假设系统在高频段存在"骤降"约束，因为上式中加权函数随着频率的增大迅速趋于零，所以在高频段不会有正的积分面积。关于这个积分项，很重要一点是，如果非最小相位零点靠近右半平面的某个极点，那么积分项的右边会是非常大的一个值。相应地，要求在积分区间上，积分面积为正的区域要远大于积分面积为负的区域。基于这个结论，如果系统在右半平面有非常接近的极点和零点，那么要同时满足系统的追踪特性和鲁棒性要求是非常困难的。

例 6.25 天线的灵敏度函数

计算和画出天线设计的灵敏度函数，其中 $G(s)=1/s(s+1)$ 和 $D(s)=10(0.5s+1)/(0.1s+1)$。

解：这个例子的灵敏度函数是：

$$\mathcal{S}=\frac{s(s+1)(s+10)}{s^3+11s^2+60s+100} \tag{6-73}$$

曲线图画在了图 6-84，它由下列的 MATLAB 命令给出：

```
numS = [1 11 10 0];
denS = [1 11 60 100];
sysS = tf(numS,denS);
[mag,ph,w] = bode(sysS);
semilogy(w,mag)
```

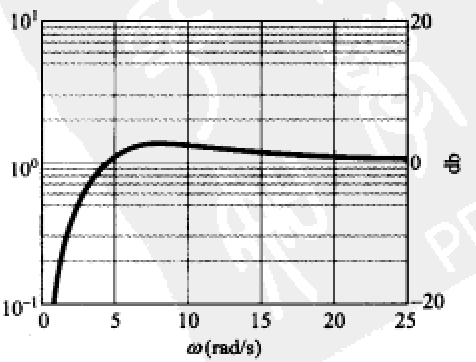


图 6-84 例 6.25 的灵敏度函数

由 $M=\max(mag)$ 求得8的最大值是 1.366，从而得到系统的向量裕度为 VM=3.73。

6.10　时滞环节

纯时滞环节的拉普拉斯变换是 $G_D(s)=e^{-sT_d}$，在前面的根轨迹分析中，曾将它近似为一个有理函数(Padé 近似)。虽然这种近似仍可用于频率响应的分析方法，但借助伯德图和奈奎斯特稳定判据，可以进行更为准确的分析。

时滞环节的频率响应特性可由 $e^{-sT_d}|_{s=j\omega}$ 的幅值和相位来描述。其幅值是：

$$|G_D(j\omega)|=|e^{-j\omega T_d}|=1\text{，对于所有的 }\omega \tag{6-74}$$

这个结果是我们所预料的，因为时滞环节只是在时间上对信号起延迟作用，而对它的幅值是没有影响的。其以弧度度量的相位是：

$$\angle G_D(j\omega)=-\omega T_d \tag{6-75}$$

可以知道，它总是负值，并且与频率成正比例。这是因为固定的时滞 T_d 相对于递增的频率(也就是递减的周期)是增大的。相位$\angle G_D(j\omega)$的曲线如图 6-85 所示。从图中看出，当 ωT_d 大于 5 弧度时，相位滞后大于 270°。这种趋势表明，若穿越频率大于 $\omega=5/T_d$，那么要保持系统稳定(或得到一个正的相位裕度)实际上是不可能的。同样的，对于穿越频率大于 $\omega\cong 3/T_d$ 时，保持系统稳定也很困难的。这些特性实质上对所有带时滞环节系统的可实现带宽设置了约束条件。(图解这种约束，请参看题 6-68。)

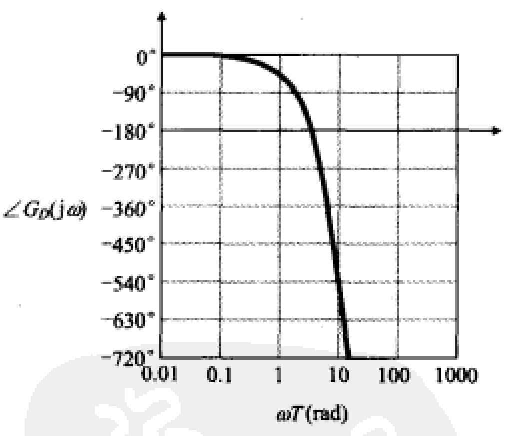


图 6-85　纯时滞环节的相位滞后

频率域的一些概念，例如奈奎斯特判据，在分析带纯时滞的系统时可直接应用，并且时滞环节不再需要近似处理(Padé 近似或其他形式的近似)，具体方法请看下面的例子。

例 6.26　时滞系统的奈奎斯特图

考虑这样的一个系统，其开环传递函数为

$$KG(s)=\frac{Ke^{-T_ds}}{s}$$

其中，$T_d=1\text{s}$。试确定使系统稳定的 K 的取值范围。

解：因为前面介绍的伯德图绘制规则，对于带有时滞环节的系统并不适用，所以采用解析的方法来确定其频率响应图的主要特征。就像刚才所讨论的，时滞项的频率响应的幅值是一个单位值，

而它的相位是$-\omega$弧度。纯积分器的频率响应的幅值是$1/\omega$，且相位是常数$-\pi/2$。因此，有

$$G(j\omega)=\frac{1}{\omega}e^{-j(\omega+\pi/2)}=\frac{1}{\omega}(-\sin\omega-j\cos\omega) \tag{6-76}$$

当ω取不同的值，由上式可绘制出$G(s)$奈奎斯特曲线图，如图 6-86 所示。

现在，让我们更详细地研究一下图中的螺旋形曲线。因为由一个积分项，所以图中由半径无穷大的 180°的圆弧。根据式(6-76)，对于$\omega>0$的较小的值，有$\sin\omega\cong\omega$，那么$Re[G(j\omega)]\cong-1$，即频率响应的实部接近-1。相似地，对于$\omega>0$较小的值，有$\cos\omega\cong1$，所以和$\mathrm{Im}[G(j\omega)]\cong-1/\omega$，这是一个绝对值非常大的负值，如图 6-86 所示。为确定在实轴上的穿越点，我们令$G(j\omega)$的虚部等于零，得到

$$\frac{\cos\omega}{\omega}=0 \tag{6-77}$$

上面方程的解是

$$\omega_0=\frac{(2n+1)\pi}{2},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{6-78}$$

把式(6-78)代回到式(6-76)，得到

$$G(j\omega_0)=\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(\frac{2}{\pi}\right),\quad n=0,1,2,\cdots$$

$n=0$，对应于左半轴上第一个穿越点$-2/\pi$；$n=1$，对应于右半轴上第一个穿越点$2/3\pi$。我们可以从图 6-86 推断，在实轴上还有无数多个穿越点。最后，对于$\omega=\infty$，奈奎斯特曲线收敛于原点。注意，$\omega<0$时的奈奎斯特曲线是$\omega>0$时的奈奎斯特曲线关于实轴的镜像。

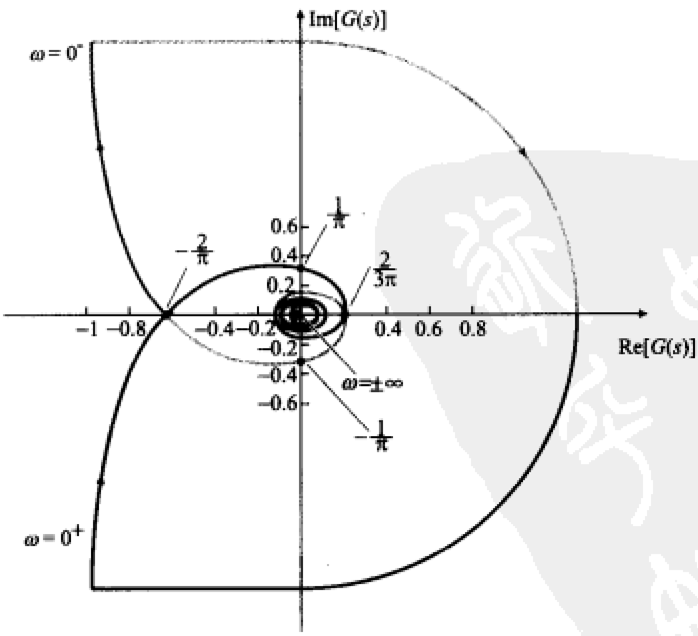


图 6-86 例 6.26 的奈奎斯特曲线图

系统在右半平面的极点数是零($P=0$)。为得到闭环稳定，我们需要$Z=N=0$。因此，奈奎斯特曲线不允许包围点$-1/K$。为此，只要满足：

$$-\frac{1}{K}<-\frac{2}{\pi} \tag{6-79}$$

这表明，为了保证系统的稳定性，我们必须有 $0<K<\pi/2$。

小结

- 频率响应的**伯德图（Bode plot）**是传递函数的图像，其中幅值用对数刻度表示，相位用线性刻度表示，而频率用对数刻度表示。对于一个传递函数 $G(s)$，其幅值和相位分别为：

$$A = |G(j\omega)| = |G(s)|_{s=j\omega}$$
$$= \sqrt{\{\mathrm{Re}[G(j\omega)]\}^2 + \{\mathrm{Im}[G(j\omega)]\}^2}$$
$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{\mathrm{Im}[G(j\omega)]}{\mathrm{Re}[G(j\omega)]}\right] = \angle G(j\omega)$$

- 对于一个传递函数的伯德形式，

$$KG(\omega) = K_0 \frac{(j\omega\tau_1+1)(j\omega\tau_2+1)\cdots}{(j\omega\tau_a+1)(j\omega\tau_b+1)\cdots}$$

  运用6.1.1节描述的规则，可以容易地手工画出伯德频率响应。
- 伯德图可借助于计算机算法（在MATLAB是bode）得到，但手工画图的技巧仍极其有用。
- 对于二阶系统，伯德图上幅值的最大值与阻尼系数的关系是：

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta},\ \omega = \omega_n$$

- **奈奎斯特稳定性判据（Nyquist stability criterion）**是根据系统的开环频率响应特性来判定闭环系统稳定性的方法。**奈奎斯特曲线（Nyquist plot）**的绘制规则已在6.3节描述。系统在右半平面上的闭环根的数目Z，可由下式给出：

$$Z=N+P$$

  其中，

  N＝奈奎斯特曲线顺时针包围点－1的次数，

  P＝在右半平面上开环极点的个数。
- 奈奎斯特曲线可借助于计算机算法得到（在MATLAB中是nyquist函数）。
- **增益裕度（gain margin，GM）**和**相位裕度（phase margin，PM）**，可通过查看开环伯德图或奈奎斯特曲线图直接确定。使用MATLAB的margin函数也可以直接得到它们的值。
- 对于一个标准的二阶系统，相位裕度PM与闭环阻尼 ζ 的关系由式（6-32）给出，即

$$\zeta \cong \frac{\mathrm{PM}}{100}$$

- **带宽（bandwidth）**衡量系统的响应速度的一个性能指标。在控制系统中，带宽定义为：在闭环系统的伯德幅值曲线上，幅值为0.707（－3db）的对应频率值即为带宽。它可由系统的穿越频率 ω_c 近似表示。穿越频率，是开环增益曲线穿过幅

值为 1(0db)的水平线时的对应频率。

- □ **向量裕度(vector margin)**是表征系统稳定裕度的单参数性能指标。它由奈奎斯特曲线上距离临界点 $-1/K$ 最近的点决定。
- □ 对于一个稳定的最小相位系统,伯德增益－相位关系方程描述了系统的相位与增益之间的唯一对应关系,可近似为式(6-33):

$$\angle G(j\omega) \cong n \times 90^\circ$$

其中,n 是 $|G(j\omega)|$ 的斜率,它表示每 10 倍频程上幅值变化多少个十倍量。这个关系表明,在大多数情况下,如果增益曲线以斜率－1 穿过幅值为 1 的水平线,那么系统的稳定性就能得到保证。

- □ 开环系统的实验的频率响应数据可以直接用来分析和设计闭环控制系统,而不需要系统的解析数学模型。

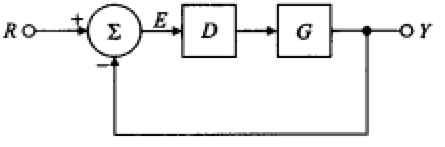


图 6-87 典型系统示意图

- □ 对于图 6-87 所示的系统,其开环传递函数的伯德图可由 GD 的频率响应得到,而闭环频率响应特性可从 $\mathcal{T}(s)=GD/(1+GD)$ 得到。
- □ 本章讨论了几种类型的补偿环节的频率响应特性,并给出了使用这些特性进行设计的例子。在 6.7 节给出了超前和滞后补偿器的设计过程。这些例子表明,使用频率响应的设计法,可以很方便地确定设计参数,得到设计结果。在 6.7.5 节结尾,我们对各种补偿环节进行了总结。
- □ **超前补偿环节(Lead compensation)**,传递函数由式(6-38)给出,

$$D(s)=\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}, \quad \alpha<1$$

可看作是一个高通滤波器,其控制规律近似于 PD 控制。无论什么时候,只要是提高系统的阻尼系数,都可以使用超前补偿。若系统的低频增益一定,则它会增大系统的响应速度。

- □ **滞后补偿环节(Lag compensation)**,传递函数由式(6-51)给出

$$D(s)=\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}, \quad \alpha>1 \tag{6-80}$$

可看作是一个低通滤波器,其控制规律近似于 PI 控制。通常用来增大低频增益,在带宽一定的情况下可改善系统的稳态响应。若系统的低频增益一定,则它会降低系统的响应速度。

- ▲□ **尼科尔斯曲线(Nichols plot)**是另一种表示频率响应的方法,它是增益对相位的关系曲线图,以频率为参变量。
- ▲□ 降低跟踪误差和减小干扰影响的性能指标,由伯德图上低频段的增益确定。抑制传感器噪声的性能指标,由伯德图上高频段的增益确定(具体参看图 6-72)。
- ▲□ 时滞环节可通过绘制粗略的伯德图或奈奎斯特曲线图来准确地分析。

复习题

1. 为什么伯德建议将频率响应的幅值绘制在对数－对数坐标上？
2. 如何定义分贝。
3. 如果传递函数的增益是 14 db，那么传递函数的幅值是多少？
4. 如何定义增益穿越。
5. 如何定义相位穿越。
6. 如何定义相位裕度(PM)。
7. 如何定义增益裕度(GM)。
8. 伯德图上什么特征最能体现闭环系统阶跃响应的超调量？
9. 伯德图上什么特征最能体现闭环系统阶跃响应的上升时间？
10. 在伯德图的性能度量上，超前补偿的主要作用是什么？
11. 在伯德图的性能度量上，滞后补偿的主要作用是什么？
12. 怎样从伯德图上找出 1 型系统的 K_v？
13. 为什么我们在从奈奎斯特图上确定系统稳定性的时候，要预先知道开环不稳定极点的数目？
14. 在控制设计中，我们查看 $D(j\omega)G(j\omega)$ 的包围点 $-1/K$ 的次数，而不是查看 $KD(j\omega)G(j\omega)$ 的包围点 -1 的次数，其优点是什么？
15. 定义一个条件稳定的反馈系统。怎样在伯德图上辨认它？

▲16. 要求某控制系统能跟随正弦波，它的频率范围是 $0\leqslant\omega_l\leqslant 450$ rad/s，且幅值是 5 个单位，要求(正弦的)稳态误差不超过 0.01。画出(或描述)对应的性能函数 $W_1(\omega)$ 。

习题

6.1 节习题：频率响应

6-1　(a)证明式(6-2)的 α_0（其中 $A=U_0$，$\omega_0=\omega$）满足下式：

$$\alpha_0=\left[G(s)\frac{U_0\omega}{s-j\omega}\right]\bigg|_{s=-j\omega}=-U_0G(-j\omega)\frac{1}{2j}$$

和

$$\alpha_0^*=\left[G(s)\frac{U_0\omega}{s+j\omega}\right]\bigg|_{s=+j\omega}=U_0G(j\omega)\frac{1}{2j}$$

(b) 假定系统的输出可以写成：

$$y(t)=\alpha_0 e^{-j\omega t}+\alpha_0^* e^{j\omega t}$$

试推导式(6-4)～式(6-6)具体的表达式。

6-2　(a)对 $\omega=1,2,5,10,20,50$ 和 100 rad/s，手工计算

$$G(s)=\frac{1}{s+10}$$

的幅值和相位。

(b) 根据伯德图的绘制规则，画 $G(s)$ 的渐近线，比较在(a)中计算的结果。

6-3 对下面的每一个开环传递函数，画出它们的伯德图的幅值和相位的渐近线。完成手工画图后，用 MATLAB 验证你的结果。用相同的刻度完成你的手工图和 MATLAB 结果。

(a) $L(s)=\dfrac{2000}{s(s+200)}$

(b) $L(s)=\dfrac{100}{s(0.1s+1)(0.5s+1)}$

(c) $L(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(0.02s+1)}$

(d) $L(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2(s^2+2s+4)}$

(e) $L(s)=\dfrac{10(s+4)}{s(s+1)(s^2+2s+5)}$

(f) $L(s)=\dfrac{1000(s+0.1)}{s(s+1)(s^2+8s+64)}$

(g) $L(s)=\dfrac{(s+5)(s+3)}{s(s+1)(s^2+s+4)}$

(h) $L(s)=\dfrac{4s(s+10)}{(s+100)(4s^2+5s+4)}$

(i) $L(s)=\dfrac{s}{(s+1)(s+10)(s^2+2s+2500)}$

6-4 *实数极点和零点*。对下面列出的每一个开环传递函数，画出它们的伯德图幅值和相位的渐近线。完成手工画图后，用 MATLAB 验证你的结果。用相同的刻度完成你的手工图和 MATLAB 结果。

(a) $L(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$

(b) $L(s)=\dfrac{(s+2)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$

(c) $L(s)=\dfrac{(s+2)(s+6)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$

(d) $L(s)=\dfrac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$

6-5 *复数极点和零点*。对下面列出的每一个开环传递函数，画出它们的伯德图幅值和相位的渐近线，根据阻尼比的值在二阶转折点近似画出过渡曲线。完成手工画图后，用 MATLAB 验证你的结果。用相同的刻度完成你的手工图和 MATLAB 结果。

(a) $L(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+10}$

(b) $L(s)=\dfrac{1}{s(s^2+3s+10)}$

(c) $L(s)=\dfrac{(s^2+2s+8)}{s(s^2+2s+10)}$

(d) $L(s)=\dfrac{(s^2+2s+12)}{s(s^2+2s+10)}$

(e) $L(s)=\dfrac{(s^2+1)}{s(s^2+4)}$

(f) $L(s)=\dfrac{(s^2+4)}{s(s^2+1)}$

6-6 *在原点处有多个极点。*对下面列出的每一个开环传递函数，画出它们的伯德图幅值和相位的渐近线。完成手工画图后，用 MATLAB 验证你的结果。用相同的刻度完成你的手工图和 MATLAB 结果。

(a) $L(s)=\dfrac{1}{s^2(s+8)}$

(b) $L(s)=\dfrac{1}{s^3(s+8)}$

(c) $L(s)=\dfrac{1}{s^4(s+8)}$

(d) $L(s)=\dfrac{(s+3)}{s^2(s+8)}$

(e) $L(s)=\dfrac{(s+3)}{s^3(s+4)}$

(f) $L(s)=\dfrac{(s+1)^2}{s^3(s+4)}$

(g) $L(s)=\dfrac{(s+1)^2}{s^3\ (s+10)^2}$

6-7 *混合的实数极点和复数极点。*对下面列出的每一个开环传递函数，画出它们的伯德图幅值和相位的渐近线。在每一个转折点大概估计过渡曲线，并调整渐近线。完成手工画图后，用 MATLAB 验证你的结果。用相同的刻度完成你的手工图和 MATLAB 结果。

(a) $L(s)=\dfrac{(s+2)}{s(s+10)(s^2+2s+2)}$

(b) $L(s)=\dfrac{(s+2)}{s^2(s+10)(s^2+6s+25)}$

(c) $L(s)=\dfrac{(s+2)^2}{s^2(s+10)(s^2+6s+25)}$

(d) $L(s)=\dfrac{(s+2)(s^2+4s+68)}{s^2(s+10)(s^2+4s+85)}$

(e) $L(s)=\dfrac{[(s+1)^2+1]}{s^2(s+2)(s+3)}$

6-8 *在右半平面有极点和零点。*对下面列出的每一个开环传递函数，画出它们的伯德图幅值和相位的渐近线。由复平面中$\angle L(s)$随 s 从 0 变化到$+\mathrm{j}\infty$的变化情况以确定相位渐近线是否正确处理右半平面的奇点。完成手工画图后，用 MATLAB 验证你的结果。用相同的刻度完成你的手工图和 MATLAB 结果。

(a) $L(s)=\dfrac{s+2}{s+10}\cdot\dfrac{1}{s^2-1}$；带超前补偿的磁悬浮模型

(b) $L(s)=\dfrac{s+2}{s(s+10)}\cdot\dfrac{1}{(s^2-1)}$；带积分控制和超前补偿的磁悬浮系统

(c) $L(s)=\dfrac{s-1}{s^2}$

(d) $L(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{s\ (s+20)^2(s^2-2s+2)}$

(e) $L(s)=\dfrac{(s+2)}{s(s-1)\ (s+6)^2}$

(f) $L(s)=\dfrac{1}{(s-1)[(s+2)^2+3]}$

6-9 某系统用伯德图的渐近线表示，如图 6-88 所示。试确定并绘制系统对单位阶跃输入的响应（假定初始条件为零）。

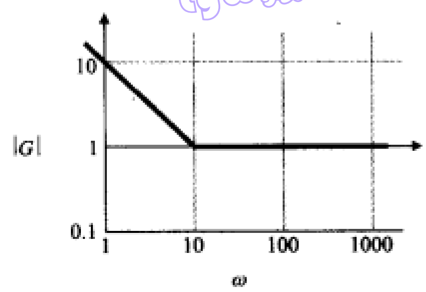


图 6-88 题 6-9 伯德图的幅值曲线

6-10 证明在伯德图上幅值曲线斜率为－1等价于－20 db/10倍频程或－6 db/倍程。

6-11 一个标称二阶系统的阻尼比是 $\zeta=0.5$，由下式给出一个额外的零点：

$$G(s)=\frac{s/a+1}{s^2+s+1}$$

使用 MATLAB 计算系统阶跃响应的 M_p 和频率响应的 M_r 。M_p 和 M_r 之间有关联吗？a 分别取值为 0.01，0.1，1，10 和 100。

6-12 一个标称二阶系统的阻尼比是 $\zeta=0.5$，由下式给出一个额外的极点：

$$G(s)=\frac{1}{[(s/p)+1](s^2+s+1)}$$

画出 $p=0.01,0.1,1,10,100$ 时的伯德图。对比没带额外极点的二阶系统，关于额外极点对带宽的影响你能得出什么结论？

6-13 对于闭环传递函数

$$T(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

推导下面的关于 ω_n 和 ζ 的 $T(s)$ 的带宽的表达式：

$$\omega_{BW}=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2+4\zeta^4-4\zeta^2}}$$

假定 $\omega_n=1$，画出 $0\leqslant\zeta\leqslant1$ 时的 ω_{BW} 。

6-14 考虑具有下面传递函数的系统：

$$G(s)=\frac{A_0\omega_0 s}{Qs^2+\omega_0 s+\omega_0^2 Q}$$

这是品质因数为 Q 的调谐电路的模型。

(a) 用解析法计算传递函数的幅值和相位，画出 $Q=0.5$、1、2 和 5 时其作为标称频率 ω/ω_0 的函数曲线。

(b) 定义带宽为在 ω_0 两边幅值降低 3db 的对应频率之间的距离，证明带宽可以由下式给出：

$$\mathrm{BW}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)$$

(c) Q 和 ζ 之间有什么关系？

6-15 图 6-89 是一个 DC 电压表器的示意图。受阻尼影响，指针对阶跃输入的最大超调量是 10%。

(a) 系统的无阻尼固有频率是多少？

(b) 系统的阻尼固有频率是多少？

(c) 使用 MATLAB 画出频率响应曲线，确定什么样的输入频率能产生最大幅值的输出呢？

(d) 假定这个电表现在用来测量频率为 2 rad/s 的 1 V AC 输入。

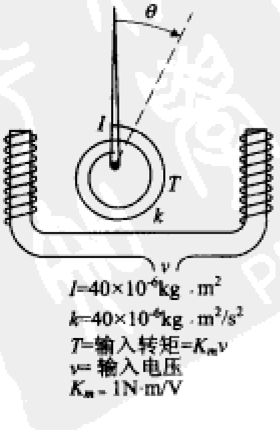


图 6-89 电压表的示意图

在初始的瞬态响应消失后，电表指示的幅度是多少？相对输入，输出的相位滞后是多少？使用 MATLAB 的 lsim 命令验证你的(d)部分的答案。

6.2 节习题：临界稳定

6-16　要保持下列系统稳定，试确定 K 的取值范围。先画出 $K=1$ 的幅值曲线，然后想像着上下移动幅值曲线直到系统不稳定，从而确定使得系统稳定的 K 的取值范围。最后可通过画一个非常简略的系统根轨迹草图来验证你的答案。

(a) $KG(s)=\dfrac{K(s+2)}{s+20}$

(b) $KG(s)=\dfrac{K}{(s+10)(s+1)^2}$

(c) $KG(s)=\dfrac{K(s+10)(s+1)}{(s+100)(s+5)^3}$

6-17　要保持下列系统稳定，试确定 K 的取值范围。先画出 $K=1$ 的幅值曲线，然后想像着上下移动幅值曲线直到系统不稳定，从而确定使得系统稳定的 K 的取值范围。最后可通过画一个非常简略的系统根轨迹草图来验证你的答案。

(a) $KG(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(s+5)}$

(b) $KG(s)=\dfrac{K(s+1)}{s^2(s+10)}$

(c) $KG(s)=\dfrac{K}{(s+2)(s^2+9)}$

(d) $KG(s)=\dfrac{K(s+1)^2}{s^3(s+10)}$

6.3 节习题：奈奎斯特稳定性判据

6-18　(a)画出传递函数为 $1/s^2$ 的开环系统的奈奎斯特曲线；也就是画

$$\left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=C_1}$$

其中，C_1 是包含整个右半平面的闭合曲线，如图 6-17 所示。（提示：假定 C_1 以很小的半径包围极点 $s=0$，如图 6-27 所示。）

(b)对传递函数为 $G(s)=1/(s^2+\omega_0^2)$ 的开环系统，重做(a)部分。

6-19　根据下面的各系统的伯德图，画出它们的奈奎斯特曲线，将你的结果与用 MATLAB 的 nyquist 命令得到的结果进行比较。

(a) $KG(s)=\dfrac{K(s+2)}{s+10}$

(b) $KG(s)=\dfrac{K}{(s+10)(s+2)^2}$

(c) $KG(s)=\dfrac{K(s+10)(s+1)}{(s+100)(s+2)^3}$

(d) 对每一个系统，在你画的曲线图上确定使得系统稳定的 K 的取值范围，然后通过使用一个简略的系统根轨迹图来定性验证你的结果。

6-20　画出下面传递函数的奈奎斯特曲线：

$$KG(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+3)} \tag{6-81}$$

选择闭合曲线在虚轴奇点的右边绕过。接着，使用奈奎斯特判据确定使系统稳定的 K 的取值范围。然后重画奈奎斯特曲线，这一次选择闭合曲线在虚轴奇点的左边绕过。再一次使用奈奎斯特判据确定使系统稳定的 K 的取值范围。这两个答案相同吗？它们应该是这样吗？

6-21 画出图 6-90 系统的奈奎斯特曲线。使用奈奎斯特稳定性判据，确定使系统稳定的 K 的取值范围。K 取正值和负值的情况，都要考虑。

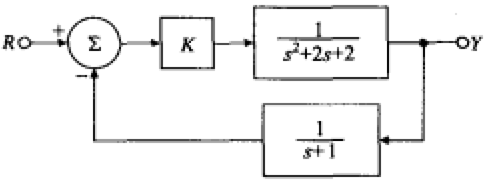


图 6-90 题 6-21 的控制系统

6-22 (a)对 $\omega=0.1\sim100$ rad/s，画出最小相位系统

$$G(s)=\left.\frac{s+1}{s+10}\right|_{s=j\omega}$$

和非最小相位系统

$$G(s)=-\left.\frac{s-1}{s+10}\right|_{s=j\omega}$$

的相位曲线。注意 $\angle(j\omega-1)$ 随 ω 增大而减小，而不是增大。

(b) 一个分别在右半平面的零点影响式(6-28)的极坐标图上 -1 包围次数和不稳定闭环根的数目两者之间的关系吗？

(c) 画出下面不稳定系统的 $\omega=0.1\sim100$ rad/s 的相位曲线：

$$G(s)=\left.\frac{s+1}{s-10}\right|_{s=j\omega}$$

(d) 使用关于 $KG(s)$ 的奈奎斯特判据，来检查(a)和(c)中系统的稳定性。确定使闭环系统稳定的 K 的取值范围，然后使用简略的根轨迹图来定性地检验你的结果。

6.4 节习题：稳定裕度

6-23 一些实际控制系统的奈奎斯特曲线都很相似，如图 6-91 所示。对于图6-91的系统，给定 $\alpha=0.4$，$\beta=1.3$ 和 $\phi=40°$时，系统的增益裕度和相位裕度是多少。如果增益从零变化到一个非常大的值，描述系统的稳定性发生什么样的变化。画出该系统对应的根轨迹图会是什么样的呢。也画出系统对应的伯德图会是什么样的呢。

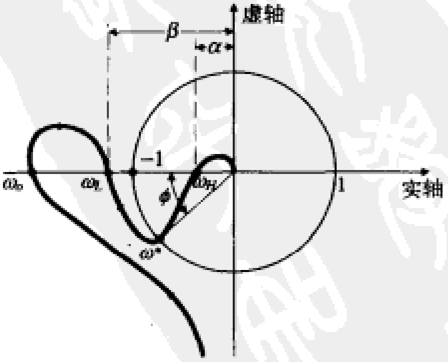


图 6-91 题 6-23 的奈奎斯特曲线图

6-24 下面传递函数的伯德图如图 6-92 所示：

$$G(s)=\frac{100[(s/10)+1]}{s[(s/1)-1][(s/100)+1]}$$

(a) 为什么相位在低频段以 270°开始？

(b) 画出 $G(s)$ 的奈奎斯特曲线。

(c) 图 6-92 所示的闭环系统稳定吗？

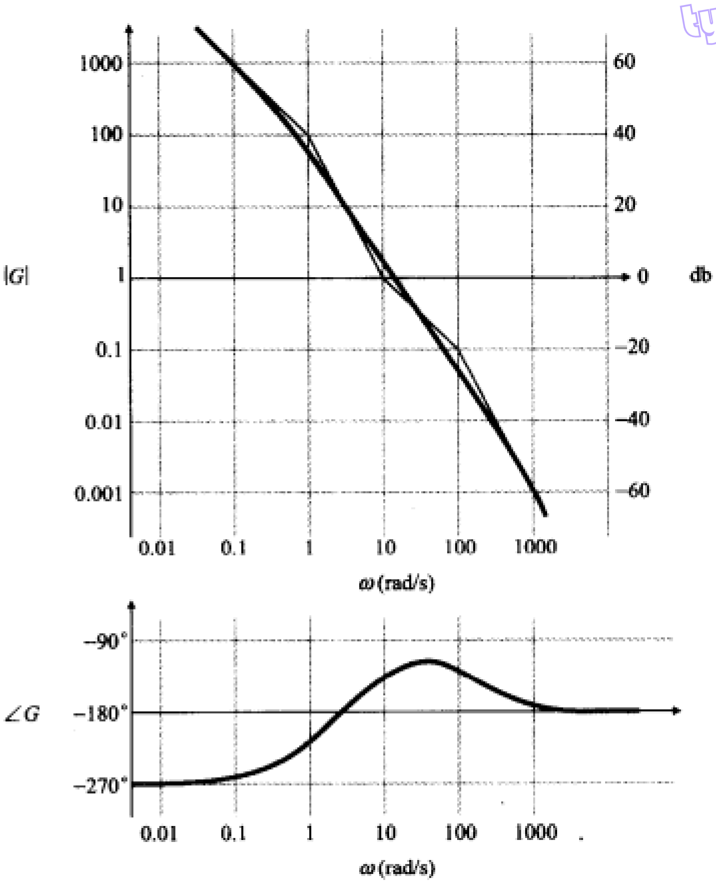


图 6-92 题 6-24 的伯德图

(d) 如果增益降低到原来的 1/100，系统会变稳定吗？画出系统简略的根轨迹图，定性地证明你的答案。

6-25 假设在图 6-93 中的传递函数：

$$G(s)=\frac{25(s+1)}{s(s+2)(s^2+2s+16)}$$

使用 MATLAB 的 margin 命令计算 $G(s)$ 的 PM 和 GM，根据伯德图指出哪一个裕度对控制设计者提供了更有用的系统信息。

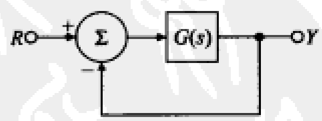


图 6-93 题 6-25 的控制系统

6-26 考虑由图 6-94 给定的系统。

(a) 使用 MATLAB 画出 $K=1$ 时的伯德图，然后根据伯德图估计使得系统稳定的 K 的取值范围。

(b) 对选定的 K，使用 margin 命令算出相位裕度 PM，以验证 K 的稳定范围。

(c) 使用 rlocus 和 rlocfind 命令找出系统临界稳定的 K 值。

(d) 画出系统的奈奎斯特曲线图，并利用该图来检验因 K 得取值而使系统不稳定时，不稳定的特征根的个数。

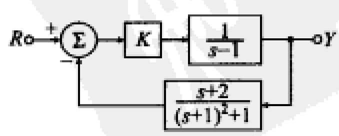


图 6-94 题 6-26 的控制系统

(e) 使用劳斯判据，计算该系统的闭环稳定的 K 的取值范围。

6-27 假设在图 6-93 中的 $G(s)$，有如下的形式，

$$G(s)=\frac{3.2(s+1)}{s(s+2)(s^2+0.2s+16)}$$

使用 MATLAB 的 margin 命令计算 $G(s)$ 的 PM 和 GM，然后评论该系统是否适合阻尼的闭环根。

6-28 对给定的系统，Zeigler-Nichols 方法中的极限周期 P_u 和对应的极限增益 K_u，如何由下列图示法确定：

(a) 奈奎斯特图；(b) 伯德图；(c) 根轨迹图。

6-29 某单位反馈系统，其开环传递函数

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

那么，其闭环传递函数由下式给出：

$$T(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

对 $\zeta=0.1$，0.4 和 0.7，验证图 6-36 所示的 PM 值。

6-30 考虑一个单位反馈系统，它的开环传递函数如下：

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)[(s^2/25)+0.4(s/5)+1]}$$

(a) 使用 MATLAB 画 $G(j\omega)$ 的伯德图，假定 $K=1$。

(b) 对于 45°的 PM，要求增益是多少？这个 K 值对应的 GM 是多少？

(c) 当 K 满足 PM=45°时，K_v 是多少？

(d) 画出一个参数为 K 的根轨迹图，试指出当 PM 为 45°时对应的闭环极点的根。

6-31 对于图 6-95a 所示的系统，它的传递函数框图由下面的式子定义：

$$G(s)=\frac{1}{(s+2)^2(s+4)}, \quad 和 \quad H(s)=\frac{1}{s+1}.$$

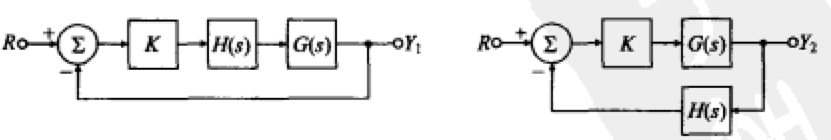
(a) 使用 rlocus 和 rlocfind 命令，计算系统临界稳定的 K 值。

(b) 使用 rlocus 和 rlocfind 命令，计算 K 值，使闭环极点的阻尼系数是 $\zeta=0.707$。

(c) 如果增益是(b)部分计算的值，那么系统的增益裕度是多少？不使用频率响应方法回答这个问题。

(d) 画出系统的伯德图，计算相位裕度 PM=65°时对应的增益裕度。对于这个 PM，你估计系统的阻尼比是多少？

(e) 画出图 6-95b 所示系统的根轨迹图。它与(a)部分的系统有何区别？



(a) 单位反馈 (b) $H(s)$在反馈中

图 6-95 题 6-31 的框图

(f) 对于图 6-95(a)和(b)的两个系统，传递函数 $Y_2(s)/R(s)$ 和 $Y_1(s)/R(s)$ 有什么区别？这两种情况对 $r(t)$ 的阶跃响应会不同吗？

6-32 对图 6-96 所示系统，使用伯德图和根轨迹图，计算不稳定刚发生时的增益和频率。增

益是多少(可能多个)时，对应的 PM 为 20°？当 PM=20°时增益裕度是多少？

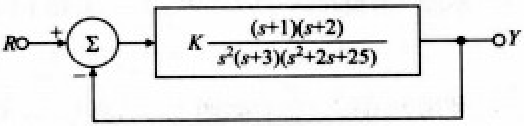


图 6-96　题 6-32 的控制系统

6-33　一个磁带驱动速度控制系统如图 6-97所示。由于速度传感器的时间常数大，所以其动态特性不应忽略。速度测量的时间常数是 $\tau_m=0.5$ s；卷筒的时间常数是 $\tau_r=J/b=4$ s，其中，b=输出轴阻尼常数=1 N·m·s；电动机的时间常数=1 s。

(a) 计算增益 K，是系统跟踪参考输入的稳态误差小于 7%。

(b) 计算系统的增益裕度和相位裕度。这是一个良好的系统设计吗？

6-34　对图 6-98 的系统，画出它的奈奎斯特曲线，并且应用奈奎斯特判据完成下列问题。

(a) 计算使得系统稳定的 K 值(正的或负的)；

(b) 对使系统不稳定的 K 值，计算在右半平面的根的个数。用一个简略的根轨迹图检查你的答案。

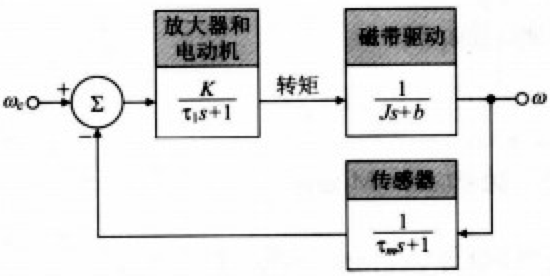


图 6-97　磁带驱动速度控制系统

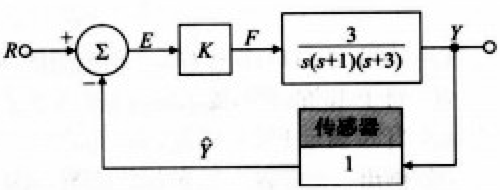


图 6-98　题 6-34，6-61，6-62 的控制系统

6-35　对图 6-99 的系统，画出它的奈奎斯特曲线，并且应用奈奎斯特判据完成下列问题。

(a) 计算使系统稳定的 K 值(正的或负的)，

(b) 对使系统不稳定的 K 值，计算在右半平面的根的个数。用一个简略的根轨迹图检查你的答案。

6-36　对图 6-100 的系统，画出它的奈奎斯特曲线，并且应用奈奎斯特判据完成下列问题。

(a) 计算使系统稳定的 K 值(正的或负的)，

(b) 对使系统不稳定的 K 值，计算在右半平面的根的个数。用一个简略的根轨迹图检查你的答案。

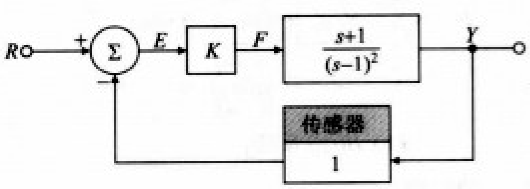


图 6-99　题 6-35 的控制系统

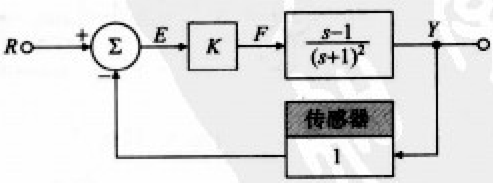


图 6-100　题 6-36 的控制系统

6-37　图 6-101 画出了两个稳定的开环系统的奈奎斯特图。图中 K_0 是系统开环增益，箭头表示频率增加的方向。请对两个闭环系统(单位反馈)的下列指标做出估计：

(a) 相位裕度；
(b) 阻尼比；
(c) 系统稳定时的增益取值范围；
(d) 系统类型(0,1 或 2)。

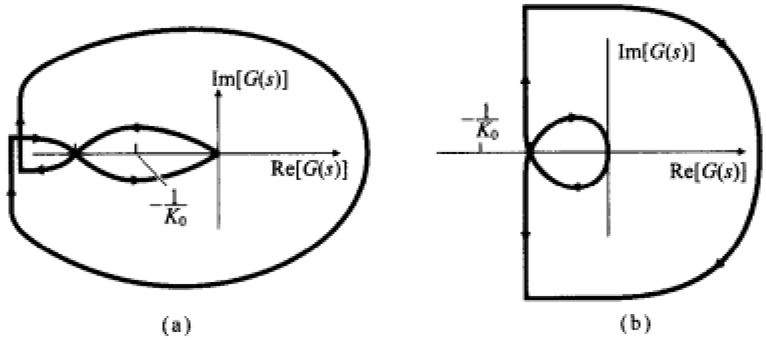


图 6-101　图 6-37 的奈奎斯特曲线图

6-38　某轮船驾驶系统的动力学模型可表示为下面的传递函数：

$$\frac{V(s)}{\delta_r(s)}=G(s)=\frac{K[-(s/0.142)+1]}{s(s/0.325+1)(s/0.0362+1)}$$

其中，v 是轮船的侧向速度，单位是米/秒；δ_r 是方向舵偏角，单位是弧度。

(a) 使用 MATLAB 命令 bode 画 $K=0.2$ 时 $G(j\omega)$ 的对数幅值曲线和相位曲线。
(b) 在你的图上，标出穿越频率、PM 和 GM。
(c) 当 $K=0.2$ 时，轮船的驾驶系统稳定吗？
(d) 多大的 K 值会产生 30°的 PM，这时的穿越频率是多少？

6-39　对开环系统

$$KG(s)=\frac{K(s+1)}{s^2(s+10)^2}$$

计算在系统临界稳定的 K 值，以及相位裕度 PM=30°时对应的 K 值。

6.5 节习题：伯德增益—相位关系

6-40　图 6-102 是一个带单位反馈结构的受控对象的频率响应曲线。假设系统是开环稳定的最小相位系统。

(a) 图中所示系统的静态速度常数 K_v 是多少？
(b) 在复极点 $\omega=100$ 处的阻尼比是多少？
(c) 系统对 $\omega=3$ rad/s 的正弦输入的跟踪(跟随)误差大约是多少？
(d) 图中所示系统的 PM 是多少？(估计到±10°以内)

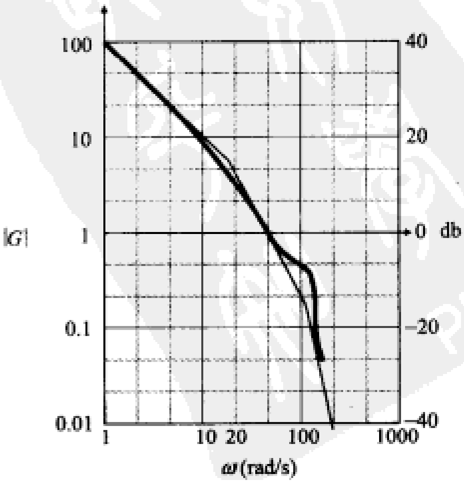


图 6-102　题 6-40 的频率响应的幅值曲线

6-41　某系统的传递函数为：

$$G(s)=\frac{100(s/a+1)}{s(s+1)(s/b+1)}$$

其中，$b=10a$，通过绘制不同 a 取值下的幅值曲线，大致确定 a 的取值，使系统具有最理想的相位裕度 PM。

6.6 节习题：闭环频率响应

6-42　对开环系统

$$KG(s)=\frac{K(s+1)}{s^2(s+10)^2}$$

计算 K 值，使得系统的相位裕度 PM≥30°，并且具有尽可能大的闭环带宽。可使用 MATLAB 来求取带宽。

6.7 节习题：补偿环节

6-43　对超前补偿器

$$D(s)=\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

这里，$\alpha<1$。

(a) 证明超前补偿的相位由下式给出：

$$\phi=\tan^{-1}(T\omega)-\tan^{-1}(\alpha T\omega)$$

(b) 证明最大相位对应的频率为：

$$\omega_{max}=\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

并且最大相位满足下面的等式：

$$\sin\phi_{max}=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

(c) 重写 ω_{max} 的表达式，证明最大相位频率发生在两个拐点频率的几何平均值上，用对数表示为：

$$\log\omega_{max}=\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{T}+\log\frac{1}{\alpha T}\right)$$

(d) 为了根据极点—零点位置推导出相同的结果，重写 $D(s)$ 为：

$$D(s)=\frac{s+z}{s+p}$$

然后证明相位满足下式：

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{|z|}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{|p|}\right)$$

从而有

$$\omega_{max}=\sqrt{|z||p|}$$

因此，最大相位频率是极点和零点乘积的平方根。

6-44　对于一个三阶伺服系统

$$G(s)=\frac{50\,000}{s(s+10)(s+50)}$$

使用伯德图设计一个超前补偿器使得 PM≥50°和 ω_{BW}≥20 rad/s。然后使用 MATLAB 验证和修改你的设计。

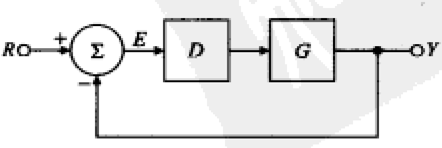


图 6-103　题 6-45 的控制系统

6-45　如图 6-103 所示系统，假定

$$G(s)=\frac{5}{s(s+1)(s/5+1)}$$

使用伯德图设计一个单位 DC 增益的超前补偿 $D(s)$ 使得 PM≥40°。然后使用 MATLAB 验证和修改你的设计。系统的带宽大约是多少?

6-46 对于图 6-68 所示系统,从 T_d 到 θ 推导其传递函数。然后应用终值定理(假定 T_d = 常数)确定对下面两种情况 $\theta(\infty)$ 是否不为零:

(a) 当 $D(s)$ 没有积分项时:$\lim_{s\to 0}D(s)=$ 常数

(b) 当 $D(s)$ 有一个积分项时:

$$D(s)=\frac{D'(s)}{s}$$

在这种情况下,$\lim_{s\to 0}D'(s)=$ 常数。

6-47 式(2-91)给出了倒立摆的传递函数,它可近似为下式:

$$G(s)=\frac{1}{s^2-1}$$

(a) 使用伯德图设计一个超前补偿器以得到 30°的 PM。然后使用 MATLAB 验证和修改你的设计。

(b) 画出系统的根轨迹图,并根据系统的伯德图做简单的验证。

(c) 你能用实验的方法确定系统的频率响应吗?

6-48 一个单位反馈系统的开环传递函数如下:

$$G(s)=\frac{K}{s(s/5+1)(s/50+1)}$$

(a) 使用伯德图为 $G(s)$ 设计一个滞后补偿器,使得闭环系统满足以下性能要求:

i. 对单位斜坡参考输入的稳态误差小于 0.01。

ii. PM≥40°。

(b) 使用 MATLAB 验证和修改你的设计。

6-49 一个单位反馈系统的开环传递函数如下:

$$G(s)=\frac{K}{s(s/5+1)(s/200+1)}$$

(a) 使用伯德图为 $G(s)$ 设计一个超前补偿器,使得闭环系统满足以下性能要求:

i. 对单位斜坡参考输入的稳态误差小于 0.01。

ii. 对于闭环主导极点,阻尼比 $\zeta\geqslant 0.4$。

(b) 使用 MATLAB 验证和修改你的设计,包括直接算出主导闭环极点的阻尼系数。

6-50 一个可忽略电枢电容的 DC 电动机,被应用在一个位置控制系统中。它的开环传递函数如下:

$$G(s)=\frac{50}{s(s/5+1)}$$

(a) 使用伯德图为电动机设计一个补偿器,使得闭环系统满足以下性能要求:

i. 对单位斜坡输入的稳态误差小于 1/200。

ii. 单位阶跃响应的超调量小于 20%。

iii. 带补偿系统的带宽不得小于未带补偿系统的带宽。

(b) 使用 MATLAB 验证和修改你的设计,包括直接算出阶跃响应的超调量。

6-51　一个单位反馈系统的开环传递函数如下：

$$G(s)=\frac{K}{s(1+s/5)(1+s/20)}$$

(a) 画出系统的框图，包括参考输入和传感器噪声。

(b) 使用伯德图为 $G(s)$ 设计一个补偿器，使得闭环系统满足以下性能要求：

i. 对单位斜坡输入的稳态误差小于 0.01。

ii. PM≥45°

iii. 对频率 $\omega<0.2$ rad/s 的正弦输入，稳态误差小于 1/250。

iv. 对于频率大于 200 rad/s 的噪声信号，输出至少要衰减到 1/100。

(c) 使用 MATLAB 验证和/或修改你的设计，包括计算出闭环频率响应来验证设计是否满足(iv)。

6-52　考虑一个 1 型单位反馈系统，它的传递函数如下：

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

使用伯德图设计一个超前补偿器，使得 $K_v=20\text{s}^{-1}$ 和 PM>40°。使用 MATLAB 验证和/或修改你的设计以满足性能要求。

6-53　考虑一个卫星姿态控制系统，它的传递函数是：

$$G(s)=\frac{0.05(s+25)}{s^2(s^2+0.1s+4)}$$

使用超前补偿调幅稳定系统使得 GM≥2(6 db)，和 PM≥45°，并在使用单一超前补偿环节得前提下，保证系统有可能高的带宽。

6-54　某喷气式运输机的自动驾驶仪，有一种操纵模式是高度控制。为达到设计自动驾驶仪回路的目标，只考虑长周期的动态特性是重要的。对于长周期动态特性，高度和升降舵偏转角的线性化关系为：

$$G(s)=\frac{h(s)}{\delta(s)}=\frac{20(s+0.01)}{s(s^2+0.01s+0.0025)}\ \frac{\text{ft/s}}{\text{deg}}$$

自动驾驶仪从高度测量仪接收到正比于飞机高度的电信号。将这个信号与输入信号（正比于驾驶仪选定的高度）进行比较，两者的差异给出一个误差信号。误差信号经过补偿环节处理后，用来控制升降舵的偏转角。图 6-104 画出了这个系统的框图。给你的任务就是设计补偿部分 $D(s)$。首先考虑采用比例控制规律 $D(s)=K$。

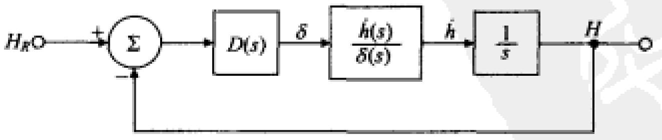


图 6-104　题 6-54 的控制系统

(a) 使用 MATLAB 画出 $D(s)=K=1$ 时的开环系统的伯德图。

(b) 要提供 0.16 rad/s 的穿越频率（就是 $|G|=1$ 的地方），K 值是多少？

(c) 对于这个 K 值，如果回路是闭合的，那么系统会稳定吗？

(d) 这个 K 值对应的 PM 是多少？

(e) 画出系统的奈奎斯特曲线，仔细标出相位角是 180°和幅值是 1 的点。

(f) 使用 MATLAB 画出参数为 K 的根轨迹图，标出你在(b)得到的 K 值。

(g) 如果输入指令高度是1000ft，那么系统阶跃响应的稳态误差是多少？对于(h)和(i)，假定补偿器有以下形式：

$$D(s)=K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

(h) 选择参数 K、T 和 α 使穿越频率是 0.16 rad/s 并且 PM 大于 50°。将 $D(s)G(s)/K$ 的伯德图叠加在你在(a)得到的伯德图上，来验证和修改你的设计，并且直接测出 PM。

(i) 使用 MATLAB 画出包括你在(h)中所设计的补偿器在内的，参数为 K 的系统的根轨迹图。在图中标出你从(h)得到的 K 值的根。

(j) 高度驾驶仪还有一种操纵模式，那就是对飞机的爬升速度也可由飞行员直接控制。

i. 画出在这种模式下的框图。

ii. 确定有关的 $G(s)$。

iii. 设计 $G(s)$，使系统有与高度控制模式相同的穿越频率，并且 PM 大于 50°。

6-55 对一个传递函数为下式的系统：

$$G(s)=\frac{10}{s[(s/1.4)+1][(s/3)+1]}$$

设计一个单位 DC 增益的滞后补偿器使得 PM≥40°。系统的带宽大约是多少？

6-56 对于题 6-38 的轮船操纵系统，

(a) 设计一个补偿器以满足下面的性能要求：

i. 速度常数 $K_v=2$。

ii. PM≥50°。

iii. 无条件稳定(对所有的 $\omega\leqslant$ 穿越频率 ω_c，PM>0)。

(b) 对于你的最后设计，画出参数为 K 的根轨迹图，标出闭环极点的位置。

6-57 考虑一个单位反馈系统，它的传递函数如下：

$$G(s)=\frac{1}{s\left(\frac{s}{20}+1\right)\left(\frac{s^2}{100^2}+0.5\frac{s}{100}+1\right)} \tag{6-82}$$

(a) 引进的超前补偿器是 $\alpha=1/5$ 并且一个零点在 $1/T=20$。必须怎样改变增益才能得到穿越频率是 $\omega_c=31.6$ rad/s，此时的静态速度误差系统 K_v 是多少？

(b) 保留超前补偿器，再增加一个滞后补偿器，为使 K_v 等于 100，那么要求多大的 K 值呢？

(c) 把滞后补偿器的极点配置在 3.16 rad/s，试确定其零点的位置，使系统的穿越频率保持在 $\omega_c=31.6$ rad/s 处。在同一张图上画出系统补偿后的频率响应曲线。

(d) 确定补偿后系统的相位裕度 PM。

6-58 Golden Nugget 航空公司因在飞机尾部设有免费的吧台，而获得了巨大的成功。(参看题 5-41)。为满足客源需要，该公司又买进了更大的飞机。但是，他们很快发现，飞机处于大气强对流时，飞机尾部会有令人不愉快的偏航运动，乘客酒杯中的酒会因此而洒出来。如果设 r 为飞机的偏航速度，δ_r 是方向舵的偏角，那么有近似的传递函数(见 10.3.1 节)：

$$\frac{r(s)}{\delta_r(s)}=\frac{8.75(4s^2+0.4s+1)}{(s/0.01+1)(s^2+0.24s+1)}$$

技术人员通过对机身结果的有限元分析发现，为正确反映来自方向舵何气流的激励作用对机身横向偏转的影响，上述传递函数需要再增加一项，改进后的传递函数是：

$$\frac{r(s)}{\delta_r(s)}=\frac{8.75(4s^2+0.4s+1)}{(s/0.01+1)(s^2+0.24s+1)}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_b^2}+2\zeta\frac{s}{\omega_b}+1\right)}$$

其中，ω_b 是横向偏转的频率（=10 rad/s），ζ 是横向偏转的阻尼比（=0.02）。大部分飞机都有一个"偏航阻尼器"，即本质上采用简单的比例控制规律，把由速度陀螺仪测得的偏航速度反馈给方向舵。对于 Golden Nugget 航空公司的新飞机也采用同样的反馈控制，比例反馈增益 $K=1$，其中，

$$\delta_r(s) = -Kr(s) \tag{6-83}$$

(a) 画出开环系统的伯德图，对标称设计确定系统的 PM 和 GM，画出闭环系统的阶跃响应和伯德图幅值。请确定导致麻烦的系统振荡的频率。

(b) 为消除振荡，下面列出了 4 种纠正措施，请比较各方案的优劣：

i. 将飞机横向偏转的阻尼系数从 $\zeta=0.02$ 增加到 $\zeta=0.04$（会要求在机身结构上增加吸能材料）。

ii. 将飞机横向偏转的频率 ω_b 从 10 rad/s 增大到 $\omega_b=20$ rad/s（会要求更坚固更重的结构元件。）

iii. 在反馈回路中，增加一个低通滤波器，即用 $KD(s)$ 代替式(6-83)中的 K，其中，

$$D(s) = \frac{1}{s/\tau_p + 1} \tag{6-84}$$

选取 τ_p，消除横向偏转中有害的特征，同时保证 PM≥60°。

iv. 增加一个在 5.5.3 节描述的陷波滤波器。将滤波器零点的频率选为 ω_b，阻尼系数选为 $\zeta=0.04$。同时，选取滤波器的分母极点为 $(s/100+1)^2$，保持滤波器的 DC 增益等于 1。

(c) 将飞机横向偏转的频率减少 10%，考查上述两种补偿设计（iii 和 iv）的灵敏度。具体来说，将两种设计的 GM、PM、横向偏转的闭环阻尼系统和谐振峰值列表对比，并定性地描述两种设计的阶跃响应有何差异？

(d) 请给 Golden Nugget 航空公司一些建议，使乘客酒杯中的酒不再洒出来（当然，让乘客老老实实地坐在自己的位置上不是本问题期望的答案，请从改善飞机"偏航阻尼器"的角度出发，给出你的建议）。

▲6.8 节习题：频率特性的其他图示法

6-59 某反馈控制系统如图 6-105 所示。要求闭环系统的阶跃响应超调量小于 30%。

(a) 为满足要求，相位裕度 PM 和闭环谐振峰值 M_r 应满足怎样的条件（参看图 6-37）？

(b) 根据系统的伯德图，确定满足相位裕度 PM 要求的 K 的最大值。

(c) 把伯德图[通过在(b)中得到的 K 来调整]的数据画在图 6-73 的奈奎斯特图上，试确定谐振幅值 M_r，并与在(a)得到的近似值相比较。

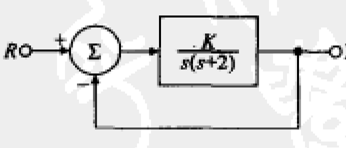


图 6-105 题 6-59 的控制系统

(d) 使用尼科尔斯图，确定谐振频率 ω_r 和闭环带宽。

6-60 图 6-106 是两个系统的尼科尔斯图，一个系统是未加补偿环节的，另一个是加入了补偿环节的。

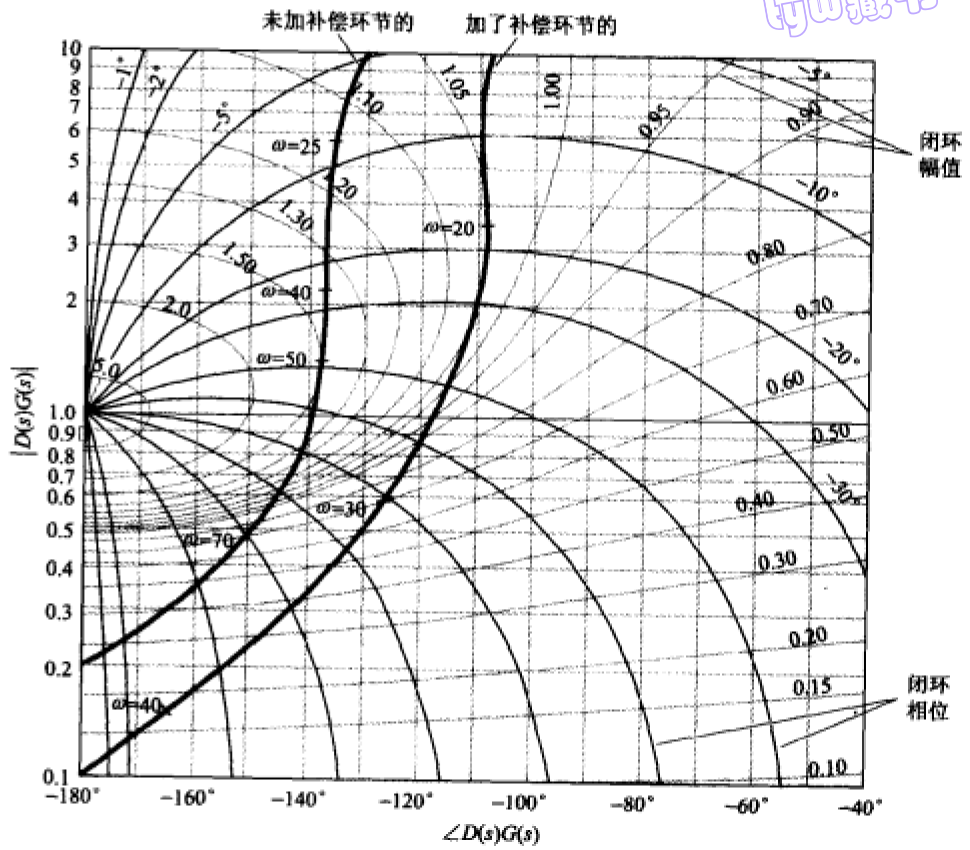


图 6-106 题 6-60 的尼科尔斯图

(a) 确定两个系统各自的谐振峰值是多少？

(b) 确定两个系统各自的 PM 和 GM 分别是多少？

(c) 确定两个系统各自的带宽的多少？

(d) 加入补偿环节的系统，采用了什么类型的补偿环节？

6-61 考虑如图 6-78 所示的系统。

(a) 构造 $[Y(j\omega)/E(j\omega)]^{-1}$ 的逆奈奎斯特曲线图。

(b) 如何从逆奈奎斯特曲线上直接确定系统临界稳定的 K 值？

(c) 对于 $K=4,2$ 和 1，确定对应的增益裕度和相位裕度。

(d) 构造系统的根轨迹图，注意两幅图上的对应点。对于(c)中确定的 GM 和 PM，对应的阻尼比 ζ 是多少？

6-62 一个不稳定受控系统传递函数如下：

$$\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{s+1}{(s-1)^2}$$

为它加上简单的控制回路，组成闭环系统，使其框图如图 6-98 所示那样。

(a) 绘制 Y/F 的逆奈奎斯特曲线。

(b) 选取 K 值，使得系统提供 45°的 PM。对应的 GM 是多少？

(c) 当 $K<0$ 时，关于系统的稳定性，从系统的逆奈奎斯特曲线上你可以得出什么结论？

(d) 绘制系统的根轨迹图，注意两幅图上的对应点。在这种情况下，当 PM=45°时，对应的 ζ 值是多少？

6-63 考虑如图 6-107a 所示的系统

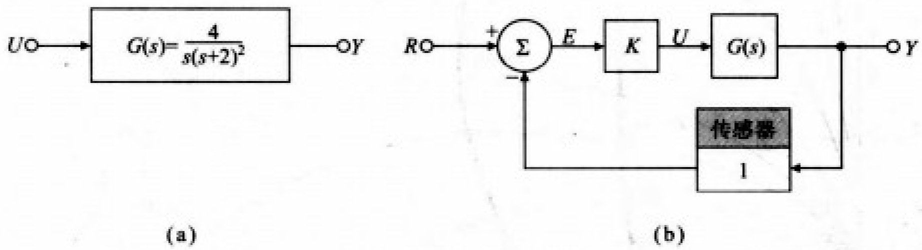


图 6-107 题 6-63 的控制系统

(a) 绘制系统的伯德图。

(b) 根据伯德图，绘制系统的逆奈奎斯特曲线图。

(c) 加入控制回路，使系统闭合，如图 6-107b 所示。使用逆奈奎斯特曲线作为指导，当 $K=0.7, 1.0, 1.4$ 和 2 时，从伯德图上读出 GM 和 PM 的值。为满足 PM=30°，K 应该取何值？

(d) 绘制系统的根轨迹图，在图上标出根轨迹上相同的 K 值对应的点。确定(c)中每一对 PM/GM 值所对应的 ζ 值是多少？比较 ζ 和 PM 之间是否符合图 6-36 所示的近似关系？

▲6.9 节习题：根据灵敏度函数定义的性能指标

6-64 考虑一个系统，它的开环传递函数(回路增益)如下：

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)(s/10+1)}$$

(a) 画出系统的伯德图，求出 GM 和 PM。

(b) 计算灵敏度函数，并且画出它的幅值频率响应。

(c) 计算向量裕度(VM)。

6-65 证明灵敏度函数 $S(s)$ 的幅值在以实轴上点 −1 为圆心，半径为 1 的圆内大于 1。如果闭环控制对所有的频率都比开环控制有更好的效果，那么上述的结论对于系统的奈奎斯特曲线图的形状意味着什么？

6-66 考虑如图 6-103 所示的系统，假设传递函数是：

$$G(s)=\frac{10}{s(s/10+1)}$$

(a) 设计一个补偿器，使系统满足下面的设计要求：

i. $K_v=100$

ii. PM≥45°

iii. 对频率小于 1 rad/s 的正弦输入信号，系统都能以小于 2%的误差跟踪再现。

iv. 能够将频率大于 100 rad/s 的正弦输入信号，在输出时衰减到初值的 5%以下。

(b) 画出 $G(s)$ 的伯德图，选择开环增益，使得 $K_v=100$。

(c) 证明对正弦输入满足指标要求的充分条件是：系统的幅值曲线位于图 6-108 的阴影区域

的外面。首先回忆以下：

$$\frac{Y}{R}=\frac{KG}{1+KG}\text{ 和 }\frac{E}{R}=\frac{1}{1+KG}$$

(d) 解释为什么单独引入一个超前网络不能满足设计指标？

(e) 解释为什么单独加入一个滞后网络不能满足设计指标？

(f) 为设计完整，使用超前—滞后补偿器，以满足所有的设计要求，不要改变前面选择的低频开环增益。

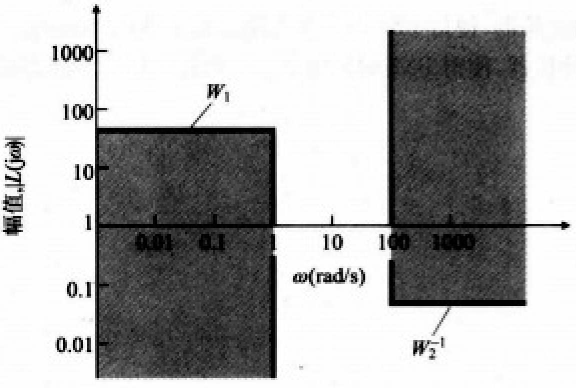


图 6-108　题 6-66 的控制系统约束

▲6.10 节习题：时滞环节

6-67　假定系统

$$G(s)=\frac{e^{-T_d s}}{s+10}$$

有 0.2 秒的时滞环节（$T_d=0.2\text{s}$）。在保持相位裕度≥40°的同时，使用下面的补偿器求出最大的可能带宽：

(a) 一个超前补偿环节

$$D(s)=K\frac{s+a}{s+b}$$

其中，$b/a=100$；

(b) 两个超前补偿环节

$$D(s)=K\left(\frac{s+a}{s+b}\right)^2$$

其中，$b/a=10$；

(c) 评论教材中关于时滞环节对带宽的影响的叙述。

6-68　确定使得下面的系统稳定的 K 的取值范围：

(a) $G(s)=K\frac{e^{-4s}}{s}$，

(b) $G(s)=K\frac{e^{-s}}{s(s+2)}$。

6-69　在第 5 章，我们曾对时滞环节使用几种不同的近似方法，其中一种就是如下的一阶 Padé 形式：

$$e^{-T_d s} \cong H_1(s) = \frac{1 - T_d s/2}{1 + T_d s/2}$$

使用频率响应分析法，我们可以得到准确的时滞环节表达式：

$$H_2(s) = e^{-T_d s}$$

画出 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 的相位曲线，讨论其中的涵义。

6-70 考虑例 2.13 的热交换器，它的传递函数是

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{(10s+1)(60s+1)}$$

(a) 设计一个超前补偿器，使得 PM≥45°和系统具有最大可能的闭环带宽。

(b) 设计一个 PI 补偿器，使得 PM≥45°和系统具有最大可能的闭环带宽。

第 7 章　状态空间设计

状态空间设计介绍

除了根轨迹变换法和频率响应法之外，反馈控制系统的设计还有第三种主要的方法：状态空间法。我们将介绍用状态变量法描述微分方程。在状态空间的设计中，控制工程师设计一个动态补偿器直接作用于描述系统特性的状态变量上。和前面介绍的变换法一样，状态空间法的目标是找到一个补偿 $D(s)$ 以满足设计要求，如图 7-1 所示。因为状态空间法在描述装置和计算补偿器时与变换法有所不同，所以可能初看上去像是在解决一个完全不同的问题。在本章中，我们选择的例题和分析，实际上是为了让你确信采用状态空间法设计出来的以传递函数 $D(s)$ 表示的补偿器与采用其他两种方法设计出来的补偿器 $D(s)$ 是等价的。

很明显，由于状态空间法能很好地结合计算机技术的应用，所以目前控制工程师对其研究和使用日益增多。

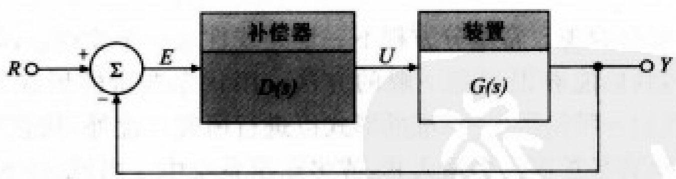


图 7-1　控制系统设计的定义

全章概述

这一章首先介绍使用状态空间法的目的和优点。通过 7.2 节的几个例子，我们讨论状态变量的选择和各种动态系统的状态空间模型。状态变量形式的模型加强我们应用计算机辅助设计工具（如 MATLAB）以提高计算效率的能力。在 7.3 节中，我们阐述从模拟计算机仿真模块的角度来看状态变量是有益的。在 7.4 节，我们从框图回顾状态变量方程的发展。然后，我们分别从手工计算和计算机分析两个方面，利用状态方程解决动态响应的问题。在完成这些初步的基础理论之后，接下来我们研究通过状态空间法来实现控制系统设计的方法。其设计步骤如下：

(1) 选择闭环系统的极点(前几章提到的根)位置,并确定闭环系统的控制规律,使之满足动态响应特性(7.5节和7.6节);

(2) 设计估计器(estimator)(7.7节);

(3) 综合控制规律和估计器(7.8节);

(4) 引入参考输入(7.5.2节和7.9节)。

在介绍了主要的设计步骤后,我们简要地探究一下状态空间中积分控制的应用(7.10节)。本章的最后三节将简要地介绍一些与状态空间设计法有关的附加概念;因为这些概念相对而言比较前沿,对于某些课程或读者来说,它们可以是选修或选读的内容。

7.1　状态空间设计法的优点

状态空间(state space)的思想来源于描述微分方程的状态变量法。在状态变量法中,描述一个动态系统的微分方程组是一组关于系统状态向量的一阶微分方程,方程组的解则可以形象地看作状态向量在空间中的一条轨迹。**状态空间控制设计(state-space control design)**是指控制工程师通过直接分析系统的状态变量描述来设计动态补偿器的方法。迄今为止,我们已经看到,描述物理动态系统的常微分方程(ODE)能够被转化为状态变量的形式。在研究常微分方程的数学领域中,方程的状态变量形式被称为**标准形式(normal form)**。用这种形式研究微分方程有几点好处,其中的3点如下。

- 研究更一般的模型。常微分方程不一定是线性或时不变的。因而,通过研究方程组本身,我们能够得到更一般的方法。用状态变量的形式来表示常微分方程,给了我们一种简洁的、标准的形式以进行研究。此外,状态空间的分析和设计的方法很容易扩展到多输入和/或多输出系统中。当然,在本书中,我们主要研究单输入单输出的线性时不变模型(原因前面已说过)。
- 把几何学的思想引进到微分方程中。在物理学中,把粒子或刚体的位移和速度为横纵轴组成的平面称为**相平面(phase plane)**,而且其运动轨迹能够被描绘为平面上的一条曲线。状态就是该思想在二维以上的空间内的一种推广。尽管我们无法直接描绘三维以上的空间,但是有关距离、直交线、平行线和其他几何概念将有助于我们把常微分方程的解形象地理解为状态空间中的一条轨道。
- 把内部描述和外部描述联系起来。动态系统的状态往往直接描述了系统内部能量的分布。打个比方,常常会选择以下变量作为状态变量:位移(势能)、速率(动能)、电容电压(电能)以及电感电流(磁场能)。内部能量可以通过状态变量计算得到。为了简单地描述要分析的系统,我们可以把系统的输入输出和系统的状态联系起来,进而在内部变量和外部的输入以及测量输出之间建立联系。相反地,传递函数只能描述输入与输出之间的相互关系而不能描述系统的内部

行为。而状态空间的形式则保持了后者的信息，这在某些情况下是很重要的。

对状态空间法的应用常被称为**现代控制设计**（**modern control design**），而对基于传递函数的方法，如根轨迹和频率响应法的应用，则被称为**经典控制设计**（**classical control design**）。尽管如此，因为状态空间法用于描述常微分方程已经有超过一百年的历史并且于20世纪50年代末被引进控制设计中，所以把它称为现代似乎有点误导读者。我们更愿意称此两种设计方法为状态空间法和变换法（transform methods）。

当被控系统是多输入或者多输出系统时，状态空间设计法的优点尤为突出。但是，在本书中，我们还是用简单的单输入单输出系统去介绍状态空间设计的思想。用状态空间描述系统的设计方法是“分步骤解决的”（divide and conquer）。首先我们设计相应的控制，假设所有的状态是可测量的，并且在控制规律中是可用的，这为给系统分配任意动态特性提供了可能性。在满足基于全状态反馈的控制规律的前提下，我们引入观测器的概念并构造基于输出的状态估计。然后我们证明这些估计能够用来代替实际的状态变量。最后，我们介绍外部参考命令（reference-command）输入，至此整个设计结束。只有到了这一步，我们才看出所得到的补偿器与用变换法设计出来的补偿器在本质上是相同的。

在我们能够用状态描述法进行设计之前，有必要借用矩阵线性代数中的一些解析结论和工具，以备本章使用。在此，我们假设你已经熟悉一些基本的矩阵概念（如单位矩阵、三角阵和对角阵，还有转置矩阵），你对矩阵代数的运算技巧有一定的了解（包括加法、乘法和逆矩阵）。更多复杂的结果将会在7.4节中关于线性系统的动态响应中得到推导。本章中用到的所有线性代数的结论均归纳在附录C中，以便读者参考和复习。

7.2 状态空间中的系统描述

任何有界动态系统的运动都可以用一阶常微分方程组来表示。这常被称为状态变量表示法。打个比方，牛顿定律的应用和2.1节中自由体（free-body）图表是典型的二阶微分方程——也就是方程中含有二阶导数，如式（2-3）中的 $\ddot{x}$ 或式（2-15）中的 $\ddot{\theta}$。后一个方程式可以表示为

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{7-1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u}{I} \tag{7-2}$$

其中

$$u = F_c d + M_D$$
$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = \dot{\theta}$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta}$$

该系统的输出是 θ，即人造卫星的飞行姿态。

这些相似的方程式，可以用**状态变量形式**（**state-variable form**）表示为以下向量方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}u \tag{7-3}$$

其中输入为 u，而输出为

$$y = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + Ju \tag{7-4}$$

列向量 $\boldsymbol{x}$ 被称为**系统的状态**(**state of the system**)，且对于 n 阶系统，它包含 n 个元素。对于机械系统，状态向量元素通常由**单独物体**(**separate bodies**)位移和速率组成，就像式(7-1)和式(7-2)的例子所显示的情况一样。变量 $\boldsymbol{F}$ 是一个 $n\times n$ 维的**系统矩阵**(**system matrix**)，$\boldsymbol{G}$ 是一个 $n \times 1$ 维的**输入矩阵**(**input matrix**)，$\boldsymbol{H}$ 是一个 $1\times n$ 维的行矩阵，表示**输出矩阵**(**output matrix**)，还有 J 是一个标量，称为**直接传动项**(**direct transmission term**)。① 为了节省空间，我们有时候会用状态向量的**转置**(**transpose**)来表示该向量，

$$x=[x_1 \quad x_2 \cdots]^T$$

这等效于

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

更复杂系统的微分方程模型，如第2章讲到的机械系统、电力系统和机电系统等，可以通过选择位移、速率、电容电压和电感电流等作为合适的状态变量而将其表示为状态变量的形式。

本章中我们将考虑如何利用状态变量形式进行控制系统的设计。对于非线性关系[如式(2-22)，式(2-86)和式(2-87)所示的情况]，线性形式不能直接应用。必须将方程组按第2章所介绍的方法线性化以符合线性形式(也可参阅第9章)。

表征微分方程的状态变量法已在计算机辅助控制系统设计软件包中得到应用(如MATLAB)。因此，为了将线性微分方程组录入到计算机中，你必须知道矩阵 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$ 和常数 J 的值。

例7.1　状态变量形式的人造卫星姿态控制模型

当 $M_D=0$ 时，用状态变量形式表示例2.3中的人造卫星姿态控制模型，确定矩阵 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$ 和 J 的值。

解：确定用状态变量 $\boldsymbol{x} \triangleq [\theta \quad \omega]^T$ 表示的人造卫星的姿态和角速度。② 二阶方程式(2-15)可以等价地写为以下两个一阶方程式：

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = \frac{d}{I}F_C$$

① 在空间中常用 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 和 D 来代替 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$ 和 J。我们将使用 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$ 表示装置动力学(plant dynamics)状态，而 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 表示一般的线性系统。

② 符号 $\triangleq$ 表示"定义为"。

利用式(7-3)，$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{G}u$，这些方程式可表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\\dot{\omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\\omega\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\d/I\end{bmatrix}F_c$$

系统的输出是人造卫星的姿态，$y=\theta$。利用式(7-4)，$y=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+Ju$，该关系式可表示为

$$y=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\\omega\end{bmatrix}$$

所以，状态变量形式下的矩阵为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0\\\dfrac{d}{I}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix},\quad J=0$$

且输入为 $u\stackrel{\Delta}{=}F_c$。

在这个非常简单的例子中，用状态变量形式表示微分方程，比起式(2-15)的二阶方程来说更加麻烦。尽管如此，对大多数系统来说，状态变量法并不会显得更加麻烦，而且在计算机辅助设计的应用中，标准形的优势使得状态变量形式得到了广泛应用。

下面以更加复杂的例子说明如何使用 MATLAB 求解线性微分方程。

例 7.2 巡航控制(Cruise Control)系统的阶跃响应

(a) 将例 2.1 中的运动方程改写为状态变量的形式，其中输出为汽车的位移 x。

(b) 当输入从 $t=0$ 时刻的 $u=0$，其后跳变到 $u=500$ 牛顿时，利用 MATLAB 计算汽车速度的阶跃响应，假设汽车质量 m 为 1000 kg 且 $b=50$ N·s/m。

解：

(a) **运动方程**。首先，我们需要把描述系统特性的微分方程，即式(2-3)，表示为一组联立的一阶方程组。为此，我们把汽车的位移和速度定义为状态变量 x 和 v，即 $\boldsymbol{x}=[x\quad v]^T$。二阶方程式(2-3)可以重新写为以下两个一阶方程的组合：

$$\dot{x}=v$$

$$\dot{v}=-\frac{b}{m}v+\frac{1}{m}u$$

接下来，我们利用式(7-3)的标准形，$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{G}u$，将这些方程式表示为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&-b/m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{m}\end{bmatrix}u \tag{7-5}$$

系统的输出是汽车的位移 $y=x_1=x$，可用矩阵形式表示为

$$y=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\v\end{bmatrix}$$

或者

$$y=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$$

因此，这个系统的状态变量形式的矩阵可定义为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0&1\\0&-b/m\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0\\1/m\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix},\quad J=0$$

(b) **时间响应**。运动方程已在(a)中给出，现假设输出是 $v=x_2$。于是，输出矩阵为

$$H = [0 \quad 1]$$

所需系数为 $b/m=0.05$ 和 $1/m=0.001$。那么，描述系统的矩阵的数字值为

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -0.05\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}0\\ 0.001\end{bmatrix},\quad H=[0 \quad 1],\quad J=0$$

MATLAB 中的 step 函数可计算线性系统的单位阶跃响应。因为系统是线性的，在这种情况下，将输出乘以阶跃输入的幅值，可以得到任意幅值的阶跃响应。等效地，矩阵 G 也可以乘上阶跃输入的幅值。

以下代码

```
F = [0   1;0   -0.05];
G = [0;0.001];
H = [0   1];
J = 0;
sys = ss(F, 500*G,H,J); step gives unit step response, so 500*G gives u = 500 N.
step(sys);  % plots the step response
```

计算和描绘幅值为 500 牛顿的阶跃输入的时间响应，其阶跃响应曲线如图 7-2 所示。

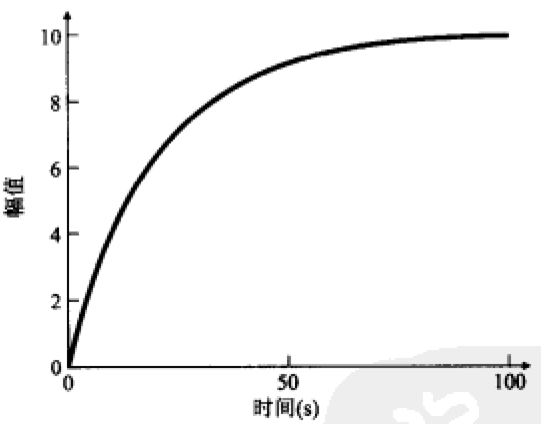


图 7-2　u 阶跃跳变时汽车速度的响应

例 7.3　状态变量形式的 T 型桥电路

确定图 2-15 所示电路的状态空间方程。

解：为了写出状态变量形式的方程式（如一组联立的一阶微分方程组），我们选择电容电压 v_{C_1} 和 v_{C_2} 作为状态元素（即 $x=[v_{C_1} \quad v_{C_2}]^T$），且将 v_i 作为输入（即 $u=v_i$）。这里 $v_{C_1}=v_2$，$v_{C_2}=v_1-v_3$ 且 $v_1=v_i$。所以 $v_1=v_i$，$v_2=v_{C_1}$，且 $v_3=v_i-v_{C_2}$。根据 v_{C_1} 和 v_{C_2}，式(2-27)可表示为

$$\frac{v_{C_1}-v_i}{R_1}+\frac{v_{C_1}-(v_i-v_{C_2})}{R_2}+C_1\frac{dv_{C_1}}{dt}=0$$

将上式重新列写为标准形，我们得到

$$\frac{dv_{C_1}}{dt}=-\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_{C_1}-\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_2}\right)v_{C_2}+\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_i \tag{7-6}$$

根据 v_{C_1} 和 v_{C_2}，式(2-28)可表示为

$$\frac{v_i-v_{C_2}-v_{C_1}}{R_3}+C_2\frac{d}{dt}(v_i-v_{C_2}-v_i)=0$$

方程用标准形可表示为

$$\frac{\mathrm{d}v_{C_2}}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_{C_2}}{C_2R_2}-\frac{v_{C_1}}{C_2R_2}+\frac{v_i}{C_2R_2} \tag{7-7}$$

方程(2-27)～式(2-28)与状态变量形式(7-6)和式(7-7)在描述电路特性上是完全等价的。

标准的矩阵可定义为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_2}\right)\\ -\frac{1}{C_2R_2} & -\frac{1}{C_2R_2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\\ \frac{1}{C_2R_2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=[0\quad -1],\quad J=1$$

例 7.4 状态变量形式的扬声器电路

对于图 2-19 的扬声器和图 2-20 的对应电路，找出表示输入电压 v_a 和输出锥形位移(output cone displacement)x 之间关系的状态空间方程。假设电路有效电阻为 R，且电感为 L。

解：回顾前述的两个联合方程式(2-37)和式(2-41)，建立扬声器的动态模型：

$$M\ddot{x}+b\dot{x}=0.63i$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=v_a-0.63\dot{x}$$

对该三阶系统，选择一个合理的状态向量 $\boldsymbol{x}\triangleq[x\quad \dot{x}\quad i]^{\mathrm{T}}$，可导出其标准矩阵为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -b/M & 0.63/M\\ 0 & -0.63/L & -R/L\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1/L\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}=[1\quad 0\quad 0],\quad J=0$$

此处输入 $u\triangleq v_a$。

例 7.5 状态变量形式的直流电机建模

根据图 2-22a 的等效电路，确定直流电机的状态空间方程。

解：回顾第 2 章的运动方程[式(2-45)和式(2-46)]：

$$J_m\ddot{\theta}_m+b\dot{\theta}_m=K_ti_a$$

$$L_a\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t}+R_ai_a=v_a-K_e\dot{\theta}_m$$

该三阶系统的一个状态向量是 $\boldsymbol{x}\triangleq[\theta_m\quad \dot{\theta}_m\quad i_a]^{\mathrm{T}}$，可导出其标准矩阵

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -b/J_m & K_t/J_m\\ 0 & -K_e/L_a & -R_a/L_a\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1/L_a\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}=[1\quad 0\quad 0],\quad J=0$$

其中输入 $u\triangleq v_a$。

状态变量形式可应用于任意阶系统，例7.6将说明该方法如何应用于四阶系统。

例7.6　状态变量形式的可移动硬盘驱动器(Flexible Disk Drive)

确定例2.4的微分方程的状态变量形式，其中输出为θ_2。

解：定义状态向量为

$$\boldsymbol{x}=[\theta_1\quad\dot{\theta}_1\quad\theta_2\quad\dot{\theta}_2]^T$$

然后从方程(2-17)和(2-18)中解出$\ddot{\theta}_1$和$\ddot{\theta}_2$，状态变量形式更为明显。所得到的矩阵为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{k}{I_1} & -\frac{b}{I_1} & \frac{k}{I_1} & \frac{b}{I_1}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{k}{I_2} & \frac{b}{I_2} & -\frac{k}{I_2} & -\frac{b}{I_2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{I_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}=[0\quad 0\quad 1\quad 0],\quad J=0。$$

如果微分方程中含有输入u的函数，则难度会增加。解决这类问题的技巧将在7.4节中做以介绍。

7.3　框图和状态空间

也许，理解状态变量方程最有效的方法是通过模拟计算机框图表示法。该表示法在结构上以积分器为主要元件，这很适用于一阶系统和用状态变量表示系统的运动方程。虽然模拟计算机已经不再使用，但对于模拟计算机的电路设计和状态变量的设计而言，模拟计算机的实现仍然是一个很有用的概念①。

模拟计算机是一个由模拟常微分方程的电子元件组成的设备。模拟计算机的基础动态元件是**积分器**，(**integrator**)由如图2-18所示的含有电容反馈和电阻前馈的运算放大电路组成。如图7-3所示，因为积分器的输入信号是输出信号的微分，在模拟计算机仿真中，如果我们把积分器的输出定为系统的状态，我们将自动地得到状态变量形式的方程式。反过来说，如果一个系统是用状态变量描述的，我们可以对每一个状态变量构造一个积分器，并且根据给定的方程连接它们的输入端，以此构成模拟计算机仿真器，这样，每个状态变量就像状态变量方程所描述的那样。模拟计算机图表就是一幅状态方程图。

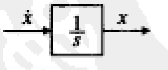


图7-3　积分器

一个能够完成这些功能的典型模拟计算机的各组成部分如图7-4所示。注意，如果运放的增益为负数，输出将反相。

① 也归因于它的历史作用。

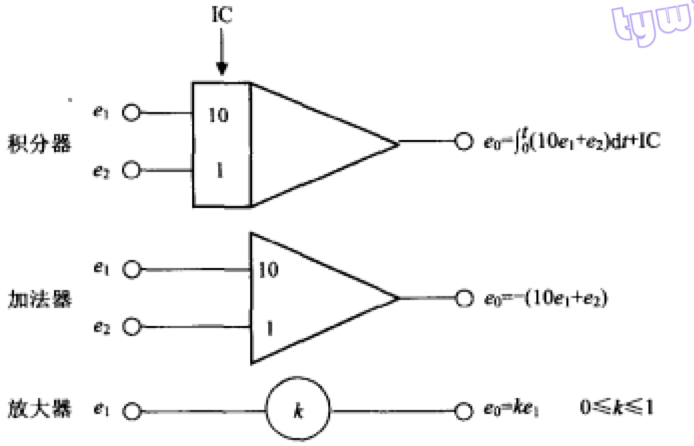


图 7-4 模拟计算机的各组成部分

例 7.7 模拟计算机实现

用状态变量形式描述图 7-5 所示的三阶系统的传递函数，其微分方程为

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=6u$$

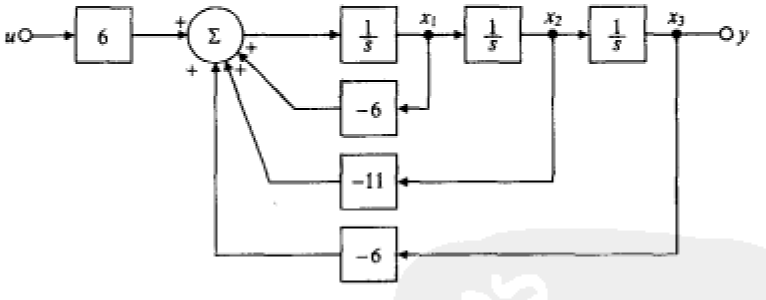


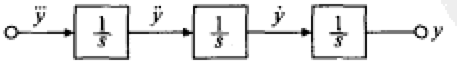
图 7-5 三阶系统

解：我们求解该常微分方程的最高阶微分项，得到

$$\dddot{y}=-6\ddot{y}-11\dot{y}-6y+6u \tag{7-8}$$

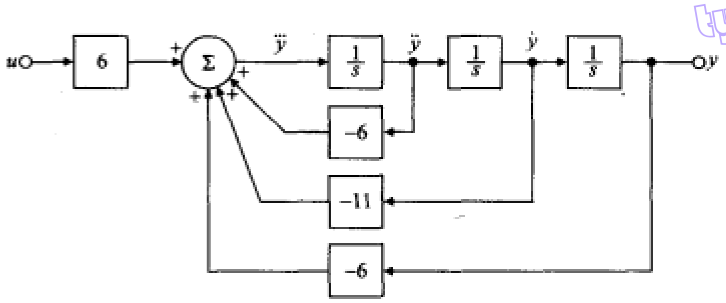
现在，假设我们已经有了最高阶微分项，并且注意到低阶项可以由如图 7-6a 所示的积分器得到。最后，我们应用式(7-8)完成对图 7-6b 所示系统的实现。为了得到状态描述，我们简单地将状态变量定义为各积分器的输出，即 $x_1=\ddot{y}, x_2=\dot{y}, x_3=y$，得到

$$\dot{x}_1=-6x_1-11x_2-6x_3+6u$$
$$\dot{x}_2=x_1$$
$$\dot{x}_3=x_2$$



(a) 中间框图

图 7-6 只用积分器作为动态元件解决方程 $\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=6u$ 的系统框图



(b) 最后框图

图 7-6 （续）

这提供了下面的状态变量描述

$$F=\begin{bmatrix}-6 & -11 & -6\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix},\quad H=[0\quad 0\quad 1],\quad J=0$$

通过 MATLAB 语句

```
[num,den] = ss2tf(F,G,H,J);
```

将得到传递函数

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

如果要求将传递函数表示为系数的形式，可以用 ss 或 tf 描述转换得到。所以，采用下面任意一个 MATLAB 语句

```
% convert state variable realization to pole-zero form
[z,p,k] = ss2zp(F,G,H,J)
```

和

```
% convert numerator-denominator to pole-zero form
[z,p,k] = tf2zp(num,den)
```

都将得到结果：

$z=[\,],\quad p=[-3\quad -2\quad -1]',\quad k=6.$

这表示用系数形式表示的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

状态空间的时间和幅值缩放

我们已经在第 3 章中讨论了时间和幅值缩放，现在我们把这一思想推广到状态变量形式。用时间缩放比例 $\tau=\omega_0 t$ 代替式(7-3)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{\omega_0}Fx+\frac{1}{\omega_0}Gu=F'x+G'u \tag{7-9}$$

对应地，幅值的缩放比例可用 $z=D_x^{-1}x$ 代替 x，其中 D_x 是一个由缩放比例系数组成的对角阵。输入缩放比例对应于用 $v=D_u^{-1}u$ 代替 u。利用这些代换，

$$D_z\dot{z} = \frac{1}{\omega_0}FD_z z + \frac{1}{\omega_0}GD_u v \tag{7-10}$$

得到

$$\dot{z} = \frac{1}{\omega_0}D_z^{-1}FD_z z + \frac{1}{\omega_0}D_z^{-1}GD_u v = F'z + G'v \tag{7-11}$$

式(7-11)简洁地表示了时间和幅值缩放比例的运算式。遗憾的是这并没有减轻工程师的实际任务，工程师依然要考虑合适的缩放比例系数，以使缩放后的方程有一个好的形式。

例 7.8　振荡器的时间缩放比例

振荡器的方程来自例 2.5。在具有非常快的自然频率 $\omega_n = 15\ 000$ rad/s 的情况下，式(2-23)可以改写为

$$\ddot{\theta} + 15\ 000^2\theta = 10^6 \cdot T_c$$

确定时间缩放后的方程使得时间的单位为 ms。

解：状态向量为 $x = [\theta \quad \dot{\theta}]^T$ 的状态变量形式，未缩放的矩阵为

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15\ 000^2 & 0 \end{bmatrix},\quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^6 \end{bmatrix}$$

利用式(7-9)，可得

$$F' = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{1000} \\ -\dfrac{15\ 000^2}{1000} & 0 \end{bmatrix},\quad G' = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^3 \end{bmatrix}$$

由此可得到缩放后的状态变量方程。

7.4　状态方程的分析

在前面的章节中，我们介绍和阐明了选择状态以及利用状态形式组织方程的过程。在本节中，我们将回顾那些过程并且说明如何用状态描述来分析动态响应。在7.4.1节中，我们从状态描述与框图及拉普拉斯变换之间的关系开始，并考虑以下事实：对于一个给定的系统，状态的选择并不是唯一的。我们将演示如何利用不唯一性从几个标准形式中选择能够帮助你徒手解决精确问题的形式；能控标准型使得状态的反馈增益容易设计。在学习了 7.4.2 节中状态方程的结构之后，我们考虑动态响应并说明零极点形式的传递函数与状态描述矩阵之间有怎样的联系。为了用手工计算阐明结果，我们提供了一个热力系统模型的简单例子。对于更为实际的例子，计算机辅助控制系统设计的软件包(如 MATLAB)显得特别有用；相关的 MATLAB 命令将会在适当的时候被提及。

7.4.1　框图与标准型

我们从具有简单传递函数的热力系统开始，

$$G=\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{s+2}{s^2+7s+12}=\frac{2}{s+4}+\frac{-1}{s+3} \tag{7-12}$$

分子多项式 $b(s)$ 的根是传递函数的零点，而分母多项式 $a(s)$ 的根是极点。注意在上式中我们用了两种形式表示传递函数，一种是多项式商的形式，另一种是各部分分式展开式之和的形式。为了得到系统的状态描述（这通常是比较有用的方法），我们只使用独立积分器作为动态元件构造对应于传递函数（和微分方程）的框图。一个这样的利用**能控标准型**（**control canonical form**）构造的框图，如图 7-7 所示。这种构造的本质特征是每一个状态变量都通过反馈连接到控制输入端。

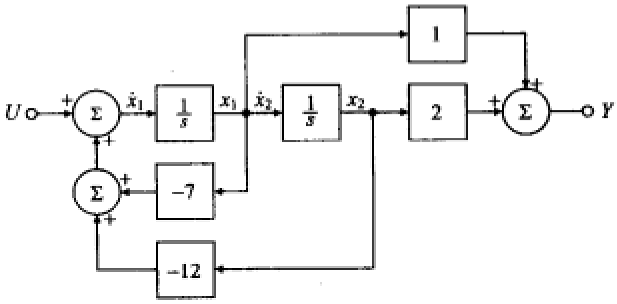


图 7-7　控制形式中表示式(7-12)的框图

一旦画出了这种形式的框图，我们就能通过直接观察确定系统的状态描述矩阵。能够这样做的原因在于，当积分器的输出是状态变量时，它的输入就是这个变量的微分。例如在图 7-7 中，第一个状态变量的方程是

$$\dot{x}_1=-7x_1-12x_2+u$$

同理，还可得到

$$\dot{x}_2=x_1$$

$$y=x_1+2x_2$$

这三个方程可以被改写为矩阵的形式

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_c u \tag{7-13}$$

$$y=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x} \tag{7-14}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_c=\begin{bmatrix}-7 & -12\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_c=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{7-15a}$$

$$\boldsymbol{C}_c=[1\quad 2],\qquad D_c=0 \tag{7-15b}$$

且其中的下标 c 代表能控标准型。

这种矩阵形式有两个重要的特点：分子多项式 $b(s)$ 中的系数 1 和 2 出现在矩阵 $\boldsymbol{C}_c$ 中；并且分母多项式 $a(s)$ 的系数（除了首项）7 和 12（取正号）出现在矩阵 $\boldsymbol{A}_c$ 的首行。有了这一结论，我们就可以通过观察写出任何系统的标准范型状态矩阵，只要此系统的传递函数是用分子和分母多项式的商的形式表示的。如果 $b(s)=b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_n$，且 $a(s)=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n$，则用 MATLAB 实现的步骤是

```
num = b = [b1   b2   ···   bn]
den = a = [1   a1   a2   ···   an]
[Ac,  Bc,  Cc,  Dc] = tf2ss(num,den).
```

我们将 tf2ss 读作“传递函数到状态空间”。将得到如下的运行结果

$$\boldsymbol{A}_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7-16a}$$

$$\boldsymbol{C}_c = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad b_n], \quad \boldsymbol{D}_c = 0 \tag{7-16b}$$

图 7-7 所示的框图和式(7-15)所示的对应矩阵并不是表示传递函数 $G(s)$的唯一方法。对应于部分分式展开式,$G(s)$的另一种框图如图 7-8 所示。利用前面所介绍的技术,对于如图所示的状态变量,我们可以从框图中直接得到矩阵为

$$\dot{z} = \boldsymbol{A}_m z + \boldsymbol{B}_m u$$
$$y = \boldsymbol{C}_m z + D_m u$$

其中

$$\boldsymbol{A}_m = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7-17a}$$

$$\boldsymbol{C}_m = [2 \quad -1], \quad \boldsymbol{D}_m = 0 \tag{7-17b}$$

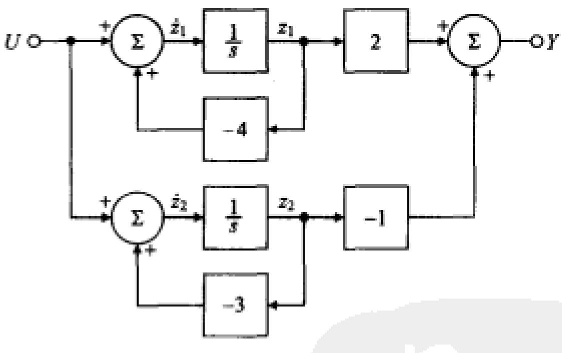


图 7-8 用模态标准型表示的式(7-12)的框图

下标 m 表示**模态标准型**(**modal canonical form**)。该名字源于系统传递函数有时被称为系统**标准模态**(**normal mode**)这一事实。这种形式的矩阵的重要特点是系统的极点(这里是−4 和−3)作为矩阵的元素出现在 $\boldsymbol{A}_m$的对角线上,而部分分式展开式的分子项(这里是 2 和−1)出现在矩阵 $\boldsymbol{C}_m$中。

用模态标准型表示一个系统可能会因为以下两个原因而变得复杂:(1)如果系统极点是复数形式,矩阵的元素将是复数形式,(2)如果部分分式展开式有重根,系统矩阵就不会是对角阵。为了解决第一个问题,我们把部分分式展开式的复极点用二次项表示为共轭复数对,这样,所有元素都为实数。相应地,矩阵 $\boldsymbol{A}_m$ 沿着主对角线将有 2×2 的方阵,代表复极点集中变量之间的局域耦合。为了解决第二个难点,我们把相应的状态变量也进行耦合配对,这样极点就出现在对角线上,用非对角线上的元素表示这些耦合。关于后一种情况,一个简单的例子就是例 7.1 中的人造卫星系统,其传递函数为 $G(s)=1/s^2$。此传递函数的系统矩阵,用模态形式表示为

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad H=[1\quad 0],\quad J=0 \tag{7-18}$$

例 7.9 模态标准型状态方程

带一个共振状态的“四分之一车模型”(见式 2-12)的传递函数由下式给出：

$$G(s)=\frac{2s+4}{s^2(s^2+2s+4)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+2s+4} \tag{7-19}$$

确定系统用模态形式描述的状态矩阵。

解：传递函数已经以部分分式的形式给出。为了得到状态描述矩阵，我们只用积分器画出相应的框图，分配状态变量，然后写出相应的矩阵。这个过程并不是唯一的，所以对于给定的问题有多种可行解，它们仅有一些细微的差别。其中一个变量分配比较令人满意的框图如图 7-9 所示。

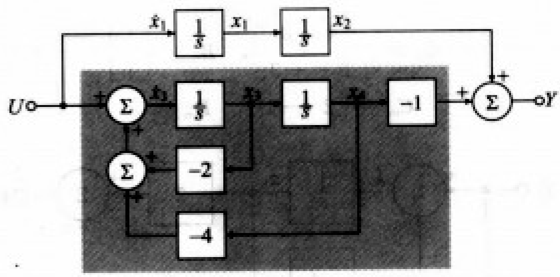


图 7-9 一个四阶系统的模态标准型框图

（阴影部分表示能控标准型部分）

值得注意的是，用二次项表示复极点，已经在能控标准型中得到实现。有很多其他的可行方案可以代替这一部分。这种特殊的形式让我们通过观察就可写出系统矩阵。

$$F=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad H=[0\quad 1\quad 0\quad -1],\quad J=0 \tag{7-20}$$

到目前为止，我们已经知道：不管是能控形式还是模态形式，都可以从传递函数中得到状态描述。因为这些矩阵描述的是同一个动态系统，我们可能会问，这两种形式的矩阵之间有什么关系(及它们对应的状态变量又有什么关系)？更一般地，假设我们有一系列用非特殊形式描述的一些物理系统的状态方程，给定一个用能控标准型易于解决的问题(在 7.5 节中我们将遇到这样的问题)，在事先没有得到传递函数的情况下，能否计算出所要求的标准型呢？要回答这些问题，先来看看状态转换的概念。

考虑由以下状态方程描述的系统

$$\dot{x}=Fx+Gu \tag{7-21a}$$

$$y=Hx+Ju \tag{7-21b}$$

从全面的分析可知，这并不是该系统的唯一描述。我们考虑 x 的一个线性变换，将 x 转换为一个新的状态 z。设一非奇异矩阵 T，令

$$x = Tz \tag{7-22}$$

将式(7-22)代入到式(7-21a)中，我们得到用新的状态 z 表示的运动方程：

$$\dot{x} = T\dot{z} = FTz + Gu \tag{7-23a}$$

$$\dot{z} = T^{-1}FTz + T^{-1}Gu \tag{7-23b}$$

$$\dot{z} = Az + Bu \tag{7-23c}$$

在式(7-23c)中

$$A = T^{-1}FT \tag{7-24a}$$

$$B = T^{-1}G \tag{7-24b}$$

然后我们把式(7-22)代入式(7-21b)中，得到以新状态 z 表示的输出方程：

$$y = HTz + Ju = Cz + Du$$

这里

$$C = HT, \quad D = J \tag{7-25}$$

给定一般形式的矩阵 F、G、H 和标量 J，我们希望找到变换矩阵 T 使得 A，B，C 和 D 成为特殊形式的矩阵，如能控标准型。为了得到这样的 T，先假设 A，B，C 和 D 已经是我们所要求的形式，进一步假设 T 是一般形式的变换矩阵，然后讲对应的项进行匹配，即可求出矩阵 T。这里我们将以三阶的情况为例，从分析过程即可将分析推广到更一般的情形，其步骤如下。

首先我们把式(7-24a)改写为

$$AT^{-1} = T^{-1}F$$

如果 A 是能控标准型，我们把 T^{-1} 描述成由行向量 t_1、t_2 和 t_3 组成的矩阵，有

$$\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1F \\ t_2F \\ t_3F \end{bmatrix} \tag{7-26}$$

将第三行和第二行展开，得到如下的矩阵方程

$$t_2 = t_3F \tag{7-27a}$$

$$t_1 = t_2F = t_3F^2 \tag{7-27b}$$

由式(7-24b)，假设 B 也是能控标准型，得到关系式

$$T^{-1}G = B$$

或

$$\begin{bmatrix} t_1G \\ t_2G \\ t_3G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7-28}$$

联立式(7-27)和式(7-28)，我们得到

$$t_3G = 0$$

$$t_2G = t_3FG = 0$$

$$t_1G = t_3F^2G = 1$$

将这些方程写为矩阵形式如下：

$$t_3[G \quad FG \quad F^2G] = [0 \quad 0 \quad 1]$$

或

$$t_3 = [0 \quad 0 \quad 1]\mathscr{C}^{-1} \tag{7-29}$$

其中**能控性矩阵**(controllability matrix)$\mathscr{C}=[G \quad FG \quad F^2G]$。得到 t_3 后，现在我们可以回到式(7-27)且构造 T^{-1} 的所有行向量。

综合所述，把 n 维的一般状态描述转化为能控标准型的诀窍可归纳如下：

- 由 F 和 G，构造能控性矩阵

$$\mathscr{C}=[G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1}G] \tag{7-30}$$

- 按下式计算变换矩阵的逆矩阵的最后一行

$$t_n = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]\mathscr{C}^{-1} \tag{7-31}$$

- 按下式构造整个变换矩阵

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t_nF^{n-1} \\ t_nF^{n-2} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \tag{7-32}$$

- 利用式(7-24a)、式(7-24b)和式(7-25)，从 T^{-1} 中计算新的矩阵。

当能控性矩阵 $\mathscr{C}$ 是非奇异阵时，相应的 F 和 G 矩阵被称为**能控的**(controllable)。这是物理系统通常所具有的技术特性，在7.5节中即将介绍的状态反馈中系统的能控性将是重要的概念。到时我们也会介绍一些缺乏能控性的物理例子。

因为从数值上精确计算式(7-32)给出的变换是困难的，所以几乎不这么求解 T 矩阵。之所以详细地逐步退到这种变换过程，是为了从理论上说明这种状态变化是怎么实现的，同时也说明了如下重要的结论：

总可以把给定的状态描述转换为能控标准型的形式，当(且仅当)能控性矩阵 $\mathscr{C}$ 是非奇异的。

当需要从数值上验证实际例子的能控性时，可以使用一种数值上稳定的方法将系统矩阵转换为“阶梯状”，而不是尝试计算能控性矩阵。本章末尾的习题7.28要求考虑这种方法来判断系统的能控性。

到目前位置，我们讨论能控性时存在一个重要问题，即状态变换对能控性有什么影响？我们可以通过式(7-30)式(7-24a)和式(7-24b)得出结论。系统(F,G)的能控性矩阵为

$$\mathscr{C}_x=[G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1}G] \tag{7-33}$$

经过状态变换后，新的描述矩阵由式(7-24a)和(7-24b)给出，且能控性矩阵变为

$$\mathscr{C}_z=[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \tag{7-34a}$$

$$=[T^{-1}G \quad T^{-1}FTT^{-1}G \quad \cdots \quad T^{-1}F^{n-1}TT^{-1}G] \tag{7-34b}$$

$$=T^{-1}\mathscr{C}_x \tag{7-34c}$$

可见，当且仅当 $\mathscr{C}_x$ 是非奇异的，$\mathscr{C}_z$ 才是非奇异的从而得到以下的结论：

对系统的状态进行非奇异线性变换并不会改变其能控性。

让我们再回到式(7-12)的传递矩阵，这次我们用**能观标准型**(observer canonical form)结构的框图表示它(图7-10)。这种标准型形式的对应矩阵为

$$\boldsymbol{A}_o = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{7-35a}$$

$$\boldsymbol{C}_o = [1 \quad 0], \qquad D_o = 0 \tag{7-35b}$$

这种标准型的重要特征就是所有反馈都是从输出反馈到状态变量。

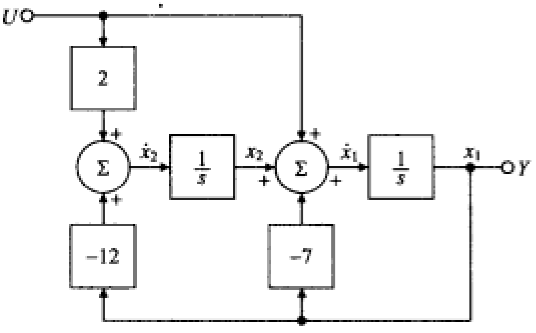


图 7-10 能观标准型

现在让我们考虑当-2处的零点被改变时，系统的能控性将怎么变化。为了这个目的，我们用可变零点$-z_0$代替$\boldsymbol{B}_o$的第二个元素 2，并构造能控性矩阵：

$$\mathcal{C}_x = [\boldsymbol{B}_o \quad \boldsymbol{A}_o\boldsymbol{B}_o] \tag{7-36a}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -7-z_0 \\ -z_0 & -12 \end{bmatrix} \tag{7-36b}$$

该矩阵的行列式是z_0的函数：

$$\det(\mathcal{C}_x) = -12 + (z_0)(-7-z_0) = -(z_0^2 + 7z_0 + 12).$$

当$z_0 = -3$或-4时，该多项式值为零，表示当取这两个值时将失去能控性。这意味着什么呢？从参数z_0的角度来说，传递函数是

$$G(s) = \frac{s - z_0}{(s+3)(s+4)}$$

如果$z_0 = -3$或-4，将出现零极点相互抵消，该传递函数从二阶系统降到一阶系统。例如当$z_0 = -3$时，-3这个状态从输入中被断开，该状态的控制作用也失去了。

请注意，我们已经以式(7-12)的传递函数为例，得到了它的两种方式实现：一种是能控标准型；另一种是能观标准型。对于任意的零点，能控标准型总是能控的，但当零点抵消去任一极点时，能观标准型将失去能控性。所以，虽然这两种形式可以代表着同一传递函数，但可能无法从一种标准型的状态变换到另一种标准型的状态（在这里，是无法从能观标准型转换到能控标准型）。虽然状态变换不能影响能控性，但根据传递函数选取的特殊状态时可以改变能控性的：

能控性是系统状态的函数，不能由传递函数来决定。

在这里，对能控性进行更多的讨论将偏离我们的主题。有关能观性与能观标准型的密切联系将在 7.7.1 节中讨论。动态系统这些性质的更详细讨论在附录 D 中给出，想进一步学习的读者可以参阅。

现在我们回到方程的模态形式，作为传递函数的例子，由式(7-17a)和式(7-17b)给

出。正如前面所提到的，对于有重极点的传递函数，并不总能找到模态形式，所以我们假设系统只有单极点。另外，我们假设一般形式的状态方程由式(7-21a)和式(7-21b)表示。我们希望找到由式(7-22)定义的变换矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得变换后的式子(7-24)和式(7-25)是模态形式。在这种情况下，我们假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对角阵且 $\boldsymbol{T}$ 由列向量 t_1，t_2 和 t_3 组成。根据这个假设，状态变换式(7-24a)变为

$$\boldsymbol{TA}=\boldsymbol{FT}$$

$$[\boldsymbol{t}_1\quad \boldsymbol{t}_2\quad \boldsymbol{t}_3]\begin{bmatrix}p_1 & 0 & 0\\ 0 & p_2 & 0\\ 0 & 0 & p_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{F}[\boldsymbol{t}_1\quad \boldsymbol{t}_2\quad \boldsymbol{t}_3] \tag{7-37}$$

式(7-37)等价于三个向量矩阵方程

$$p_i\boldsymbol{t}_i=\boldsymbol{F}\boldsymbol{t}_i,\quad i=1,2,3 \tag{7-38}$$

在矩阵代数中，式(7-38)是著名的方程式，它的解就是所谓的**特征向量/特征值问题(eigenvector/eigenvalue problem)**。回顾 $\boldsymbol{t}_i$ 是向量，$\boldsymbol{F}$ 是一个矩阵，而 p_i 是一个标量。向量 $\boldsymbol{t}_i$ 被称为 $\boldsymbol{F}$ 的特征向量，而 p_i 被称为相应的**特征值(eigenvalue)**。因为先前我们看到模态形式与部分分式展开式等价，系统的极点分布在状态矩阵的对角线，所以我们应该清楚这些“特征值”正是我们系统的极点。把状态描述矩阵变换为模态形式的变换矩阵，以 $\boldsymbol{F}$ 的特征向量作为列向量，如图式(7-37)所示的三阶系统的情况。这时，可以用 QR 算法①这一健壮的、可靠的计算机算法去计算较大系统的特征值和特征向量。在 MATLAB 中，命令 p=eig(F)用来计算用状态形式表示的系统的极点。

同时注意，式(7-38)是齐次式，如果 $\boldsymbol{t}_i$ 是一个特征向量，对于任意标量 α，则 $\alpha\boldsymbol{t}_i$ 也是特征向量。在大多数情况下，选择标量参数以使矩阵长度(元素值的平方和的平方根)为单位长度。MATLAB 将完成这一操作。另外也可以选择标量参数使得输入矩阵 $\boldsymbol{B}$ 由全 1 组成。后一种选择是假设部分分式展开式的每一部分都是用能控标准型实现的。如果系统是实系统，则 $\boldsymbol{F}$ 的每一个元素都是实数，且如果 $p=\sigma+j\omega$ 是其中一个极点，则其共轭复数 $p^*=\sigma-j\omega$ 也是极点。对于这样的特征值，对应的特征向量也是复数向量且共轭。分别利用特征向量的实部和复部构造变换矩阵是可能的，这样，模态形式就是实数形式，但对每一个复极点有 2×2 方阵。后面我们将看到完成这一操作的 MATLAB 函数的执行结果，但首先看一下简单的实极点的情况。

例 7.10　热学系统的能控形式到模态形式的变换

求变换矩阵将式(7-15)的能控标准型矩阵变换为式(7-17)的模态形式。

解：根据式(7-37)和(7-28)，我们首先要找到矩阵 $\boldsymbol{A}_c$ 的特征向量和特征值。我们假设特征向量为 $\begin{bmatrix}t_{11}\\ t_{21}\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}t_{12}\\ t_{22}\end{bmatrix}$。

---

① 这算法是 MATLAB 及其他有名的计算辅助设计包的一部分。它收藏在软件包 LAPACK(Anderson. et al.,1999)中。也可参看 Strang(1998)。

利用左边的特征向量列出下面的方程

$$\begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} \tag{7-39a}$$

$$-7t_{11} - 12t_{21} = pt_{11} \tag{7-39b}$$

$$t_{11} = pt_{21} \tag{7-39c}$$

将式(7-39c)代入(7-39b),得到

$$-7pt_{21} - 12t_{21} = p^2t_{21} \tag{7-40a}$$

$$p^2t_{21} + 7pt_{21} + 12t_{21} = 0 \tag{7-40b}$$

$$p^2 + 7p + 12 = 0 \tag{7-40c}$$

$$p = -3,\quad -4 \tag{7-40d}$$

我们再次发现特征值(极点)为-3和-4;更进一步地讲,式(7-39c)告诉我们,两个特征向量为$\begin{bmatrix} -4t_{21} \\ t_{21} \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} -3t_{22} \\ t_{22} \end{bmatrix}$,其中$t_{21}$和$t_{22}$为任意非零的标量参数。我们希望找到两个标量参数使得式(7-17a)的$\boldsymbol{B}_m$的所有元素为单位值。用$\boldsymbol{B}_c$表示的$\boldsymbol{B}_m$的方程式为$\boldsymbol{TB}_m = \boldsymbol{B}_c$,且其解为$t_{21} = -1$和$t_{22} = 1$。所以,变换矩阵及其逆矩阵[①]为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{7-41}$$

由基本矩阵乘法可知,利用式(7-41)所定义的矩阵$\boldsymbol{T}$,式(7-15)和式(7-17)的矩阵有以下关系:

$$\boldsymbol{A}_m = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{T},\quad \boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}_c$$
$$\boldsymbol{C}_m = \boldsymbol{C}_c\boldsymbol{T},\quad D_m = D_c \tag{7-42}$$

这些计算可以由下面MATLAB语句得到结果:

```
T = [4 -3; -1 1];
Am = inv(T)*Ac*T;
Bm = inv(T)*Bc;
Cm = Cc*T;
Dm = Dc;
```

以下例子为状态变量形式且有五个状态变量,对手工计算来说太复杂了。尽管如此,它是一个说明计算机软件设计应用的好例子。我们将要使用的模型是一个幅值和时间刻度都规定好了的物理状态。

例 7.11 利用MATLAB找出磁带驱动器系统(Tape-Drive System)的极点和零点

找出以下磁带驱动器控制系统矩阵的特征值。同时,计算变换矩阵,将给定形式的磁带驱动器方程转换为模态标准型的。系统矩阵为

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.35 & 0.1 & 0.1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & -0.4 & -1.4 & 0 \\ 0 & -0.03 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7-43}$$

① 要计算2×2方阵的逆矩阵,你只需交换下标为"11"和"22"元素的位置,改变下标为"12"和"21"元素的符号,并除以行列式[在式(7-41)中等于1]。

$H_2 = [0.0 \quad 0.0 \quad 1.0 \quad 0.0 \quad 0.0]$　　伺服电机位置输出

$H_3 = [0.5 \quad 0.0 \quad 0.5 \quad 0.0 \quad 0.0]$　　读/写磁头时位置输出

$H_T = [-0.2 \quad -0.2 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.0]$　　张力(tension)输出

$J = 0.0$

状态矩阵定义为

$$x = \begin{bmatrix} x_1(\text{磁带主动轮位置}) \\ \omega_1(\text{驱动轮子的速度}) \\ x_3(\text{磁头处磁带位置}) \\ \omega_2(\text{输出的速度}) \\ i(\text{主动轮电机电流}) \end{bmatrix}$$

矩阵 H_3 对应于 x_3(经过读/写磁头时磁带的位置)为输出,而矩阵 H_T 对应于将张力作为输出。

解:为了用 MATLAB 计算特征值,我们使用语句

```
P = eig(F),
```

其结果为

$$P = \begin{bmatrix} -0.6371 + 0.6669i \\ -0.6371 - 0.6669i \\ 0.0000 \\ -0.5075 \\ -0.9683 \end{bmatrix}$$

注意,系统除了有一个极点在原点外,其他所有极点均在左半平面(LHP)。这意味着阶跃输入将会产生斜坡输出,所以我们推断出系统具有 1 型系统的行为。

为了将之变换为模态形式,我们利用 MATLAB 中的 canon 函数:

```
sysG = ss(F,G,H3,J)
[Am, Bm, Cm, Dm, TI] =canon(sysG, 'modal')
```

这一运算的结果为

$$\mathrm{Am} = A_m = \begin{bmatrix} -0.6371 & 0.6669 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.6669 & -0.6371 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5075 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9683 \end{bmatrix}$$

注意,复极点出现在 A_m 左上角的 2×2 方阵中,且实极点出现在矩阵的主对角线上。用 canon 函数计算出的其他结果为

$$\mathrm{Bm} = B_m = \begin{bmatrix} -3.3237 \\ -0.1282 \\ -4.0599 \\ -9.9016 \\ 3.9341 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Cm} = C_m = [-0.3814 \quad -0.0963 \quad -0.7071 \quad 0.6625 \quad 0.6124]$$

$$\mathrm{Dm} = D_m = 0, \mathrm{TI} = T^{-1} = \begin{bmatrix} 1.4708 & -1.7221 & -1.4708 & -1.5432 & -3.3237 \\ 0.7377 & 2.8933 & -0.7377 & -2.9037 & -0.1282 \\ -0.7376 & -5.4133 & -0.6767 & -1.3533 & -4.0599 \\ 0.9227 & -6.5022 & -0.9227 & -2.7962 & -9.9016 \\ -0.0014 & 0.1663 & 0.0014 & 0.0449 & 3.9341 \end{bmatrix}$$

用 canon 函数求得恰好是我们要求取的变换矩阵的逆矩阵(正如你在上面方程式中看到的 TI 一样),所以我们需要对 MATLAB 结果转换一下。求逆运算来自语句:

T=inv(TI)

且其结果为

$$
\mathrm{T}=\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0.1168 & -0.1925 & -0.7071 & 0.4871 & 0.5887\\ 0.0270 & 0.1003 & 0.0000 & -0.1236 & -0.2850\\ -0.8797 & -0.0000 & -0.7071 & 0.8379 & 0.6360\\ 0.2802 & -0.2933 & 0.0000 & -0.2126 & -0.3079\\ -0.0040 & -0.0010 & 0.0000 & 0.0075 & 0.2697\end{bmatrix}
$$

用[V,P]=eig(F)计算的特征矩阵为

$$
\mathrm{V}=\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}0.1168-0.1925i & 0.1168+0.1925i & -0.7071 & 0.4871 & 0.5887\\ 0.0270+0.1003i & 0.0270-0.1003i & 0.0000 & -0.1236 & -0.2850\\ -0.8797 & -0.8797 & -0.7071 & 0.8379 & 0.6360\\ 0.2802-0.2933i & 0.2802+0.2933i & 0.0000 & -0.2126 & -0.3079\\ -0.0040-0.0010i & -0.0040+0.0010i & 0.0000 & 0.0075 & 0.2697\end{bmatrix}
$$

注意,实变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的前两列分别是由 $\boldsymbol{V}$ 的第一列的第一个特征向量的实部和虚部组成的。正是由于这一步才使得复数根出现在矩阵 $\boldsymbol{A}_m$ 的左上角的 2×2 方阵中。$\boldsymbol{V}$ 中的向量被标准化为单位长度,这却导致了 $\boldsymbol{B}_m$ 和 $\boldsymbol{C}_m$ 中的元素为非标准化值。如果要求把它标准化,我们可以容易地找到变换矩阵更进一步地使得 $\boldsymbol{B}_m$ 中的每一个元素等于 1 或者交换极点出现的次序。

7.4.2 从状态方程求解动态响应

研究了状态变量方程的结构后,现在我们把注意力转向求解状态描述下的动态响应,并找出状态描述与我们早前在第 6 章中所讨论的频率响应、极点和零点之间的关系。让我们从式(7-21a)和式(7-21b)给出的一般状态方程开始,并且从频率域上考虑问题。对下式进行拉普拉斯变换

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{G}u \tag{7-44}$$

我们得到

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{F}\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{G}U(s) \tag{7-45}$$

上式是一个代数方程。如果我们把包含 $\boldsymbol{X}(s)$ 的项移到式(7-45)的左边,同时注意在矩阵乘法中次序是非常重要的,我们得到①

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{G}U(s)+\boldsymbol{x}(0)$$

等式两边同乘以 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})$ 的逆矩阵,得

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G}U(s)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{x}(0) \tag{7-46}$$

系统的输出为

$$Y(s)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}(s)+JU(s) \tag{7-47a}$$

$$=\boldsymbol{H}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G}U(s)+\boldsymbol{H}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{x}(0)+JU(s) \tag{7-47b}$$

① 单位阵 $\boldsymbol{I}$ 是指主对角线元素为 1 而其他元素为 0 的矩阵;所以 $\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$。

该方程式表示所有初始状态和外部强迫输入作用下的输出响应。在这种情况下，外部输入的系数是系统的传递函数，可表示为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\boldsymbol{H}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G}+J \tag{7-48}$$

例7.12 状态描述下的热系统传递函数

用式(7-48)找出式(7-15a)和式(7-15b)描述的热力系统的传递函数。

解：系统的状态变量描述矩阵为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-7 & -12\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=[1\quad 2],\qquad \boldsymbol{J}=0$$

根据式(7-48)计算传递函数，由

$$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}s+7 & 12\\ -1 & s\end{bmatrix}$$

计算出

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}s & -12\\ 1 & s+7\end{bmatrix}}{s(s+7)+12} \tag{7-49}$$

然后将式(7-49)代入式(7-48)得到

$$G(s)=\frac{[1\quad 2]\begin{bmatrix}s & -12\\ 1 & s+7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}{s(s+7)+12} \tag{7-50}$$

$$=\frac{[1\quad 2]\begin{bmatrix}s\\1\end{bmatrix}}{s(s+7)+12} \tag{7-51}$$

$$=\frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)} \tag{7-52}$$

结果也可以用以下的MATLAB语句得到：

```
[num,den] = ss2tf(F,G,H,J)
```

得到num = [0 1 2]且den = [1 7 12]，这与手工计算结果是一致的。

因为式(7-48)用一般状态空间描述矩阵 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$ 和 J 来表示传递函数，所以我们可以用这些矩阵表示极点和零点。早前我们看到将状态矩阵变换为对角阵形式，极点作为特征值出现在矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的主对角线上。现在我们用系统论的观点把极点和零点看作包含在系统的瞬态响应中。

正如我们在第3章所看到的，传递函数 $G(s)$ 的极点就是一般频率 s 的值，所以如果 $s=p_i$，则系统在没有强迫函数的作用下对初始条件的响应为 $K_i e^{p_i t}$。在本书中，p_i 被称为系统的**自然频率(natural frequency)**或**自然状态(natural mode)**。如果我们用状态空间方程(7-21a～7-21b)并令强迫函数 u 为零，我们有

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x} \tag{7-53}$$

如果我们假设一些(未知的)初始条件

$$x(0) = x_0 \tag{7-54}$$

则整个状态运动按照相同的自然频率进行,状态可以写为 $x(t) = e^{p_i t}x_0$。代入式(7-53)得到

$$\dot{x}(t) = p_i e^{p_i t} x_0 = Fx = Fe^{p_i t} x_0 \tag{7-55}$$

或

$$Fx_0 = p_i x_0 \tag{7-56}$$

我们可以将式(7-56)改写为

$$(p_i I - F)x_0 = 0 \tag{7-57}$$

式(7-56)和(7-57)中矩阵 F 的特征值 p_i 和特征向量 x_0 构成了我们在式(7-38)中看到的特征向量/特征值问题。如果我们只对特征值感兴趣,可以利用以下事实求出特征值,对于任意非零 x_0,式(7-57)有解,当且仅当

$$\det(p_i I - F) = 0 \tag{7-58}$$

这些方程式再次表明传递函数的极点就是系统矩阵 F 的特征值。行列式(7-58)是特征值 p_i 的多项式,称为**特征方程(characteristic equation)**。在例 7.10 中,我们计算用能控标准型表示的一个特殊矩阵的特征值和特征向量。作为系统极点的另一种求法,我们可以解特征方程(7-58)。对于式(7-15a)和式(7-15b)所描述的系统,我们可以由式(7-58)求得极点,通过解以下方程:

$$\det(sI - F) = 0 \tag{7-59a}$$

$$\det\begin{bmatrix} s+7 & 12 \\ -1 & s \end{bmatrix} = 0 \tag{7-59b}$$

$$s(s+7) + 12 = (s+3)(s+4) = 0 \tag{7-59c}$$

这再一次证实系统的极点就是 F 的特征值。

我们也可以从系统论的观点出发,通过状态变量描述矩阵 F、G、H 和 J 确定系统的零点。从这个角度来看,零是广义频率 s 的一个值,这样系统可以在非零输入和非零状态的情况下得到零输出。如果输入是零频率 z_i 的指数形式,即

$$u(t) = u_0 e^{z_i t} \tag{7-60}$$

则输出恒等于零,即:

$$y(t) \equiv 0 \tag{7-61}$$

式(7-60)和式(7-61)的状态空间描述为

$$u = u_0 e^{z_i t}, \quad x(t) = x_0 e^{z_i t}, \quad y(t) \equiv 0 \tag{7-62}$$

所以

$$\dot{x} = z_i e^{z_i t} x_0 = F e^{z_i t} x_0 + G u_0 e^{z_i t}, \tag{7-63}$$

或者

$$[\, z_i I - F \;\; -G \,] \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{7-64}$$

且

$$y = Hx + Ju = He^{z_i t} x_0 + J u_0 e^{z_i t} \equiv 0 \tag{7-65}$$

联立式(7-64)和式(7-65),我们得到

$$\begin{bmatrix} z_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H} & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7-66}$$

从式(7-66)我们可以总结出：状态空间的零点就是满足式(7-66)具有非平凡解的 z_i 的一个值。对于一个输入和一个输出，矩阵是方阵，式(7-66)的解等效于以下行列式的解

$$\det\begin{bmatrix} z_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H} & J \end{bmatrix}=0 \tag{7-67}$$

例 7.13　状态描述下的热学系统的零点

计算方程(7-15)所描述的热力系统的零点。

解：我们用式(7-67)计算系统的零点

$$\det\begin{bmatrix} s+7 & 12 & -1 \\ -1 & s & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}=0$$

$$-2-s=0$$

$$s=-2$$

注意，此处所得的结果与由式(7-12)给出的传递函数的零点一致。该结果也可由以下 MATLAB 语句得到：

```
sysG = ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
z = tzero(sysG)
```

得到 $z=-2.0$。

式(7-58)的特征方程和式(7-67)的零点多项式，可以通过状态描述矩阵结合在一起，以简洁的形式表示传递函数为

$$G(s)=\frac{\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H} & J \end{bmatrix}}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})} \tag{7-68}$$

(更多细节请看附录 C)虽然式(7-68)对理论学习来说是一个简洁的公式，但它对数值误差非常敏感。Emami-Naeini 和 Van Dooren(1982)描述了计算传递函数的一种数值上稳定的算法。给定传递函数，我们可以计算频率响应 $G(j\omega)$，且正如前面所讨论的，我们也可以利用式(7-57)和式(7-66)得到极点和零点，这些决定了系统的瞬态响应，就如我们在第 3 章看到的。

例 7.14　磁带驱动器状态方程的分析

计算例 7.11 给出的磁带驱动器伺服系统方程的极点、零点和传递函数。

解：有两种不同的方法计算此问题的解。最直接的就是用 MATLAB 函数 ss2tf(状态空间到传递函数)，将直接得到分子和分母多项式。此函数允许多输入多输出；函数的第 5 个参数表明将使用哪一个输入。虽然在这里我们只有一个输入，但我们仍然必须设置该参数。电机电流输入与伺服电机位置输出之间的传递函数计算式为

[N2, D2] = ss2tf(F, G, H2, J, 1)

结果为

N2 = [0 0.0000 0 −0.0000 0.6000 1.2000]

D2 = [1.0000 2.7500 3.2225 1.8815 0.4180 0.000]

类似地，对于读/写磁头的位置，其传递函数多项式由下式计算

[N3, D3] = ss2tf(F, G, H3, J, 1)

得到结果

N3 = [0 0.0000 −0.0000 0.7500 1.3500 1.2000]

D3 = [1.0000 2.7500 3.2225 1.8815 0.4180 0.0000]

最后，张力的传递函数为

[NT, DT] = ss2tf(F, G, HT, J, 1)

得到

NT = [0 0.0000 −0.1500 −0.4500 −0.3000 −0.0000]

DT = [1.0000 2.7500 3.2225 1.8815 0.4180 0.0000]

现在检验一下用这种方法得到的极点和零点与其他方法得到的结果是否一致。对于一个多项式，我们利用 roots 函数：

$$\text{roots}(D3)=\begin{bmatrix}-0.6371+0.6669i\\-0.6371-0.6669i\\-0.9653\\-0.5075\\-0.0000\end{bmatrix}$$

与例 7.11 对比，我们证实结果是一致的。

那么零点呢？我们可以通过求分子多项式的根得到零点。我们计算多项式 N3 的根：

$$\text{roots}(N3)=\begin{bmatrix}-1.369\times10^{7}\\+1.369\times10^{7}\\-0.9000+0.8888i\\-0.9000-0.8888i\end{bmatrix}$$

这里我们注意到根的幅度级数为 10^7，这似乎与多项式给出的值不一致。问题就在于 MATLAB 用多项式的很小的主要项作为实际值，所以得到实际上表示无穷大的无关根。真正的零点可以通过以下语句截短多项式得到有意义的值

N3R = N3(4 : 6)

得到

N3R= [0.7500 1.3500 1.200]

$$\text{roots}(N3R)=\begin{bmatrix}-0.9000+0.8888i\\-0.9000-0.8888i\end{bmatrix}$$

另一种方法是分别计算极点和零点。如果有需要，联合它们得到传递函数。极点可以由例 7.11 中的 eig 函数计算得到，且为

$$P=\begin{bmatrix}-0.6371+0.6669i\\-0.6371-0.6669i\\0.0000\\-0.5075\\-0.9683\end{bmatrix}$$

零点可以用函数 tzero(传输零点)通过式(7-66)的等效式计算得到。零点由所使用的输出决定,下面我们就分情况给出结果。如果把磁带在伺服电机的位置作为输出,以下语句

```
sysG2 = ss(F, G, H2, J)

ZER2 = tzero(sysG2)
```

得到

ZER2 = −2.0000.

若把磁带通过读/写磁头的位置作为输出,利用以下语句

```
sysG3 = ss(F, G, H3, J)

ZER3 = tzero(sysG3)
```

得到

$$\text{ZER3}=\begin{bmatrix}-0.9000+0.8888i\\-0.9000-0.8888i\end{bmatrix}$$

我们发现这些结果与先前用分子多项式 N3 计算出来的值一致。最后,如果把张力作为输出,我们用

```
sysGT = ss(F, G, HT, J)

ZERT = tzero(sysGT)
```

得到

$$\text{ZERT}=\begin{bmatrix}-1.0000\\-0.0000\\-2.0000\end{bmatrix}$$

由这些结果我们可以写出传递函数,如位置 x_3 的传递函数为

$$G(s)=\frac{X_3(s)}{E_1(s)}=\frac{0.75s^2+1.35s+1.2}{s^5+2.75s^4+3.22s^3+1.88s^2+0.418s}=\frac{0.75(s+0.9\pm 0.8888j)}{s(s+0.507)(s+0.968)(s+0.637\pm 0.667j)} \tag{7-69}$$

7.5 全状态反馈的控制规律设计

正如在全章概述中所提到的,状态空间设计法的其中一个显著特点就是它由一系列独立的设计步骤构成。第一步,已经在 7.5.1 节中讨论过,就是确定控制规律。控制规律的用途就是允许我们为闭环系统分配一组极点使之得到满意的动态响应,即符合上升时间和其他瞬态响应指标。在 7.5.2 节中我们将说明如何用全状态反馈引入参考输入,在 7.6 节,我们将描述确定极点使设计具有好的控制品质的过程。

第二步——如果全状态不可用,这一步是必需的——就是设计**估计器**(estimator)(有时称为**观测器**(observer)),即根据式(7-21b)表示的系统所提供的测量值,计算整个状态向量的一个估计。我们将在 7.7 节中检查估计器的设计。

第三步就是综合控制规律和估计器。图 7-11 表明了控制规律和估计器是如何结合在一起的,也说明了综合设计是如何代替我们前面所说的**补偿**(compen sation)的。在此,控制规律的计算基于估计状态而不是真实状态。在 7.8 节中,我们将说明这种代替是合理的,也将说明利用综合控制规律和估计器所得到的闭环极点的位置,与分别设计控制器和估计器所得到的结果是一样的。

第四步,也即状态空间设计的最后一步,就是引入参考输入使得装置的输出在上升时间、超调量和调节时间可接受的范围内跟随外部命令。在这种设计中,所有的闭环极点已经被选定,而设计者所考虑的是整个传递函数的零点。图 7-11 表明命令输入 r 与变换设计法中所引入的相对位置一样;尽管如此,在 7.9 节中,我们将说明如何在其他位置引入参考输入,这将导致不同的零点且(通常)会得到较高级的控制效果。

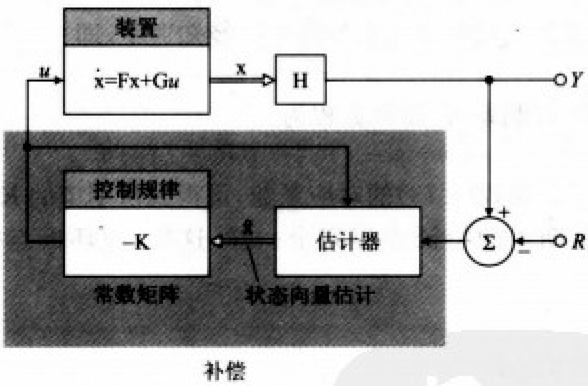


图 7-11 状态空间设计元素示意图

7.5.1 寻找控制规律

正如前面所提到的,状态空间设计法的第一步就是确定控制规律,也就是状态变量的线性组合所组成的反馈,即

$$u=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=-\begin{bmatrix}K_1 & K_2 & \cdots & K_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} \tag{7-70}$$

为了实现反馈,我们假设状态向量的所有元素都可由我们任意配置。当然,在实际应用中,这往往是一个荒谬的假设;另外,一个受过良好训练的控制系统设计者明白其他设计方法并不要求这么多的传感器。假设所有状态变量均可用,以保证第一步设计能继续。

式(7-70)表明,系统的状态向量反馈通道中有一个常数矩阵,如图 7-12 所示。对

于一个 n 阶系统，将有 n 个反馈增益，$K_1,\cdots,K_n$，且由于系统有 n 个根，就有足够的自由度，使得我们可以通过选择合适的 K_i 值而得到任意期望的根的位置。这种自由与根轨迹设计形成了鲜明的对比，在根轨迹设计中，我们只有一个参数且闭环极点被严格限制在轨迹上。

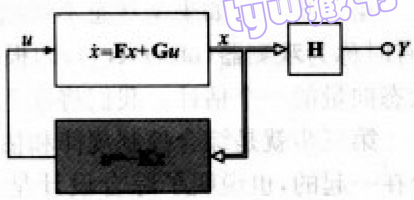


图 7-12　为控制规律设计所引入的假设系统

将式(7-70)给出的反馈规律代入式(7-21a)所描述的系统中，得到

$$\dot{x} = Fx - GKx \tag{7-71}$$

该闭环系统的特征方程为

$$\det[sI - (F - GK)] = 0 \tag{7-72}$$

经过计算，得到包含 $K_1,\cdots,K_n$ 的关于 s 的 n 阶多项式。控制规律设计包括确定增益 $\mathbf{K}$ 使得式(7-22)的根在所期望的位置上。选择符合期望的根的位置是不精确的科学，可能要求设计者反复计算，逐步逼近。这一问题在例 7.15 和例 7.17 以及 7.6 节中都有讨论。现在，我们假设期望的根的位置已经知道了，即

$$s = s_1, s_2, \cdots, s_n$$

则对应的满足期望的(控制系统)特征方程为

$$\alpha_c(s) = (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n) = 0 \tag{7-73}$$

因此，通过匹配式(7-72)和式(7-73)的对应系数，可得到所期望的 $\mathbf{K}$ 的元素。这就迫使系统的特征方程与所期望的特征方程完全一样，这样，闭环极点被在所期望的位置上了。

例 7.15　钟摆的控制规律

假设你有一个钟摆，其频率为 ω_0，且状态空间描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \tag{7-74}$$

确定控制规律以使系统的闭环极点设置为 $-2\omega_0$。换言之，你希望将自然频率加倍，并把阻尼比从 0 增加到 1。

解：由式(7-73)得到

$$\alpha_c(s) = (s + 2\omega_0)^2 \tag{7-75a}$$

$$= s^2 + 4\omega_0 s + 4\omega_0^2 \tag{7-75b}$$

式(7-72)告诉我们

$$\det[sI - (F - GK)] = \det\left\{\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[K_1 \quad K_2]\right)\right\}$$

或

$$s^2 + K_2 s + \omega_0^2 + K_1 = 0 \tag{7-76}$$

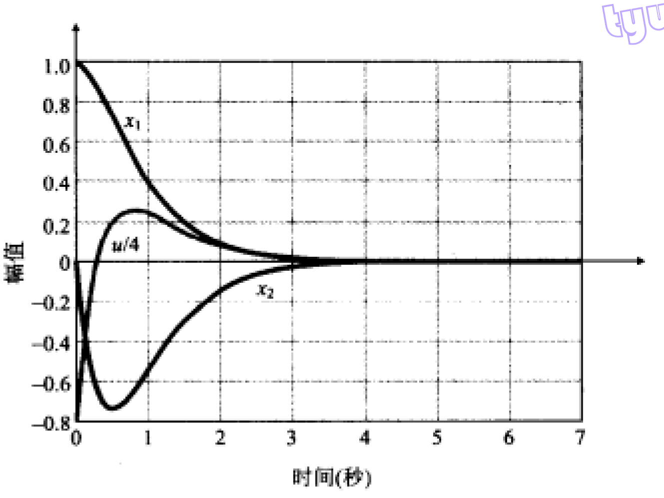


图 7-13 带全状态反馈的无阻尼振荡器脉冲响应($\omega_0=1$)

让式(7-75b)和式(7-76)相同阶数的 s 的系数相等,得到等式

$$K_2 = 4\omega_0$$
$$\omega_0^2 + K_1 = 4\omega_0^2$$

故有:

$$K_1 = 3\omega_0^2$$
$$K_2 = 4\omega_0$$

更简明地,控制规律为

$$\boldsymbol{K} = [K_1 \quad K_2] = [3\omega_0^2 \quad 4\omega_0]$$

图 7-13 给出了闭环系统对初始条件 $x_1=1.0$, $x_2=0.0$, 和 $\omega_0=1$ 的响应。这是一个非常理想的阻尼响应,当系统有两个 $s=-2$ 的根时,可得到该响应曲线。MATLAB 命令 impulse 就是用来描绘该曲线的。

当系统的阶数高于三阶时,用例 7.15 所给出的方法计算增益将显得非常繁琐。但是状态变量方程有一些特殊的"标准"形式使得求解增益的计算过程特别简单。在控制规律设计中十分有用的一种这类标准型就是能控标准型。考虑以下的三阶系统[①]

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u \tag{7-77}$$

则对应的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{b(s)}{a(s)} \tag{7-78}$$

假设我们引入一个辅助变量(被称为部分状态)ξ,如图 7-14a 所示将 $a(s)$ 和 $b(s)$ 联系在一起。则从 U 到 ξ 的传递函数为

$$\frac{\xi(s)}{U(s)} = \frac{1}{a(s)} \tag{7-79}$$

① 这种方法同样适用于更高阶的系统。

或

$$\dddot{\xi}+a_1\ddot{\xi}+a_2\dot{\xi}+a_3\xi=u \tag{7-80}$$

如果重新整理式(7-80)为如下形式，则可以容易地画出与之对应的框图：

$$\dddot{\xi}=-a_1\ddot{\xi}-a_2\dot{\xi}-a_3\xi+u \tag{7-81}$$

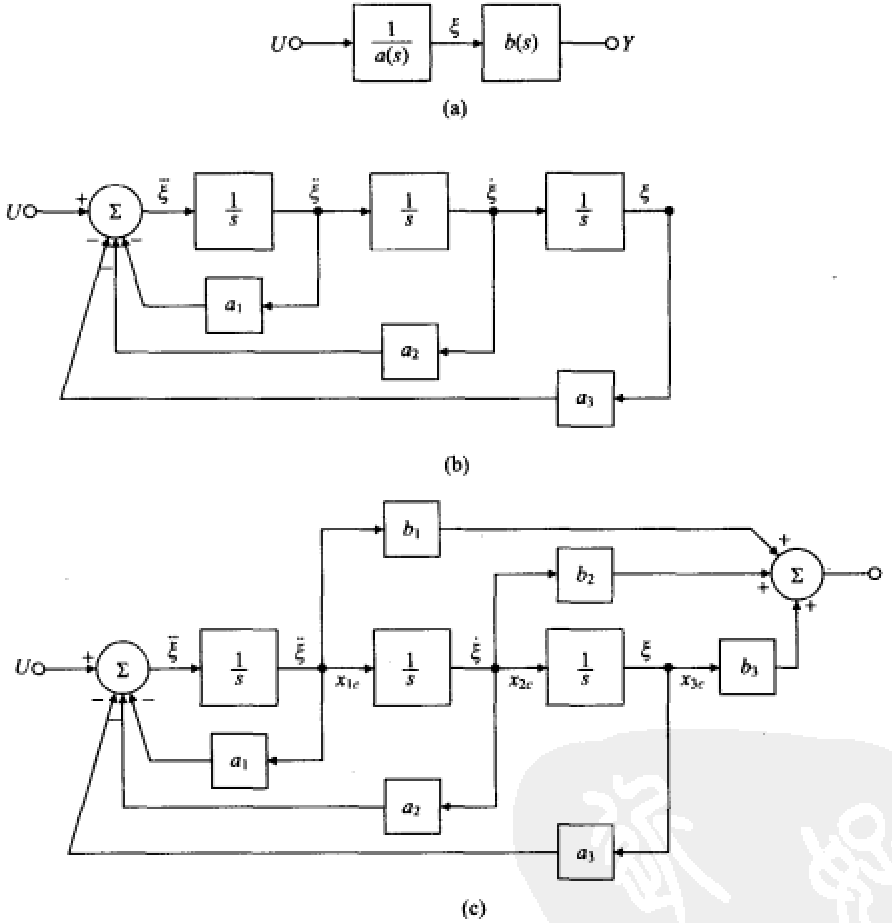


图 7-14　能控标准型的推导图

求和在图 7-14b 中表示，其中右手边的每一个 ξ 都是通过 $\dddot{\xi}$ 的顺序积分得到的。为了求解输出，我们回到图 7-14a，并记

$$Y(s)=b(s)\xi(s) \tag{7-82}$$

这意味着

$$y=b_1\ddot{\xi}+b_2\dot{\xi}+b_3\xi \tag{7-83}$$

再找出积分器的输出，将它们分别乘以 $\{b_i\}$ 的相应元素，并通过加法器得到式(7-77)等号右边的输出，如图 7-14c 所示。在这种情况下，所有反馈回路都回到输入(或控制变量)的施加点处，所以这种形式被称为能控标准型。利用梅森公式或者基本的框图法将该结构化简，结果表明该结构的传递函数即为 $G(s)$。

通常，从左到右把三个积分器的输出作为系统状态，记为

$$x_1 = \ddot{\xi}, \quad x_2 = \dot{\xi}, \quad x_3 = \xi \tag{7-84}$$

得到

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dddot{\xi} = -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2 \end{aligned} \tag{7-85}$$

现在可以写出描述能控标准型的一般矩阵：

$$\boldsymbol{F}_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7-86a}$$

$$\boldsymbol{H}_c = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad b_n], \quad J_c = 0 \tag{7-86b}$$

系统矩阵的这种特殊结构被称为**上相伴型**(**upper companion from**)，因为特征方程为 $a(s)=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}\cdots+a_n$，该首项系数为 1 的"相伴型"多项式的系数是矩阵 $\boldsymbol{F}_c$ 的第一行的元素。如果现在计算闭环系统矩阵 $\boldsymbol{F}_c-\boldsymbol{G}_c\boldsymbol{K}_c$，我们得到

$$\boldsymbol{F}_c - \boldsymbol{G}_c\boldsymbol{K}_c = \begin{bmatrix} -a_1-K_1 & -a_2-K_2 & \cdots & \cdots & -a_n-K_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7-87}$$

直观地比较式(7-86a)和式(7-87)，可知闭环特征方程为

$$s^n + (a_1+K_1)s^{n-1} + (a_2+K_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n+K_n) = 0 \tag{7-88}$$

所以，如果由所期望的极点得到的特征方程如下：

$$\alpha_c(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0 \tag{7-89}$$

则所需的反馈增益可以通过上式(7-88)和式(7-89)的对应系数相等而得到：

$$K_1 = -a_1+\alpha_1, K_2 = -a_2+\alpha_2, \cdots\cdots, K_n = -a_n+\alpha_n \tag{7-90}$$

至此，我们已有了控制设计过程的基础。给定一个由任意$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$描述的 n 阶系统并给定一个首项系数为 1 的 n 阶特征多项式 $\alpha_c(s)$，则设计步骤为：(1)取状态变换式 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Tz}$ 将$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$变换为能控标准型$(\boldsymbol{F}_c,\boldsymbol{G}_c)$，(2)利用式(7-90)通过观察解出控制增益，并给出控制规律 $u=-\boldsymbol{K}_c\boldsymbol{z}$。(3)因为这样求出的增益是相对于能控型状态的，还必须将增益变换为相对初始状态的，得到 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_c\boldsymbol{T}^{-1}$。

这种变换法的另一实现途径是 **Ackermann 公式**(1972)，它由三步组成：将矩阵变换为$(\boldsymbol{F}_c,\boldsymbol{G}_c)$、求解增益，再变换下面这种非常简洁的形式

$$\boldsymbol{K} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]\mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\boldsymbol{F}) \tag{7-91}$$

其中，

$$\mathcal{C} = [\boldsymbol{G} \quad \boldsymbol{FG} \quad \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{G} \quad \cdots \quad \boldsymbol{F}^{n-1}\boldsymbol{G}] \tag{7-92}$$

式中，$\mathcal{C}$ 是我们在 7.4 节中见到的能控性矩阵，n 代表系统的阶数和状态变量的个数，且 $\alpha_c(\boldsymbol{F})$ 是一个由下式定义的矩阵：

$$\alpha_c(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}^n + \alpha_1\boldsymbol{F}^{n-1} + \alpha_2\boldsymbol{F}^{n-2} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{I} \tag{7-93}$$

其中 α_i 是所期望的特征多项式(7-89)的系数，注意式(7-93)是一个矩阵方程。

例 7.16　无阻尼振荡器的 Ackermann 公式

(a) 利用 Ackermann 公式求解例 7.15 中无阻尼振荡器的增益。

(b) 设 $\omega_0=1$，用 MATLAB 验证计算结果。

解：(a) 所期望的特征方程为 $\alpha_c(s)=(s+\omega_0)^2$，所以期望的特征多项式的系数为

$$\alpha_1=4\omega_0,\quad \alpha_2=4\omega_0^2$$

将它代入到式(7-93)，得到

$$\alpha_c(\boldsymbol{F})=\begin{bmatrix}-\omega_0^2 & 0\\ 0 & -\omega_0^2\end{bmatrix}+4\omega_0\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}+4\omega_0^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{7-94a}$$

$$=\begin{bmatrix}3\omega_0^2 & 4\omega_0\\ -4\omega_0^3 & 3\omega_0^2\end{bmatrix} \tag{7-94b}$$

能控性矩阵为

$$\mathcal{C}=[\boldsymbol{G}\quad \boldsymbol{FG}]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

由此得到

$$\mathcal{C}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{7-95}$$

最后，将式(7-95)和式(7-94b)代入式(7-91)，得到

$$\boldsymbol{K}=[K_1\quad K_2]=[0\quad 1]\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\omega_0^2 & 4\omega_0\\ -4\omega_0^3 & 3\omega_0^2\end{bmatrix}$$

故有

$$\boldsymbol{K}=[3\omega_0^2\quad 4\omega_0]$$

这与我们先前得到的结果是一样的。

(b) 相应的 MATLAB 语句为：

```
wo = 1;
F = [0 1;-wo*wo 0];
G = [0;1];
pc = [-2*wo;-2*wo];
K = acker(F,G,pc)
```

得到 $\boldsymbol{K}=[3\ 4]$，与手工计算结果一致。

正如我们在上面所提到的，能控性矩阵计算的数值精度非常差，这也会传递到 Ackermann 公式中。式(7-91)，可用 MATLAB 函数 acker 实现，该式可用于状态变量数量较小(≤10)的单输入单输出系统的设计，对于更复杂的情况，可以找到更可靠的公式，用 MATLAB 函数 place 实现。关于 place 函数的使用，有一个小小的限制条件：因为它是建立在分配闭环特征向量的基础上的，所以期望的闭环极点不能有重复，也就是说，极点必须是单根[1]，而 acker 函数则没有这样的限制条件。

---

① 为了克服这一限制，可以将重极点移动一个很小的偏移数值将它们化为单极点。

我们可以通过状态反馈将系统极点分配到任意期望的位置，这是一个非常重要的结论。这一节的讨论表明：如果我们能够将(F,G)变换为能控标准型(F_c,G_c)，那么这种极点分配就是可能的，如果系统是能控的，反过来配置也是可能的。在某些极少有的情况下，系统可能是不能控的，这时，不可能找到控制规律来任意配置极点位置。**不能控系统**(uncontrollable system)有某些状态或子系统是不受控制影响的。这通常意味着，系统的这些部分在物理上与输入是不相连的。举个例子，有一个全是单根的用模态标准型表示的系统，如果 B_m 矩阵有一个**零元素输入**，则其中一个模态变量与输入是不相连的。对受控系统的一种理想的物理理解，可以避免对不能控系统设计控制器的任何尝试。如前所述，存在能控性的代数判据；然而，没有任何数学判据可以取代控制工程师对物理系统的理解。实际情况是这样的，每一个状态都是在一定程度上能控的，而当数学判据表明系统是能控的时，某些状态的能控性可能很差，以至于对这些状态进行的控制设计实际上是毫无疑义的。

飞机的控制就是某些状态为若能控性的一个很好的例子。飞机俯仰角运动 x_p 主要受升降舵 δ_e 的影响，而同时也轻微地受倾侧运动 x_r 影响较小。倾侧运动实质上只受副翼 δ_a 的影响。这些变量之间关系的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p & \epsilon \\ 0 & F_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ 0 & G_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_a \end{bmatrix} \tag{7-96}$$

其中含有小数值 ϵ 的矩阵表示倾侧运动与俯仰角运动之间的弱耦合。用数学判据方法验证系统的能控性将得到以下结论：副翼和升降舵是能控制飞机的俯仰角运动(也就是高度)的。然而，试图通过副翼倾侧飞机来控制飞机的高度是不现实的。

下面再举一个例子来说明用状态反馈进行极点配置的一些特性，以及能控性丧失对该过程造成的影响。

例 7.17 零点的位置如何影响控制规律

式(7-35)是用能观标准型描述的特殊热力学系统，有一个零点在 $s=z_0$。(a)找出使得系统的极点为 $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$ 的根(即 $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$)所需的状态反馈增益。(b)当参数取值为 $z_0=2$，$\zeta=0.5$ 和 $\omega_n=2$ 转/秒，用 MATLAB 重新计算结果。

解：

(a) 状态描述矩阵为

$$A_o = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 1 \\ -z_0 \end{bmatrix}$$

$$C_o = [1 \quad 0], \quad D_o = 0$$

首先我们把这些矩阵代入式(7-72)，得到含有未知增益和零点位置的特征方程：

$$s^2 + (7 + K_1 - z_0 K_2)s + 12 - K_2(7z_0 + 12) - K_1 z_0 = 0$$

然后我们令该方程与所期望的特征方程相等，得到如下的等式

$$K_1 - z_0 K_2 = 2\zeta\omega_n - 7$$

$$-z_0 K_1 - (7z_0 + 12)K_2 = \omega_n^2 - 12$$

这些方程组的解为

$$K_1 = \frac{z_0(14\zeta\omega_n - 37 - \omega_n^2) + 12(2\zeta\omega_n - 7)}{(z_0+3)(z_0+4)}$$

$$K_2 = \frac{z_0(7 - 2\zeta\omega_n) + 12 - \omega_n^2}{(z_0+3)(z_0+4)}$$

(b) 以下的 MATLAB 语句可用来求解：

```
Ao = [-7 1;-12 0];
zo = 2;
Bo = [1;-zo];
pc = roots([1 2 4]);
K = place(Ao,Bo,pc)
```

用这些语句求解，得到 $\boldsymbol{K}$=[-3.80 0.60]与手工计算得到的结果一致。如果零点的位置与其中一个开环极点很接近，如 $z_0=-2.99$，则我们得到 $\boldsymbol{K}$=[2052.5 −688.1]。

从这个例子中我们得到两个重要结论。第一个结论是增益随着零点 z_0 靠近−3 和−4 而增大，当达到此二值时，系统失去能控性。换言之，当能控性几乎失去时，控制增益将变得非常大。

随着能控性的逐渐丧失，系统必须加倍努力工作来实现控制。

该例子给出的第二个重要结论是，当所期望的闭环带宽（由 ω_n 表示）增加时，K_1 和 K_2 的值都随着增加。由此，我们可以推出：

要将极点移动一段长距离，要求有较大的增益。

有了这些结论，我们进一步讨论应该如何选择期望极点的位置。在我们开始这一主题之前，通过说明如何将参考输入加到这样的系统上以及得到的响应特性有何特点，来完成全状态反馈设计。

7.5.2 引入全状态反馈的参考输入

到目前为止，控制规律已经由式(7-70)给出，即 $u=-\boldsymbol{Kx}$。为了研究配置极点设计的系统对输入命令的瞬态响应，有必要将参考输入引入到系统中。一个很简单的方法就是将控制输入改为 $u=-\boldsymbol{Kx}+r$。但是，这种系统对阶跃输入几乎必然产生一个非零的稳态误差。修正这个问题的方法是令系统的输出误差为零，计算对应的状态和控制输入的稳态值，然后强迫它们取这些值。如果所期望的状态和控制输入的终值分别为 $\boldsymbol{x}_{ss}$ 和 u_{ss}，则新的控制公式应为

$$u = u_{ss} - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{ss}) \tag{7-97}$$

这样，当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{ss}$（无误差）时，$u=u_{ss}$。为了得到正确的终值，我们必须求解相关方程，使得系统对任意常数输入的稳态误差为零。系统的微分方程为如下的标准形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Fx} + \boldsymbol{G}u \tag{7-98a}$$

$$y = \boldsymbol{Hx} + Ju \tag{7-98b}$$

在恒稳态系统中，式(7-98a)和(7-98b)可简化为

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{Fx}_{ss} + \boldsymbol{G}u_{ss} \tag{7-99a}$$

$$y_{ss} = \boldsymbol{Hx}_{ss} + Ju_{ss} \tag{7-99b}$$

现在，我们希望解出对于任意的 r_{ss} 都有 $y_{ss}=r_{ss}$ 成立的方程的解。为此，令 $x_{ss}=$

$N_x r_{ss}$和 $u_{ss}=N_u r_{ss}$。利用这些代换，我们可以把式(7-99)写为矩阵方程；消去共同项 r_{ss}，得到如下的增益方程：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H} & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_x \\ N_u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7-100}$$

从方程中可解出 $\boldsymbol{N}_x$和 N_u为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_x \\ N_u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H} & J \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

利用这些值，我们得到了引入参考输入的前提条件，使得系统对于阶跃输入的稳态误差为零：

$$u = N_u r - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{N}_x r) \tag{7-101a}$$

$$= -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + (N_u + \boldsymbol{K}\boldsymbol{N}_x)r \tag{7-101b}$$

括号内的 r 的系数是常数，可以预先计算出来。我们用符号 $\bar{N}$ 表示，所以

$$u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \bar{N}r \tag{7-102}$$

系统的框图如图 7-15 所示。

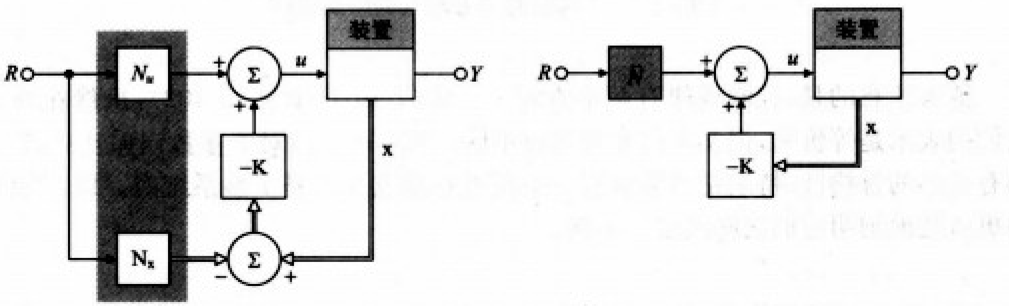


图 7-15 在全状态反馈下引入参考输入的框图

例 7.18 引入参考输入

对在 x_1 处引入的阶跃指令信号，计算使稳态误差为零所需的增益，并且画出例 7.15中振荡器在 $\omega_0=1$ 时的单位阶跃响应。

解：将式(7-74)的矩阵(因为 $y=x_1$，令 $\omega_0=1$ 和 $\boldsymbol{H}=[1 \quad 0]$)代入到式(7-100)得到

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_x \\ N_u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7-103}$$

其解为(用 MATLAB 表示为 x=a\b，其中 a 和 b 分别为矩阵的左边和右边)，所以

$$\boldsymbol{N}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_u = 1$$

并且，对于给定的控制规律，$\boldsymbol{K}=[3\omega_0^2 \quad 4\omega_0]=[3 \quad 4]$

$$\bar{N} = N_u + \boldsymbol{K}\boldsymbol{N}_x = 4 \tag{7-104}$$

对应的阶跃响应(用 MATLAB 的 step 命令)如图 7-16 所示。

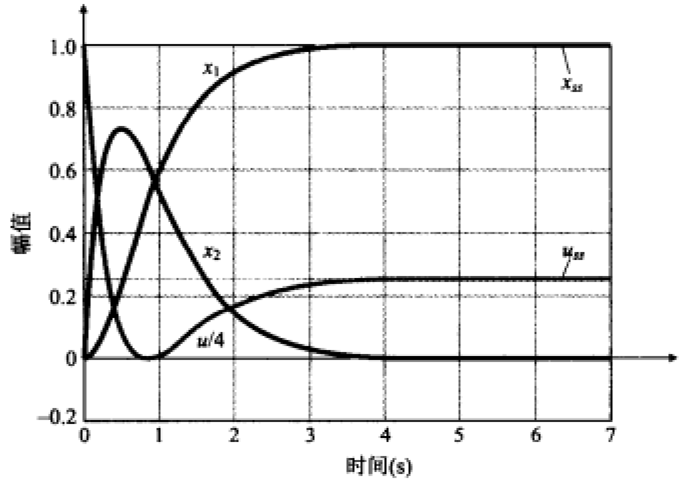


图 7-16　振荡器对参考输入的阶跃响应

值得注意的是,控制规律有两个方程——式(7-101b)和式(7-102),虽然在理论上它们的表示是等价的,但实际的实现却有不同。式(7-101b)对于参数误差比式(7-102)具有更好的鲁棒性,特别是当装置有一个极点在原点并且是 1 型系统时。以下的例子将更清楚地阐明它们之间的这一不同。

例 7.19　1 型系统的参考输入:直流电机

对于例 5.1 的直流电机,计算引入参考输入所需的输入增益,使得对阶跃输入有零稳态误差,其中状态变量形式由以下矩阵描述:

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\qquad J=0$$

假设状态反馈增益为$[K_1\quad K_2]$。

解:把此例的系统矩阵代入式(7-100)求输入增益,得到解为

$$\boldsymbol{N}_x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$N_u=0$$

$$\overline{N}=K_1$$

利用这些值,含 $\boldsymbol{N}_x$ 和 N_u[式(7-101b)]的控制表达式可简化为

$$u=-K_1(x_1-r)-K_2x_2$$

同时,用 $\overline{N}$[式(7-102)]表示的式子变为

$$u=-K_1x_1-K_2x_2+K_1r$$

两个方程所对应的系统框图由图 7-17 给出。当用式(7-102)时,如图 7-17b 所示,必须将输入乘以增益 $\boldsymbol{K}_1(=\overline{N})$,使得 $\boldsymbol{K}_1$ 恰好等于反馈通路中的增益。如果两个增益不能完全匹配,则将

产生稳态误差。另外，如果我们用式(7-101b)，如图 7-17a 所示，在参考输入与第一个状态的差值处只使用一个增益，即使这个增益稍微存在偏差，也会得到零稳态误差。图 7-17a 所示的系统比图 7-17b 所示的系统具有更好的鲁棒性。

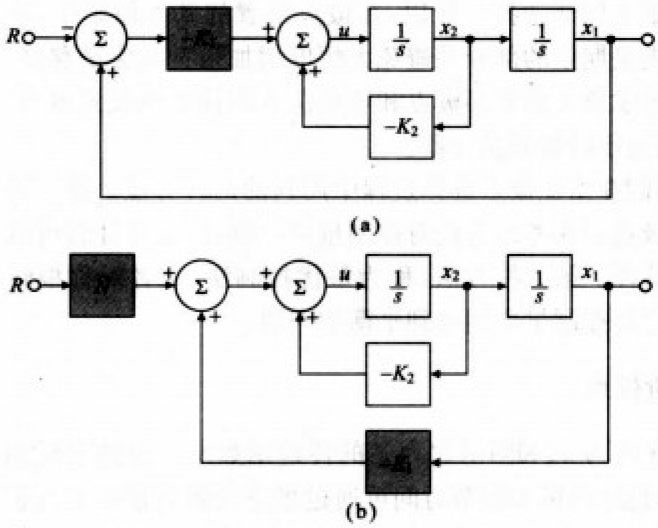


图 7-17 引入参考输入的两种可替换结构

设置了参考输入后，闭环系统就有了输入 r 和输出 y。从状态描述中我们知道，系统极点就是闭环系统矩阵 $\boldsymbol{F}-\boldsymbol{GK}$ 的特征值。为了计算闭环瞬态响应，必须知道从 r 到 y 的传递函数的闭环零点所在的位置。零点可通过将式(7-67)应用于闭环描述求得，其中我们假设从输入 u 与输出 y 之间没有直接通道，所以 $J=0$。零点即为满足下式的 s 值：

$$\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{GK}) & -\overline{N}\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H} & 0 \end{bmatrix}=0 \tag{7-105}$$

我们可以用有关行列式的两个基本性质简化式(7-105)。首先，如果将最后一列除以标量 $\overline{N}$，则使行列式为零的点保持不变。然后，如果将最后一列乘上 K 再加到第一列上，结果消去 GK 项，行列式的值也保持不变。所以求解零点的矩阵方程简化为

$$\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H} & 0 \end{bmatrix}=0 \tag{7-106}$$

在加入反馈之前，式(7-106)和式(7-67)所求得的受控对象的零点是一样的。由此，得到如下的重要结论：

当全状态反馈用于式(7-101b)或式(7-102)时，零点通过反馈保持不变。

7.6 优良设计的极点位置的选择

极点配置设计法的第一步是确定闭环极点的位置。在选择极点位置的时候，记住

以下内容总是有益的：所期望的控制力度的大小与开环极点被反馈作用移开的距离密切相关。此外，当零点接近极点时，系统可能接近于不能控，正如我们在7.5节中所看到的，移动这样的极点期望有较大的控制增益，也即较大的控制量；但是设计者可以在考虑控制量的基础上调节选择。所以，在极点配置的基本原则中，有一种原则是只调整开环响应中不满足期望的部分并避免大幅度增加带宽或尝试移动靠近零点的极点，另一种原则是不考虑原来的开环极点和零点位置而任意地设置极点，允许有更小的增益，故而允许使用更小的控制执行器。

在本节中，我们介绍在极点选择过程中用到的两种方法。第一种方法——主导二阶极点——选择极点而不考虑它们对控制量的影响；但是设计者可以在考虑控制量力度的基础上调节选择。第二种方法（称为最优控制法，或者对称根轨迹法），特别注重在良好的系统响应与控制量之间达到平衡的问题。

7.6.1　主导二阶极点

复极点的角速度为 ω_n 和阻尼比为 ζ 的传递函数所对应的阶跃响应已在第3章中讨论过。上升时间、超调量和调节时间可通过极点位置直接得到改善。我们可以为高阶系统选择闭环极点作为期望的主导二阶极点对，并选择其余极点使其实部对应于充分阻尼状态，这样系统将能够模拟二阶系统的响应。同时，我们必须保证零点在左半平面(LHP)足够远的地方以避免任何对二阶系统的性能产生任何显著的影响。一个含有若干低阻尼高频振荡状态再加上两个刚体低频状态的系统就适用于这一基本原则。这里，我们让低频状态达到期望的 ω_n 值和 ζ 值并选择其余极点的位置以增加高频状态的阻尼，同时保持它们的频率为常数以使得控制量最小。为了说明这一设计方法，很明显需要一个比二阶更高阶的系统，我们将使用例7.11描述的磁带驱动器伺服电机。

例7.20　主导二阶系统的极点配置

用主导二阶极点方法设计磁带伺服电机，以满足超调不大于5%且上升时间不大于4秒，使其峰值强度尽可能小。

解：由图3-16的二阶系统的瞬态响应图可知，当阻尼比 $\zeta=0.7$ 时可满足超调要求，且在该阻尼比下，要使上升时间为4秒要求自然频率大约为1/1.5。系统总共有五个极点，所以其余三个极点必须配置在主导极点对的左边足够远的位置。对我们来说，“远”意味着远极点的瞬态响应过程在主导极点的瞬态响应发生之前就已经结束，并且我们假设每一个无阻尼自然频率的参数4是合适的。出于这方面的考虑，期望极点由下式给出

$$pc=[-0.707+0.707*j;\ -0.707-0.707*j;\ -4;\ -4;\ -4]/1.5; \qquad (7\text{-}107)$$

利用这些期望极点，我们可以对例7.11的式(7-70)的 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 应用acker函数得到控制增益

$$\boldsymbol{K}_2=[8.5123\quad 20.3457\quad -1.4911\quad -7.8821\quad 6.1927] \qquad (7\text{-}108)$$

这些可通过以下MATLAB语句得到：

```
F = [0 2 0 0 0;-.1 -.35 .1 .1.75;0 0 0 2 0;.4 .4 -.4 --1.4 0;0 -.03 0 0 -1];
G = [0;0;0;0;1];
pc = [-.707+.707*j;-.707-.707*j;-4;-4;-4]/1.5;
K2 = acker(F,G,pc)
```

此系统的阶跃响应和对应的张力曲线以及另一个设计(在 7.6.2 节中讨论)由图 7-18和图 7-19 给出。从图中可以看到上升时间大约为 4 秒且超调约为 5%,与指定的相符。

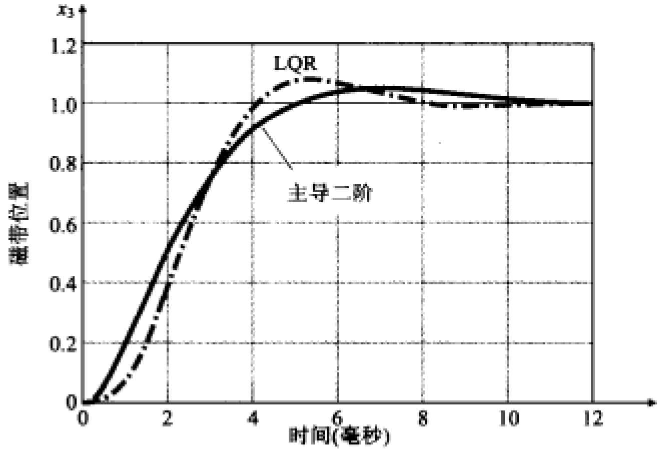


图 7-18 磁带伺服电机系统设计的阶跃响应

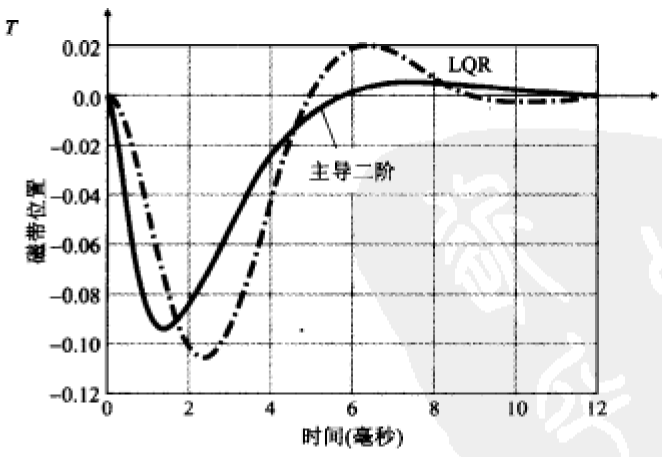


图 7-19 磁带伺服电机的阶跃响应的张力曲线

因为设计过程是循环反复的,我们选择的极点应该被视为第一步,接下来是进一步的修正以尽可能精确地满足要求。

对于以上例子,我们恰好第一次尝试就找到了合适的极点位置。

7.6.2 对称根轨迹法(SRL)

线性控制系统设计的一个更有效和应用更广泛的技术是最佳线性二次调节器

(**linear quadratic regulator**，LQR)。关于最佳线性二次调节器的简化描述就是寻找控制规律使得以下的性能指标

$$\mathcal{J}=\int_0^{\infty}[\rho z^2(t)+u^2(t)]\mathrm{d}t \tag{7-109}$$

对如下的系统能够最小：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{G}u \tag{7-110a}$$

$$z=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{x} \tag{7-110b}$$

其中式(7-109)中的 ρ 是设计者选择的权重系数。值得注意的是使得$\mathcal{J}$最小的控制规律由线性状态反馈给出，即

$$u=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \tag{7-111}$$

在这里，$\boldsymbol{K}$ 的最佳值是使得闭环极点设置在对称根轨迹(SRL)方程(Kailath 1980)的稳定根(即左半平面)的位置上。

$$1+\rho G_0(-s)G_0(s)=0 \tag{7-112}$$

其中 G_0 是从 u 到 z 的开环传递函数：

$$G_0(s)=\frac{Z(s)}{U(s)}=\boldsymbol{H}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}G=\frac{N(s)}{D(s)} \tag{7-113}$$

注意，这是在第 5 章中讨论过的根轨迹问题，这里考虑了参数 ρ，即性能指标式(7-109)中当考虑控制作用 u^2 时衡量 z^2(跟踪误差)的相对损耗。同时也注意到 s 和 $-s$对式(7-112)的影响是相同的；所以，对于式(7-112)的任何根 s_0，则$-s_0$也是其根。我们把得到的根轨迹称为**对称根轨迹**(**symmetric root locus**，SRL)，因为右半平面(RHP)将存在左半平面(LHP)轨迹的镜像；也就是关于虚轴对称。我们可以通过以下步骤选择最优的闭环极点，首先选择矩阵 $\boldsymbol{H}_1$，它定义了跟踪误差并且设计者希望它比较小，然后选择 ρ，它平衡了跟踪误差的重要性与控制量之间的关系。请注意我们将输出选取为跟踪误差而不需要选取为装置的传感输出。这也是为什么我们把式(7-110)的输出叫做 z 而不是 y 的原因。

从式(7-112)的解中，选取一组稳定的极点就是所得到期望的闭环极点，之后我们可以通过极点配置的计算方法，如 Ackermann 公式(式 7-91)，得到 $\boldsymbol{K}$。对于实传递函数 G_0 的所有根轨迹簇，其中每条轨迹也关于实轴对称；所以对实轴和虚轴都对称。我们可以把 SRL 方程写成标准的根轨迹形式

$$1+\rho\frac{N(-s)N(s)}{D(-s)D(s)}=0 \tag{7-114}$$

可以通过将从 U 到 Z 的传递函数的开环极点和零点沿着虚轴对折(这将使得零点和极点数值加倍)，并描绘轨迹得到根轨迹的极点和零点。注意根轨迹可以是 0°或 180°，由式(7-112)中 $G_0(-s)G_0(s)$的符号决定。决定用哪种类型的根轨迹(0°或 180°)的一个快速方法是取不在虚轴上的根轨迹。根轨迹描绘的实轴规则将说明这方法是正确的。对于我们在这里已经作出的能控性假设，以及关于所有的系统状态都在选定的输出 z 中的假设前提下，最佳闭环系统肯定是稳定的；所以根轨迹不可能在虚轴上。

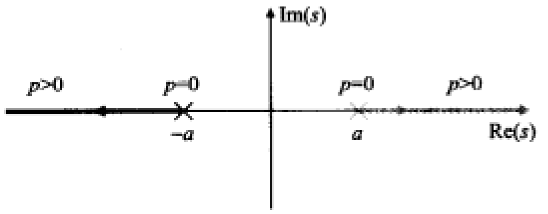


图 7-20 一阶系统的对称根轨迹

例 7.21 伺服电机速度控制系统的对称根轨迹

设 $z=y$,描绘以下伺服电机速度控制系统的对称根轨迹:

$$\dot{y}=-ay+u \tag{7-115a}$$

$$G_0(s)=\frac{1}{s+a} \tag{7-115b}$$

解:本例的 SRL 方程[式(7-112)]为

$$1+\rho\frac{1}{(-s+a)(s+a)}=0 \tag{7-116}$$

图 7-20 给出的对称根轨迹是 0°根轨迹。其最佳(稳定)极点在这种情况下可以直接确定为

$$s=-\sqrt{a^2+\rho} \tag{7-117}$$

所以,使得式(7-109)的性能指标最小的闭环根在实轴上,它距原点的距离由式(7-117)给出,并且总是在开环根的左边。

例 7.22 人造卫星姿态控制系统的 SRL 设计

设 $z=y$,画出人造卫星系统的对称根轨迹(SRL)。

解:该系统的运动方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \tag{7-118}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x \tag{7-119}$$

我们可以从式(7-118)和式(7-119)计算得到

$$G_0(s)=\frac{1}{s^2} \tag{7-120}$$

180°的对称根轨迹簇如图 7-21 所示。得到对称根轨迹的 MATLAB 语句为

```
numGG = [1];
denGG = conv([1 0 0],[1 0 0]);
sysGG = tf(numGG,denGG);
rlocus(sysGG);
```

有趣的是,(稳定)闭环极点的阻尼比为 $\zeta=0.707$。对于给定的 ρ 值,我们选择两个稳定的根,如对于 $\rho=4.07$,选择 $s=-1\pm j1$,然后将它们用于极点配置和控制规律设计。

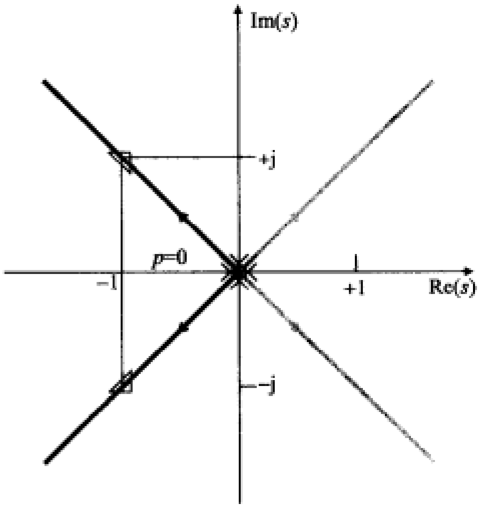


图 7-21　人造卫星的对称根轨迹

在极点配置中选择不同的 ρ 值，对于快速响应（要求 $\int z^2\mathrm{d}t$ 较小）和低控制量（要求 $\int u^2\mathrm{d}t$ 较小）之间的平衡作用也不同。图 7-22 是 ρ 从 0.01 到 100 变化时，人造卫星（双积分器）[式(7-18)]的设计曲线。该曲线对应于控制作用的低值（ρ 值大）和高值（ρ 值小）有两条渐近线（虚线）。实际上，通常选取曲线拐点处附近的点作为 ρ 值。这是因为它在使用控制与响应速度之间取得一个合理的折中。对于人造卫星系统，ρ =1 时对应于曲线的拐点。在这种情况下闭环极点的阻尼比为 ζ=0.707！图 7-23 为相应的奈奎斯特图，其中相位裕度 PM=65°而幅值裕度为无穷大。这些优良的稳定特性是 LQR 设计的一般特征。

利用 SRL 和 LQR 方法也可以为开环不稳定系统的设计配置最佳极点。

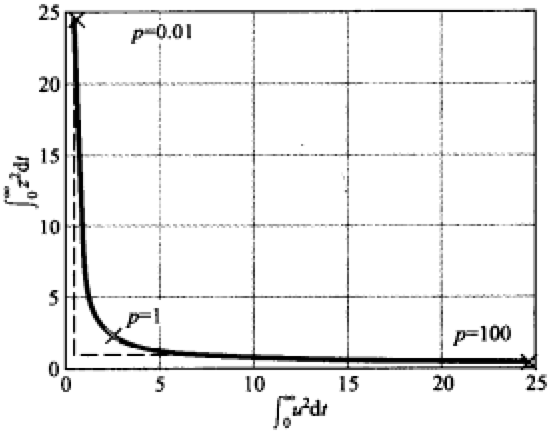


图 7-22　人造卫星对象的设计曲线

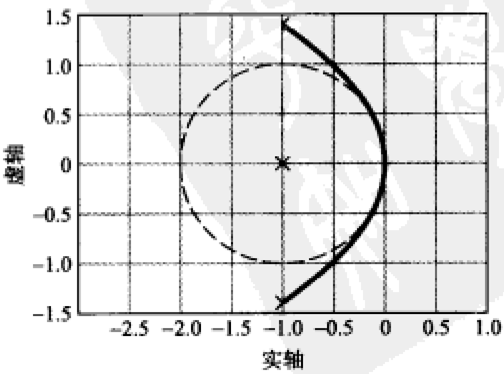


图 7-23　LQR 设计的奈奎斯特图

例 7.23 倒立摆的 SRL 设计

设 $\omega_0=1$，画出经过线性化的简单倒立摆方程的对称根轨迹(SRL)。取位置的两倍加上速度的和作为输出 z(使得位置和速度同时加重或者削弱)。

解：该系统的运动方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \omega_0^2 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}u \tag{7-121}$$

为了得到指定输出 2×位置＋速度，令跟踪误差为

$$z=[2\quad 1]x \tag{7-122}$$

然后计算式(7-121)和式(7-122)，得到

$$G_0(s)=-\frac{s+2}{s^2-\omega_0^2} \tag{7-123}$$

0°对称根轨迹簇如图 7-24 所示。输出该根轨迹的 MATLAB 语句为(设 $\omega_0=1$)

```
numGG=conv(-[1 2],-[-1 2]);
denGG=conv([1 0 -1],[1 0 -1]);
sysGG=tf(numGG,denGG);
rlocus(sysGG);
```

对于 $\rho=1$，我们选择闭环极点为 $-1.36\pm j0.606$，对应的 $\boldsymbol{K}=[-2.23\quad -2.73]$。如果我们把此例的系统矩阵代入式(7-100)的输入增益方程中，我们得到解为

$$\boldsymbol{N}_x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad N_u=1$$

$$\bar{N}=-1.23$$

有了这些值后，含 $\boldsymbol{N}_x$ 和 N_u(式 7.101b)控制表达式可简化为

$$u=-\boldsymbol{K}x+\bar{N}r$$

相应的位置阶跃响应如图 7-25 所示。

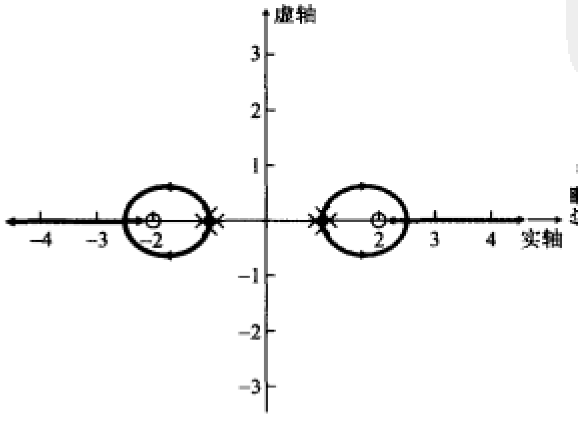


图 7-24 倒立摆的对称根轨迹

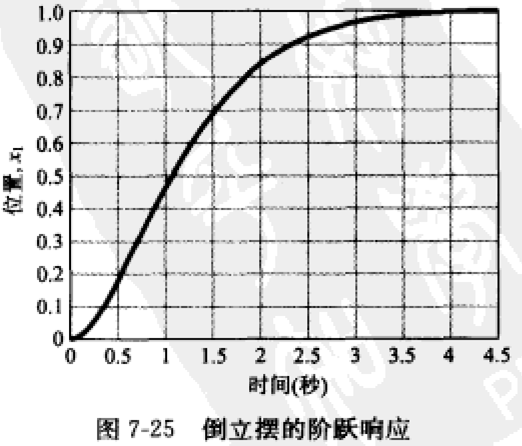


图 7-25 倒立摆的阶跃响应

作为本节的最后一个例子，我们再次考虑磁带伺服电机系统并且引入 LQR 设计，利用计算机直接解出最佳控制规律。从式(7-109)和式(7-111)，我们知道寻找最佳控

制所需要的信息由系统矩阵 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 以及输出矩阵 $\boldsymbol{H}_1$ 给出。大多数计算机辅助软件包，包括 MATLAB，都使用式(7-109)的一个更一般的形式：

$$\mathcal{J}=\int_0^{\infty}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\mathrm{d}t \tag{7-124}$$

如果我们令 $\boldsymbol{Q}=\rho\boldsymbol{H}_1^T\boldsymbol{H}_1$ 且 $\boldsymbol{R}=1$，方程(7-124)把式(7-109)简化为更简单的形式。最佳控制增益的直接解可用以下 MATLAB 语句

$$K=\mathrm{lqr}(F,G,Q,R) \tag{7-125}$$

LQR 迭代设计的一个合理方法可由 Bryson 规则推出(Bryson 和 Ho，1969)。实际上，得到可接受的 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的值的方法是在最开始时选择对角阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 并满足

$$Q_{ii}=1/([x_i^2]\text{的最大可接受值})$$

$$R_{ii}=1/([u_i^2]\text{的最大可接受值})$$

然后在逐步逼近的过程中，修改权重矩阵的值以期在性能指标与控制量之间取得合理的折中。

例 7.24　磁带驱动器的 LQR 设计

(a) 为例 7.11 的磁带驱动器寻找最佳控制，利用位置 x_3 作为输出以满足性能指标。令 $\rho=1$。把结果与先前用主导二阶方法得到的结果进行比较。

(b) 比较当 $\rho=0.1$、1 和 10 时，LQR 设计的结果。

解：

(a) 在这一步中，我们所要做的是将矩阵代入式(7-125)，形成反馈系统，并描绘响应曲线。性能指标矩阵为标量 R=1；本问题中最困难的地方在于确定状态损耗矩阵 Q。已知输出损耗值为 $z=x_3$，从例 7.11 可得到输出矩阵为

$$\boldsymbol{H}_3=[0.5\quad 0\quad 0.5\quad 0\quad 0]$$

若 $\rho=1$，在所求的矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{H}_3^T\boldsymbol{H}_3=\begin{bmatrix}0.25&0&0.25&0&0\\0&0&0&0&0\\0.25&0&0.25&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

利用以下语句，增益可由 MATLAB 给出：

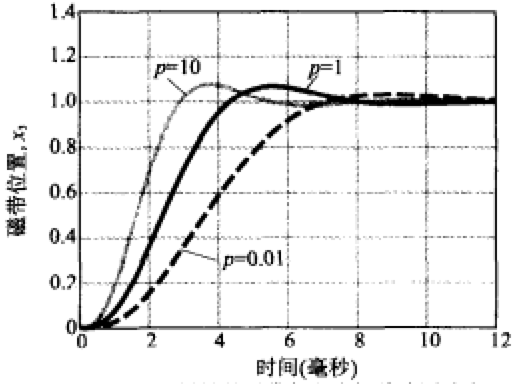
```
F=[0 2 0 0 0;-.1 -.35 .1 .1.75;0 0 0 2 0;.4 .4 -.4 -1.4;0 -.03 0 0 -1];
G=[0;0;0;0;1];
H3=[.5 0 .5 0 0];
R=1;
rho=1;
Q=rho*H3'*H3;
K=lqr(F,G,Q,R)
```

MATLAB 计算得到的增益为

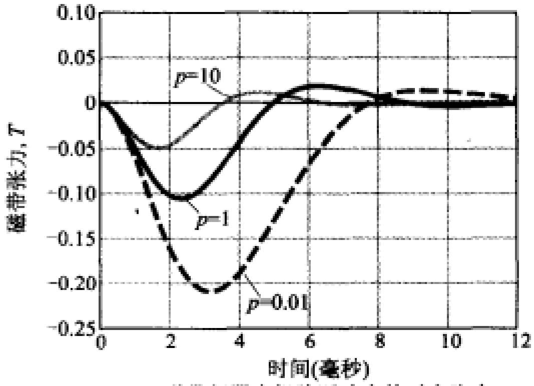
$$\boldsymbol{K}=[0.6526\quad 2.1667\quad 0.3474\quad 0.5976\quad 1.0616] \tag{7-126}$$

位置阶跃和对应的张力在图 7-18 和图 7-19 中(用 step 函数)，可以与早前的响应曲线进行比较。很明显，$\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 的元素可选择的范围比较广，所以为了有效地应用 LQR 方法，需要丰富的经验。

(b) 用与(a)中相同的 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 重复 LQR 设计，但 $\rho=0.1,10$。图 7-26 显示了三种参数设计的位置阶跃和相应的张力的比较。由结果可以看出，较小的 ρ 值对应较高的控制量损耗和较慢的响应速度，而较大的 ρ 值则对应于较低的控制量损耗和相对较快的响应。



(a) 用LQR设计的磁带伺服电机的阶跃响应



(b) 磁带伺服电机阶跃响应的对应张力

图 7-26

LQR 调整极点的限制作用

考虑根轨迹参数(如 ρ)的函数的最佳闭环极点的限制行为是有趣的，但实际上，这些情况不会被用到。

“高代价控制”(**Expensive control**)情况($\rho\to 0$)：式(7-109)主要限制控制能量的使用。如果控制是高代价的，则最佳控制除了移动位于右半平面的点以外，不移动其他任何开环极点。在右半平面的极点只是简单地被移到它们在左半平面的镜像处。完成这一动作，最佳控制只用最小的控制量就能使得系统稳定，但并不尝试移动任何位于左半平面的系统极点。闭环极点的位置还是对称根轨迹原来在左半平面的那些点。在这种情况下，最佳控制并没有加快系统的响应速度。对于人造卫星系统，图 7-22 垂直虚线对应于“高代价控制”的情况并说明了非常低的控制量将导致 z 有非常大的误差。

“廉价控制”(**cheap control**)情况($\rho\to\infty$)：在这种情况下，控制能量并不是研究受控对象，最佳控制规律可以应用任意大小的控制量。控制规律将移动那些靠近左半平面零点的闭环极点的位置。其余的沿着对称根轨迹的渐近线移到无穷远的地方。如果系统是非最小相位系统，某些极点将被移到左半平面零点的镜像的位置，如例 7.23 所示。其余极点将沿着巴特沃斯滤波器的极点模式(Butterworth filter pattern)移到无穷远处，如例 7.22 所示。最佳控制提供了与线性二次调节器能耗函数相协调的尽可能快的响应时间。在这种情况下，反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是不受限制的。对于双积分器对象，图 7-22的水平虚线对应于“廉价控制”的情况。

LQR 调节器的鲁棒特性

Anderson 和 Moore 在 1990 年已经证明了 LQR 设计的奈奎斯特图可以避免图7-23所示的圆心位于−1 处的单位圆。这导致了特别的相位裕度和幅值裕度的特性。可以证明(习题 7-31)返回的差值必须满足

$$|1+\boldsymbol{K}(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G}|\geqslant 1 \tag{7-127}$$

我们把开环增益写成实部和虚部之和的形式:

$$L(\mathrm{j}\omega)=\boldsymbol{K}(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G}=\mathrm{Re}(L(\mathrm{j}\omega))+\mathrm{jIm}\,(L(\mathrm{j}\omega)) \tag{7-128}$$

式(7-127)意味着

$$([\mathrm{Re}\,(L(\mathrm{j}\omega))]+1)^2+[\mathrm{Im}\,(L(\mathrm{j}\omega))]^2\geqslant 1 \tag{7-129}$$

这表示奈奎斯特图实际上一定能避免圆心在−1 处单位圆。这暗示了$\frac{1}{2}<\mathrm{GM}<\infty$,即幅值裕度的上限为 $\mathrm{GM}=\infty$,且其下限为 $\mathrm{GM}=\frac{1}{2}$ (也可参阅第 6 章的习题6-23)。所以 LQR 增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可以乘上一个很大的标量,也可以减半,都能保证闭环系统仍然稳定。相位裕度 PM 至少是 ± 60°。这些裕度是非常大的,但由于建模误差的存在以及缺乏相应的传感器,它们在现实中是达不到的。

7.6.3 几种方法的评论

7.6.1 节和 7.6.2 节所描述的两种选择极点的方法对设计者来说都可选用来进行极点配置的初步设计。请注意,第一种方法(主导二阶极点法)在选择闭环极点时并不考虑满足响应要求所需的控制量的影响。所以在某些情况下,会导致控制量相当的高。另一方面,第二种方法(对称根轨迹法 SRL)选择极点的结果,可以在系统误差和控制力度之间取得一定的平衡。设计者可以简单地找出平衡的改变(通过改变 ρ 值)与系统根的分布,时间响应以及反馈增益之间的关系。不管我们用哪种极点选择的方法,要在带宽,超调,灵敏度,控制力度和其他实际设计要求之间的达到期望的平衡,几乎总是需要做一些必要的修正。在 7.8 节中为阐明补偿所举的例子以及第十章所研究的情况可以帮助我们进一步了解极点选择的方法。

7.7 估计器设计

7.5 节中讨论的控制规律设计假设反馈中用到的所有状态变量都是可测的。然而在大多数情况下,并不是所有的状态变量都可量测的。测量这些值所需的传感器的代价在现实中可能是不允许的,又或者在物理上要量测所有的状态变量是不可能的,比如说,在核反应系统中就不可能测出所有的状态。在这一节中,我们将证明如何用部分可量测值来重构系统的所有状态变量。设状态的估计为 $\hat{x}$,如果我们可以用估计值代替式(7-102)给出的控制规律的真实状态,将给我们的设计带来方便,使得控制规律

变为 $u=-K\hat{x}+\bar{N}r$。在 7.8 节中我们将看到这是可能的，状态估计的构造是状态空间控制设计的一个关键部分。

7.7.1 全阶估计器

状态估计的一个方法是为动态对象构造一个全阶模型，

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gu \tag{7-130}$$

其中 $\hat{x}$ 是真实状态 x 的估计，F、G 和 $u(t)$ 是已知的。所以如果我们可以找到正确的初始条件 $x(0)$ 并令 $\hat{x}(0)$ 与之相等，则估计器是满足要求的。图 7-27 描绘了这个开环估计器。但是，正是因为缺乏 $x(0)$ 的信息才要求构造估计器。另外，估计的状态将准确地跟踪真实状态。所以，如果我们为初值条件构造了一个很差的估计，则估计状态将可能产生不断增加的误差或者误差趋于零的速度很慢以致于失去作用。另外，在已知系统(F,G)中，微小的误差将导致估计状态偏移真实状态。

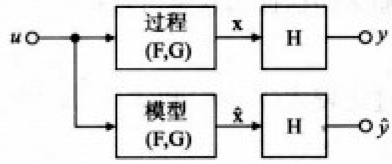


图 7-27 开环估计器

为了研究该估计器的动态特性，我们定义状态估计的误差为

$$\tilde{x} \triangleq x - \hat{x} \tag{7-131}$$

则此误差系统的动态方程为

$$\dot{\tilde{x}} = F\tilde{x},\ \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) \tag{7-132}$$

对于一个稳定系统（即 F 是稳定的），该误差收敛到零，但我们无法改变估计状态收敛到真实状态的速度。另外，误差收敛到零的速度与 F 的自然动态过程收敛速度相同。如果这个收敛速度是满足要求的，则控制作用和估计器都不再需要了。

现在，我们援引黄金律：如果有麻烦，就用反馈。拟考虑将测量输出与估计输出之间的误差信号反馈到输入端，并用该误差信号连续不断地纠正模型。如图 7-28 所示，此方案的方程为

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gu + L(y - H\hat{x}) \tag{7-133}$$

这里，L 是比例增益，其定义为

$$L = [l_1,\ \ l_2,\ \ \cdots,\ \ l_n]^T \tag{7-134}$$

用以满足误差特性。误差的动态方程可通过用真实状态[式(7-44)]减去估计状态[式(7-133)]得到，即误差方程为

$$\dot{\tilde{x}} = (F - LH)\tilde{x} \tag{7-135}$$

则误差的特征方程为

$$\det[sI - (F - LH)] = 0 \tag{7-136}$$

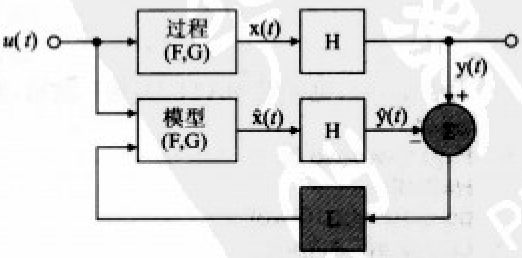


图 7-28 闭环估计器

如果我们选择 L 使得 $F-LH$ 有稳定且足够快速的特征值，则 $\tilde{x}$ 将衰减到零并保持为零——与已知的强迫函数 $u(t)$ 和它对状态 $x(t)$ 的作用无关，与初始条件 $\tilde{x}(0)$ 也无关。这就意味着不管 $\hat{x}(0)$ 是什么值，

$\hat{x}(t)$都将收敛到$x(t)$；另外，我们可以选择误差的动态特性使得其稳定，并比由F决定的开环动态特性收敛速度更快。

注意，在得到式(7-135)的过程中，我们假设F、G和H在物理对象上和估计器的计算机实现上是一样的。如果对象(F,G,H)没有精确的模型，误差的动态特性不再由式(7-135)决定。但是我们可以通过适当选取L使得误差系统至少保持稳定并且误差保持在一个可接受的小范围内，甚至在模型有(小)误差并且输入有扰动的情况下也能保持这种性质。必须强调一点的是，装置和估计器的自然特性是不同的。装置是物理系统，如化学过程或伺服系统，而估计器通常是根据式(7-133)计算估计状态的数字处理器。

L的选择跟控制规律设计中K的选择有相同的方式。如果我们将估计器误差极点的期望位置确定为

$$s_i=\beta_1,\quad \beta_2,\cdots,\beta_n$$

则期望的估计器状态方程为

$$\alpha_e(s)\triangleq(s-\beta_1)(s-\beta_2)\cdots(s-\beta_n) \tag{7-137}$$

通过比较式(7-136)和式(7-137)的系数可以解出L。

例7.25 单摆的估计器设计

为单摆设计一个估计器。计算估计器的增益矩阵使得所有的估计器误差极点为$-10\omega_0$(收敛速度是例7.15中选择的控制极点的5倍)。设$\omega_0=1$，利用MATLAB验证结果。评价估计器的性能。

解：运动方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u \tag{7-138a}$$

$$y=[1\quad 0]x \tag{7-138b}$$

现在要求把估计误差极点配置在$-10\omega_0$。对应的特征方程为

$$\alpha_e(s)=(s+10\omega_0)^2=s^2+20\omega_0 s+100\omega_0^2 \tag{7-139}$$

由式(7-136)，我们得到

$$\det[sI-(F-LH)]=s^2+l_1 s+l_2+\omega_0^2 \tag{7-140}$$

比较式(7-139)和式(7-140)的系数，我们得到

$$L=\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\omega_0\\ 99\omega_0^2\end{bmatrix} \tag{7-141}$$

对于$\omega_0=1$，也可用MATLAB求得结果，用以下MATLAB语句：

```
wo=1;
F=[0 1;-wo*wo 0];
H=[1 0];
pe=[-10*wo;-10*wo];
Lt=acker(F',H',pe);
L=Lt'
```

这将得到$L=[20\quad 99]^T$，与先前手工计算的结果一致。

通过加入真实状态反馈到装置中并描绘估计误差曲线，可测试估计器的性能。注意这并不是系统最终被建立的方法，但这种方法为校验估计器的性能提供了途径。将式(7-71)含有状态

反馈的装置和式(7-133)含有输出反馈的估计器联立，得到以下整个系统的方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F-GK & 0 \\ LH-GK & F-LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \tag{7-142}$$

$$y = [H \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \tag{7-143}$$

$$\tilde{y} = [H \quad -H] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \tag{7-144}$$

整个结构的框图如图 7-29 所示。当 $\omega_0=1$，且初始条件为 $x_0=[1.0 \quad 0.0]^T$ 和 $\hat{x}_0=[0 \quad 0]^T$ 时，闭环系统的响应如图 7-30 所示，其中 K 由例 7.15 得到，而 L 由式(7-141)得到。该响应可用 MATLAB 的 impulse 函数或 initial 函数得到。

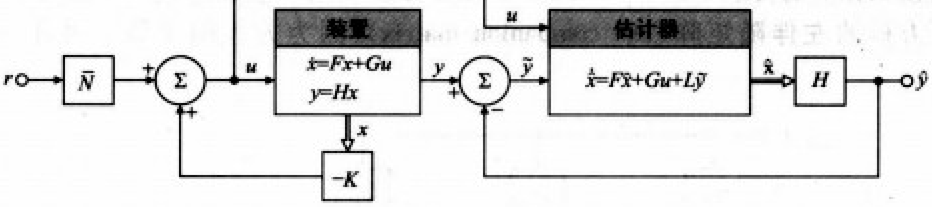


图 7-29 连接到装置的估计器

注意，即使 $\hat{x}$ 的初始条件的值有很大的误差，经过一个初始的瞬态过渡后，估计状态收敛到真实状态。也注意到在我们的设计中，估计误差衰减的速度比状态本身衰减的速度快约五倍。

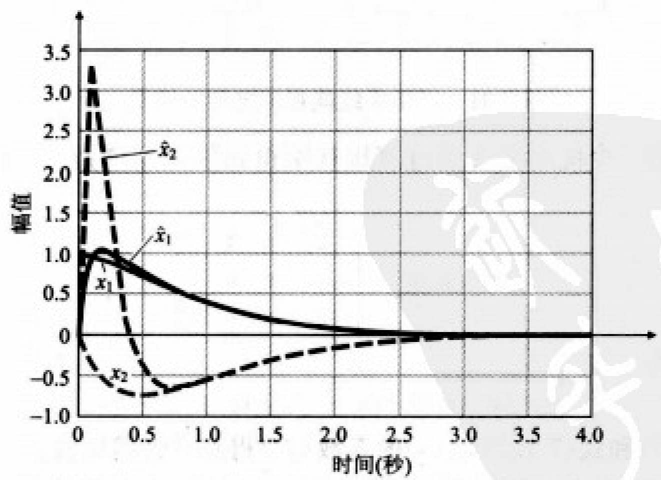


图 7-30 振荡器的初始条件响应的 x 和 $\hat{x}$ 曲线

能观标准型

就如控制规律设计的情况一样，也存在标准型使得估计器增益的设计方程显得简单且方程解的存在性可通过观察直观地获知。我们在 7.4.1 节中介绍这种形式。能

观标准型的方程具有以下结构：

$$\dot{x}_o = F_o x_o + G_o u \tag{7-145a}$$

$$y = H_o x_o \tag{7-145b}$$

其中，

$$F_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad G_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$H_o = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

三阶情况的框图如图 7-31 所示。在能观标准型中，所有的反馈环源于输出或观测信号。就像能控标准型，能观标准型是一种“直接”形式，因为矩阵中有意义的元素的值是直接从相应的传递函数 $G(s)$ 的分子和分母多项式的系数得到的。矩阵 F_o 被称为特征方程的**左伴随矩阵(left companion matrix)**，因为方程的系数出现在矩阵的左边。

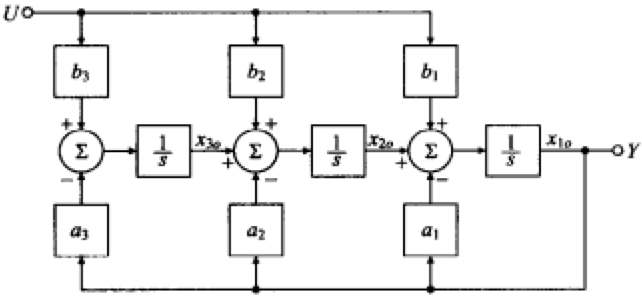


图 7-31　三阶系统能观标准型的框图

能观标准型的一个优点是可通过直接观察得到估计器增益。三阶系统的估计器误差闭环矩阵是

$$F_o - L_o H_o = \begin{bmatrix} -a_1 - l_1 & 1 & 0 \\ -a_2 - l_2 & 0 & 1 \\ -a_3 - l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7-146}$$

相应的特征方程为

$$s^3 + (a_1 + l_1)s^2 + (a_2 + l_2)s + (a_3 + l_3) = 0 \tag{7-147}$$

通过比较式(7-147)和式(7-137)，$\alpha_e(s)$的系数可以得到估计器增益。

类似控制规律设计的步骤，我们可以找到一种变换，当且仅当该系统有一种结构特性，我们称为**能观性(observability)**，就能将给定的系统转换为能观标准型。粗略地说，能观性是指我们可以仅通过监控传感器的输出就能推出系统所有状态的信息的能力。当某些状态或子系统在物理上与输出断开而不再出现时，就产生了不能观测性。例如，如果只测量主要状态变量的导数，且这些状态变量并不影响动态特性，则积分常数将无法体现在量测值中。这种情况发生在当一个装置具有传递函数 $1/s^2$ 而只量测其速度时，这时不可能从量测值中推出位置的初始值。另一方面，对于振荡器，一个速

度测量器已经足以估计位置，因为加速度是受位置影响的，从而观察到的速度也受位置影响。判断能观性的数学判据是**能观性矩阵(observability matrix)**

$$\mathcal{O}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{HF} \\ \vdots \\ \boldsymbol{HF}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{7-148}$$

必须列满秩，则各列不相关。对于我们所研究的单输出系统，$\mathcal{O}$是方阵，所以要求$\mathcal{O}$非奇异或者说其行列式值不为零。一般地，我们可以找到变换使之成为能观标准型，当且仅当能观性矩阵是非奇异的。注意，这与我们先前将系统矩阵转换为能控标准能控标准型的结论相似。

如同控制规律设计的情况一样，我们可以找到化为能观标准型的变换阵，然后通过与式(7-147)进行等价计算出增益，再反变换回去，从而完成设计。计算 $\boldsymbol{L}$ 的另一种方法是在估计器形式中应用 Ackermann 公式，即

$$\boldsymbol{L}=\alpha_e(\boldsymbol{F})\,\mathcal{O}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7-149}$$

其中$\mathcal{O}$就是式(7-148)给出的能观性矩阵。

对偶性

你可能已经从这些讨论中发现了估计和控制问题有很大的相似之处。实际上，这两个问题在数学上是等价的。这种性质称为**对偶性(duality)**。表 7-1 给出了估计和控制问题之间的对偶关系。例如，如果我们利用表 7-1 所提供的替换，Ackermann 的控制公式(式(7-91))就成了估计器公式(7-149)。这可以用矩阵代数直接得到证明。控制问题就是选择行矩阵 $\boldsymbol{K}$ 以满足系统矩阵 $\boldsymbol{F}-\boldsymbol{GK}$ 的极点配置，而估计器问题就是选择列矩阵 $\boldsymbol{L}$ 以满足 $\boldsymbol{F}-\boldsymbol{LH}$ 的极点配置。但是，$\boldsymbol{F}-\boldsymbol{LH}$ 的极点与$(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{LH})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}-\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$的极点相等，并且在这种形式中，对 $\boldsymbol{L}$ 进行设计的代数式与对 $\boldsymbol{K}$ 进行设计的代数式是一样的。所以，如果我们对控制问题使用以下形式的 Ackermann 公式和 place 算法

表 7-1 对偶性

控 制	估 计
F	$\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$
G	$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$
H	$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$

K=acker(F,G,p_c)

K=place(F,G,p_c)

则我们对估计器问题用以下形式

Lt= acker(F′, H′, p_e),

Lt= place(F′, H′, p_e),

L= Lt′,

其中，p_e 是含有期望估计器误差极点的向量。

所以，对偶性允许我们通过合适的代换，对估计器问题和控制问题应用相同的设计工具。两种标准型也是对偶的，正如我们通过比较$(\boldsymbol{F}_c,\boldsymbol{G}_c,\boldsymbol{H}_c)$和$(\boldsymbol{F}_o,\boldsymbol{G}_o,\boldsymbol{H}_o)$看到的。

7.7.2　降阶估计器

7.7.1节描述的估计器设计方法用某些状态变量重构了整个状态向量。如果传感器不存在噪声，则全阶估计器包含冗余信息，所以我们自然会问，有没有必要对可直接测量的状态变量进行估计。我们能否用可直接且精确测量的状态变量简化估计器？答案是肯定的。但如果测量机构有大噪声，则最好使用全阶估计器实现，因为全阶估计器除了可以估计不可量测的状态变量以外，还可以对测量结果进行滤波。

降阶估计器(reduced-order estimator)通过系统的测量输出数(本书中为1)来简化估计器的阶数。为了推导出该估计器，我们首先假设输出等于第一个状态，如，$y=x_a$。如果这个假设不成立，则需要另外一些预备的步骤。转换为观测形式是可能的但范围太广；只要是把$\boldsymbol{H}$作为第一行元素的非奇异变换都可以实现这一要求。现在我们把状态向量分为两部分：可直接量测得到的x_a和剩余的必须通过估计得到的状态变量$\boldsymbol{x}_b$。如果我们相应地把系统矩阵也分为两部分，则系统的完全描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_a\\ \dot{\boldsymbol{x}}_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{aa} & \boldsymbol{F}_{ab}\\ \boldsymbol{F}_{ba} & \boldsymbol{F}_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_a\\ \boldsymbol{x}_b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}G_a\\ \boldsymbol{G}_b\end{bmatrix}u \tag{7-150a}$$

$$y=[1\quad \boldsymbol{0}]\begin{bmatrix}x_a\\ \boldsymbol{x}_b\end{bmatrix} \tag{7-150b}$$

不可量测的状态变量的动态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_b=\boldsymbol{F}_{bb}\boldsymbol{x}_b+\underbrace{\boldsymbol{F}_{ba}x_a+\boldsymbol{G}_bu}_{\text{已知输入}} \tag{7-151}$$

其中，最靠右的两项是已知的，且可看作是$\boldsymbol{x}_b$动态方程的输入。因为$x_a=y$，可量测变量的动态方程可由以下的标量方程给出

$$\dot{x}_a=\dot{y}=F_{aa}y+\boldsymbol{F}_{ab}\boldsymbol{x}_b+G_au \tag{7-152}$$

如果我们把式(7-152)中的已知项移到左边，得到

$$\underbrace{\dot{y}-F_{aa}y-G_au}_{\text{已知测量值}}=\boldsymbol{F}_{ab}\boldsymbol{x}_b \tag{7-153}$$

这样，我们得到了方程左边的已知量，即测量值与方程右边的未知状态变量之间的关系式。所以，式(7-152)和式(7-153)对状态$\boldsymbol{x}_b$的关系与原来方程(式(7-150b))对整个状态$\boldsymbol{x}$的关系是相同的。根据这个推断，我们在原来估计器方程中应用以下的的代换式，可以得到$\boldsymbol{x}_b$的一个(降阶)估计器：

$$\boldsymbol{x}\leftarrow\boldsymbol{x}_b, \tag{7-154a}$$

$$\boldsymbol{F}\leftarrow\boldsymbol{F}_{bb}, \tag{7-154b}$$

$$\boldsymbol{G}u\leftarrow\boldsymbol{F}_{ba}y+\boldsymbol{G}_bu, \tag{7-154c}$$

$$y\leftarrow\dot{y}-F_{aa}y-G_au, \tag{7-154d}$$

$$\boldsymbol{H}\leftarrow\boldsymbol{F}_{ab}. \tag{7-154e}$$

所以通过将式(7-154)代入到全阶估计器(式(7-133))中可得到降阶估计器方程：

$$\dot{\hat{x}}_b = F_{bb}\hat{x}_b + \underbrace{F_{ba}y + G_b u}_{输入} + L(\underbrace{\dot{y} - F_{aa}y - G_a u}_{测量值} - F_{ab}\hat{x}_b) \tag{7-155}$$

如果我们定义估计器误差为

$$\tilde{x}_b \triangleq x_b - \hat{x}_b \tag{7-156}$$

则将式(7-151)减去式(7-155,)可得到误差的动态方程

$$\dot{\tilde{x}}_b = (F_{bb} - LF_{ab})\tilde{x}_b \tag{7-157}$$

且其特征方程为

$$\det[sI - (F_{bb} - LF_{ab})] = 0 \tag{7-158}$$

选择 L 设计该估计器的动态特性，使得式(7-158)与降阶表达式 $\alpha_e(s)$ 相匹配。现在可将式(7-155)改写为

$$\dot{\hat{x}}_b = (F_{bb} - LF_{ab})\hat{x}_b + (F_{ba} - LF_{aa})y + (G_b - LG_a)u + L\dot{y} \tag{7-159}$$

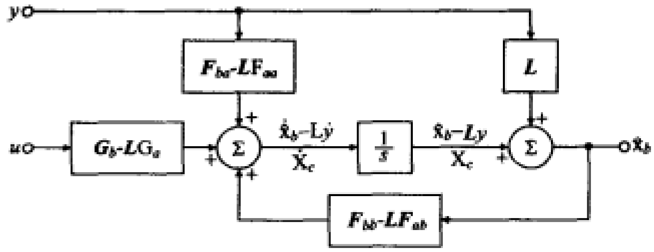


图 7-32 降阶估计器结构

在式(7-159)中要得到测量值的微分方程好像有一定的困难。大家知道，微分运算会放大噪声干扰，所以，如果 y 是噪声，则使用 $\dot{y}$ 是不可取的。为了解决这个难题，我们定义一个新的控制器状态为

$$x_c \triangleq \hat{x}_b - Ly \tag{7-160}$$

根据这个新状态，降阶估计器的实现如下：

$$\dot{x}_c = (F_{bb} - LF_{ab})\hat{x}_b + (F_{ba} - LF_{aa})y + (G_b - LG_a)u \tag{7-161}$$

且 $\dot{y}$ 不再直接出现。图 7-32 给出了降阶估计器的框图。

例 7.26 单摆的降阶估计器设计

为单摆设计一个降阶估计器，使其误差极点为 $-10\omega_0$。

解：给定系统方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

分块后的矩阵为

$$\begin{bmatrix}F_{aa} & F_{ab}\\ F_{ba} & F_{bb}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_a \\ G_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

从式(7-158)，我们得到含 L 的特征方程如下：

$$s-(0-L)=0$$

期望方程为

$$\alpha_e(s)=s+10\omega_0=0$$

比较两式得到

$$L=10\omega_0$$

由式(7-161)可得估计器方程为：

$$\dot{x}_c=-10\omega_0\hat{x}_2-\omega_0^2 y+u$$

且从式(7-160)得到状态估计为

$$\hat{x}_2=x_c+10\omega_0 y$$

我们使用早前例子中给出的控制规律。图 7-33 给出了 $\omega_0=1$ 时估计器的响应曲线，其中受控对象的初始条件为 $\boldsymbol{x}_0=[1.0\quad 0.0]^T$，估计器的初始条件为 $x_{c0}=0$。该响应曲线可用 MATLAB 的 impulse 或 initial 函数得到。注意观察，该初始条件响应曲线与图 7-30 描绘的全阶估计器的响应曲线的相似之处。

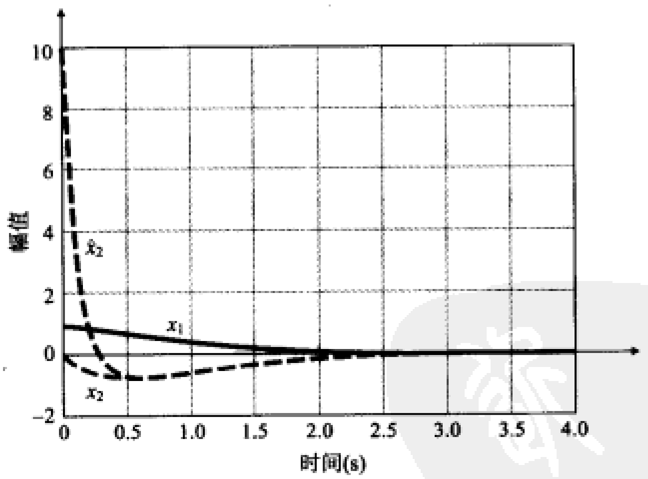


图 7-33　降阶估计器的初始条件响应

降阶估计器的增益也可用以下 MATLAB 语句得到

Lt= acker(F'_{bb}, F'_{ab}, p_e),

Lt= place(F'_{bb}, F'_{ab}, p_e),

L= Lt′.

降阶估计器的存在条件与全阶估计器的存在条件相同——即($\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{H}$)的能观测性。

7.7.3　估计器极点的选择

我们可以用 7.6 节中讨论过的选择控制器极点的技巧来进行估计器极点位置的

选择。作为一个经验法则，我们可以选择估计器极点比控制器极点远 2~6 倍。这就保证了估计器误差衰减的速度比所期望的动态特性的衰减速度要快，也就使得控制器的极点能主导整个响应过程。如果传感器的噪声足够大且成为主要考虑的对象，我们可能选择估计器极点比控制器极点的两倍要慢一些，这样得到的系统将有较窄的带宽以及更好地抑制噪声。但是我们希望在这种情况下，估计器极点位置对整个系统的响应有强强烈的影响。如果估计器的极点比控制器的极点慢，我们将希望系统对扰动的响应由估计器的动态特性来主导，而不是由控制规律选择出来的极点所主导。

与控制器极点的选择相比，估计器极点的选择要求我们考虑一个与控制量截然不同的关系式。正如在控制器中一样，在估计器中也有一个反馈项，随着所要求的响应速度的提高，该反馈项的幅值也在增加。但是这个反馈在计算机中是以电信号或数字信号形式存在的，所以其值的增加不会引起特别的麻烦。在控制器中，加大响应的速度就要加大控制量，这意味着要使用一个更大的执行器，也即执行器的尺寸，重量和价格都要增加。增加估计器的响应速度的一个严重后果，是估计器的带宽会加大，这就导致了更多的传感噪声会传递到控制执行器中。当然，如果$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$是不能观测的，则估计器增益取任何值都得不到合理的状态估计。所以，正如控制器的设计一样，最佳的估计器设计是在理想的瞬态响应和足够低的带宽中取得一个平衡，这样传感器噪声就不会明显削弱执行器的性能。采用主导二阶极点和特征方程类型的思想都可以用来满足这些要求。

基于 SRL 方法的估计器增益设计也有一个结论。根据最佳估计理论，估计器增益的最佳选择取决于传感器噪声强度 v 和过程（扰动）噪声强度[式(7-163)中的 w]之比。为更好地理解这一点，再研究估计方程

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{G}u + \boldsymbol{L}(y - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{7-162}$$

看看当过程噪声 w 存在时它与系统是如何相互作用的。含有过程噪声的对象描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}u + \boldsymbol{G}_1 w \tag{7-163}$$

且含有传感噪声 v 的量测器方程描述为

$$y = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + v \tag{7-164}$$

通过将式(7-163)减去式(7-162)并代入式(7-164)消去 y，可直接得到含有附加输入的估计器误差方程：

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{H})\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{G}_1 w - \boldsymbol{L}v \tag{7-165}$$

在式(7-165)中，传感误差乘上了系数 $\boldsymbol{L}$，而过程误差却没有。如果 $\boldsymbol{L}$ 非常小，则传感误差的作用可忽略不计，但估计器的动态响应将会很“慢”，所以误差将不能很好的抑制 w 的影响。低增益估计器的状态将不能很好地跟踪不确定受控对象的输入。这些结论在某种程度上也可成功地用于模型误差中，如 $\boldsymbol{F}$ 或 $\boldsymbol{G}$。这样，模型误差将作为附加过程噪声，加到式(7-165)中。另一方面，如果 $\boldsymbol{L}$ 很大，则估计器响应将会很“快”且扰动或过程噪声将被消除，但传感噪声，由于乘上了系数 $\boldsymbol{L}$，将产生很大误差。明显地，必须折中这两种影响使其达到平衡。在进行非常合理的假设前提下，通过求解与最佳

控制公式[式(7-112)]类似的估计器的SRL方程就可得到这种平衡的最佳解。该估计器的SRL方程为

$$1+qG_e(-s)G_e(s)=0, \tag{7-166}$$

其中q是输入扰动噪声强度与传感噪声强度的比值，而G_e是过程噪声与传感输出之间的传递函数，由下式给出

$$G_e(s)=\boldsymbol{H}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G}_1 \tag{7-167}$$

从式(7-112)和式(7-166)中可以注意到$G_e(s)$和$G_0(s)$是相似的。但是，通过比较式(7-113)和式(7-167)可知，在$G_e(s)$中的输入矩阵$\boldsymbol{G}_1$代替了$\boldsymbol{G}$，并且$G_0(s)$是控制输入与代价输出z之间的传递函数且由输出矩阵$\boldsymbol{H}_1$代替H。

估计器SRL[式(7-166)]的应用与控制器SRL的应用是的相同。先描绘出关于q的根轨迹，由此可得到几组最佳估计器极点，这些极点或多或少都和过程噪声强度与传感噪声强度的比值有关系。然后设计者从各个角度考虑，选出一组最好的(稳定)极点。用SRL技术的一个显著优点是，在选择了过程噪声输入矩阵$\boldsymbol{G}_1$之后，自由度降低为1(即只选择q)，取代了直接在高阶系统中选择极点的多个自由度。

最后我们要讨论一下降阶估计器。由于从y通过$\boldsymbol{L}$到x_b存在一个直接的传输项(见图7-32)，与全阶估计器相比，降阶估计器在传感器与控制器之间有更高的带宽。所以，如果传感噪声是一个影响较大的因素，那么潜在的复杂性比增大的对噪声的敏感度引起的偏移要多，故而降阶估计器的优势就不那么明显了。

例7.27 简单倒立摆的SRL估计器设计

设$\omega_0=1$，画出简单倒立摆线性化方程的对称根轨迹。把输出作为位置噪声测量，噪声强度比为q。

解：给定的系统方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}w$$

$$y=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+v$$

然后从式(7-167)计算

$$G_e(s)=\frac{1}{s^2+\omega_0^2}$$

图7-34给出了对称180°的根轨迹。产生对称根轨迹的MATLAB语句为(设$\omega_0=1$)

```
numGG=1;
denGG=conv([1 0 1],[1 0 1]);
sysGG=tf(numGG,denGG);
rlocus(sysGG);
```

对于给定的q值，我们选择两个稳定的根，如当$q=365$时，选择$s=-3\pm j3.18$，并用它们进行估计器的极点配置。

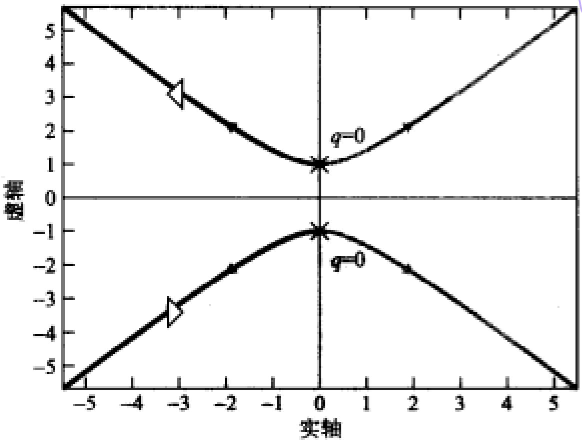


图 7-34 倒立摆估计器设计的对称根轨迹

7.8 补偿器设计:结合控制规律和估计器

如果我们把 7.5 节介绍的控制规律设计和 7.7 节介绍的估计器设计结合起来,并应用估计状态变量来实现控制规律,那么能抑制扰动却不跟踪参考输入的**调节器**(**regular**)设计就完成了。但是,由于控制规律是为真实状态(而不是估计状态)而设计的,你可能会考虑用 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 代替 $\boldsymbol{x}$ 对系统动态特性到底造成了什么样的影响。在本节中,我们将研究这种影响。为了达到这个目的,我们将计算闭环特征方程和开环补偿器的传递函数。同时,我们将用这些结果来比较状态空间设计方法和根轨迹、频率响应设计的差异。

带反馈的受控对象方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{7-168}$$

可改写为状态误差 $\tilde{x}$ 的形式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}) \tag{7-169}$$

结合式(7-169)和估计器误差[式(7-135)],可得到状态形式的整个系统的动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{G}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \tag{7-170}$$

此闭环系统的特征方程为

$$\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{G}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{0} & s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{H} \end{bmatrix} = 0 \tag{7-171}$$

由于该矩阵是分块三角形(见附录 C),我们可以将式(7-171)等效为

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{K}) \cdot \det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{H}) = \alpha_c(s)\alpha_e(s) = 0 \tag{7-172}$$

换言之,复合系统的极点由控制极点和估计器极点联合组成。这意味着控制规律

设计和估计器设计可以独立进行，而将两者以这种方式结合使用时，极点保持不变①。

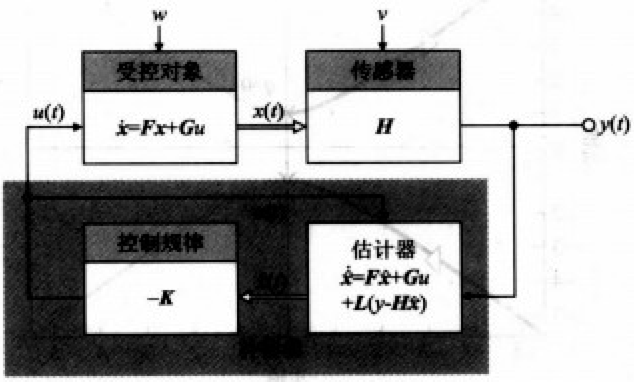


图 7-35 估计器和控制器的结构

为了比较状态变量法设计和第5章、第6章介绍的变换法，注意图7-35中注意蓝色阴影部分对应于补偿器。将反馈规律 $u=-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$ 代入到估计器式(7-133)中(因为它是补偿器的一部分)，可得到该补偿器的状态方程

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}=(\mathbf{F}-\mathbf{GK}-\mathbf{LH})\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{L}y \tag{7-173a}$$

$$u=-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} \tag{7-173b}$$

我们注意到式(7-173)与式(7-21a)有相同的结构，我们把式(7-21a)再次写在下面：

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}\mathbf{x}+\mathbf{G}u \tag{7-174}$$

因为式(7-21a)的特征方程为

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{F})=0 \tag{7-175}$$

对比式(7-173a)和式(7-174)，并将等效矩阵代入式(7-175)，可得到补偿器的特征方程

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{F}+\mathbf{GK}+\mathbf{LH})=0 \tag{7-176}$$

注意我们既没有确定式(7-176)的根，也没有在状态空间设计法的讨论中用到这些根(同时还要注意的是，补偿器不一定是稳定的；式(7-176)的根有可能在右半平面上)。从 y 到 u 的传递函数代表了动态补偿器，观察式(7-48)并将它代入到式(7-173)的相应矩阵中，得到传递函数：

$$D_c(s)=\frac{U(s)}{Y(s)}=-\mathbf{K}(s\mathbf{I}-\mathbf{F}+\mathbf{GK}+\mathbf{LH})^{-1}\mathbf{L} \tag{7-177}$$

同样，可将些方法应用到降阶估计器的研究。这里，控制规律为

$$u=-\begin{bmatrix}K_a & \mathbf{K}_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_a\\ \hat{\mathbf{x}}_b\end{bmatrix}=-K_a y-\mathbf{K}_b\hat{\mathbf{x}}_b \tag{7-178}$$

---

① 这是分离原理(separation principle)的一个特例(Gunckel 和 Franklin，1963)，该原理的应用范围十分广泛，而且在某些随机场合应用它将控制规律和估计器的分离设计结合起来，可得到整体的最佳设计。

将式(7-178)代入式(7-174)，并应用式(7-161)和一些代数运算，我们得到

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c = \boldsymbol{A}_r\boldsymbol{x}_c + \boldsymbol{B}_r y \tag{7-179a}$$

$$u = \boldsymbol{C}_r\boldsymbol{x}_c + D_r y \tag{7-179b}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_r = \boldsymbol{F}_{bb} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{F}_{ab} - (\boldsymbol{G}_b - \boldsymbol{L}G_a)\boldsymbol{K}_b \tag{7-180a}$$

$$\boldsymbol{B}_r = \boldsymbol{A}_r\boldsymbol{L} + \boldsymbol{F}_{ba} - \boldsymbol{L}F_{aa} - (\boldsymbol{G}_b - \boldsymbol{L}G_a)K_a \tag{7-180b}$$

$$\boldsymbol{C}_r = -\boldsymbol{K}_b \tag{7-180c}$$

$$D_r = -K_a - \boldsymbol{K}_b\boldsymbol{L} \tag{7-180d}$$

现在动态补偿器的有如下的传递函数

$$D_{cr}(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \boldsymbol{C}_r(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_r)^{-1}\boldsymbol{B}_r + D_r \tag{7-181}$$

当要求明确计算 $D_c(s)$ 和 $D_{cr}(s)$ 时，我们将发现它们跟第 5 章、第 6 章给出的经典补偿器非常相似，虽然它们是用完全不同的方法获得的。

例 7.28 人造卫星姿态控制的全阶补偿设计

利用极点配置为传递函数为 $1/s^2$ 的人造卫星对象设计一个补偿器。将控制极点配置于 $s=-0.707\pm0.707\text{j}(\omega_n=1\text{rad/s},\zeta=0.707)$，且将估计器的极点配置于 $\omega_n=5.\text{rad/s},\zeta=0.5$。

解：对于给定的传递函数 $G(s)=1/s^2$ 的一种状态变量描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad 0]\boldsymbol{x}$$

如果我们将控制系统的极点配置在 $s=-0.707\pm0.707\text{j}(\omega_n=1\text{rad/s},\zeta=0.7)$，则

$$\alpha_c(s) = s^2 + s\sqrt{2} + 1 \tag{7-182}$$

利用语句 K=place(F,G,pc)，可得到状态反馈增益为

$$\boldsymbol{K} = [1 \quad \sqrt{2}]$$

如果估计器误差的根为 $\omega_n=5.\text{rad/s},\zeta=0.5$，则期望的估计器特征多项式为

$$\alpha_e(s) = s^2 + 5s + 25 = s + 2.5 \pm 4.3\text{j} \tag{7-183}$$

且由 Lt=place(F′,H′,pe)可得到估计器的反馈增益矩阵为

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}$$

由式(7-177)得到的补偿器的传递函数为

$$D_c(s) = -40.4\frac{(s+0.619)}{s+3.21\pm4.77\text{j}} \tag{7-184}$$

上式看上去很像一个超前补偿器，因为其极点右边的实轴上的有一个零点；但是式(7-184)有两个复数极点而不是一个实极点。零点提供了带有超前相位的微分反馈，而两个极点则在一定程度上消除了传感器噪声。

在第 5 章、第 6 章中，我们用根轨迹或频率响应工具来评价补偿器的性能，在此可以用完全相同的方法来评价补偿器对该系统闭环极点的影响。式(7-184)的增益 40.4 是式(7-182)和式(7-183)中进行极点选择的得到的。如果我们用变量增益 K 代替补偿增益的特殊值，则受控对象加上补偿器组成的闭环系统的特征方程为

$$1+K\frac{(s+0.619)}{(s+3.21\pm 4.77j)s^2}=0 \qquad (7\text{-}185)$$

用根轨迹法可以计算该方程的根，图 7-36 给出了上式关于参数 K 的根轨迹。从图中可知，根轨迹穿越了式(7-182)和式(7-183)所选择的那些根，并且，当 $K=40.4$ 时，闭环系统的四个根与期望的根相等。

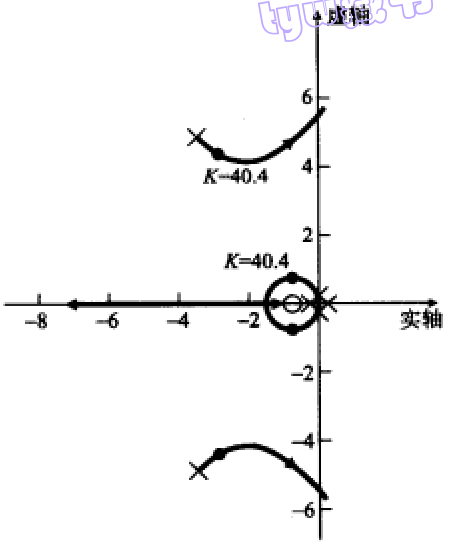


图 7-36　以过程增益为参数的控制器和估计器结合得到的根轨迹

图 7-37 给出的频率响应曲线说明了用状态空间设计法设计的补偿器与用频率响应设计法得到的结果式相同的。特别地，相位裕度由未补偿时的 0°增加到补偿后的 53°，而增益 $K=40.4$ 产生了 $\omega_c=1.35$ rad/s 的穿越频率。当 $\omega_n=1$ rad/s、$\zeta=0.7$ 时，这两个值与控制器的闭环根大致相符；这正如我们所期望的，因为这些慢速的控制器极点相对于快速的估计器极点而言，在系统响应中占据了主导地位。

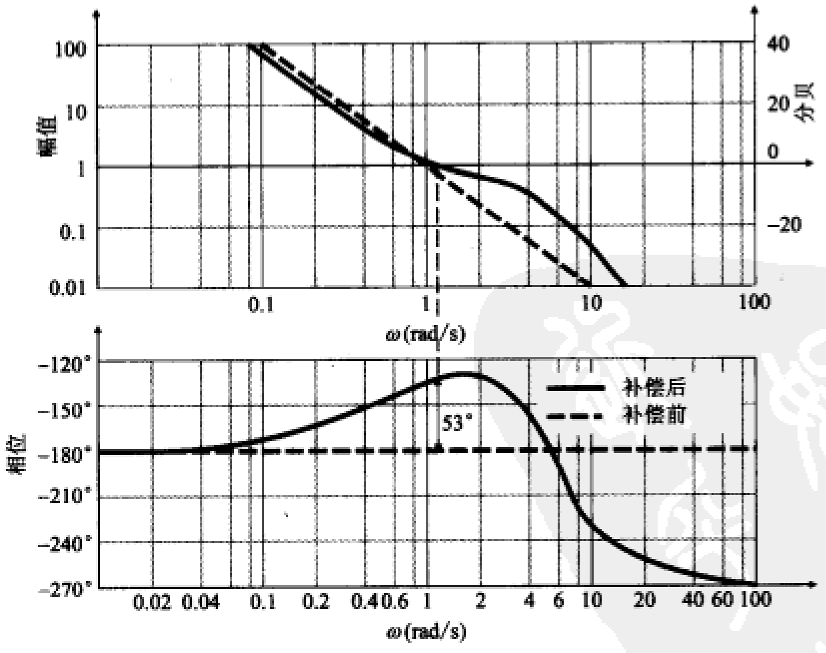


图 7-37　$G(s)=1/s^2$ 的频率响应

现在我们对同一系统设计一个降阶估计器。

例 7.29　人造卫星姿态控制系统的的降阶补偿器设计

用降阶估计器对$1/s^2$的人造卫星对象重新进行设计。

解：由式(7-158)我们知道估计器的增益为

$$L = 5$$

且由式(7-179a)可得补偿器器的标量方程为

$$\dot{x}_c = -6.41x_c - 33.1y$$

$$u = -1.41x_c - 8.07y$$

其中，由式(7-160)知

$$x_c = \hat{x}_2 - 5y$$

由式(7-181)计算得到补偿器的传递函数为

$$D_{cr}(s) = -\frac{8.07(s+0.619)}{s+6.41}$$

图 7-38 给出了该补偿器的结构图。

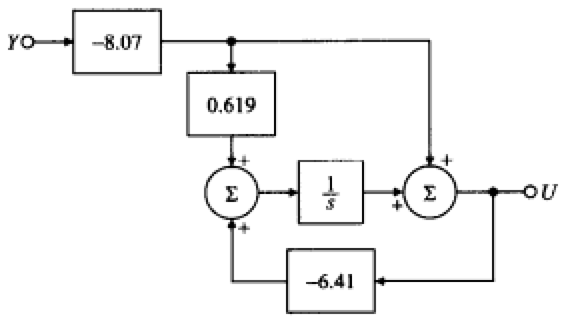


图 7-38 相位超前的降阶控制器的简化框图

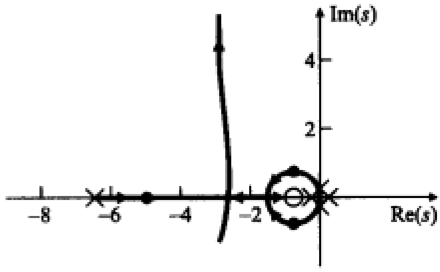


图 7-39 降阶控制器和 $1/s^2$ 过程的根轨迹，$K=8.07$ 时根的位置在图中以圆点表示

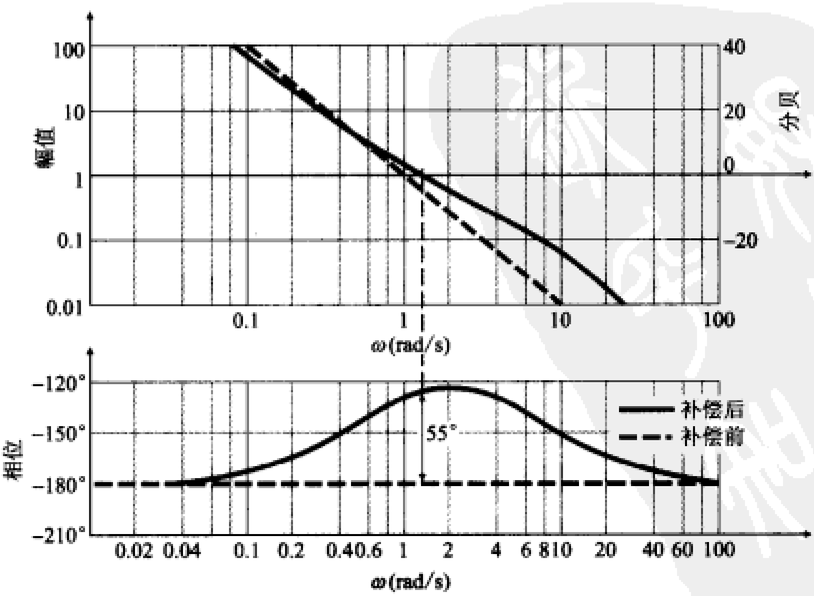


图 7-40 带降阶估计器的 $G(s)=1/s^2$ 受控对象的频率响应

该降阶补偿器恰好是一个超前网络。这是一个让人鼓舞的发现，它表明了用变换法和状态变量法可以得到类型完全相同的补偿器。图 7-39 的根轨迹说明了闭环极点恰恰出现在选定的位置。图 7-40 所示的补偿后系统的频率响应的相位裕度约为 55°。正如全阶估计器一样，用其他分析方法证实了这些被选择的极点位置是正确的。

极点配置法更深入的性质可通过一个三阶系统来说明。

例 7.30　直流伺服电机的全阶补偿器设计

利用状态空间极点配置法为直流伺服电机设计补偿器，系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{s(s+2)(s+8)}$$

采用能观标准型的状态描述，配置控制极点为 $pc=[-1.42;-1.04\pm2.14j]$ 且全阶估计器的极点为 $pe=[-4.25;-3.13\pm6.41j]$。

解：该系统能观标准型的框图如图 7-41 所示。相应的状态空间矩阵为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-10 & 1 & 0\\ -16 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}=[1\quad 0\quad 0],\qquad J=0$$

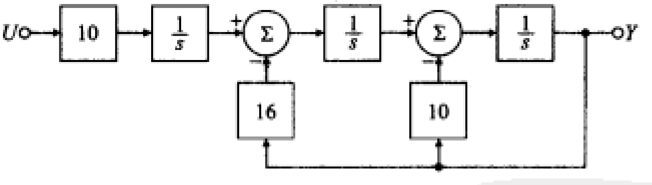


图 7-41　以能观标准型表示的直流伺服电机

期望极点为

$$pc=[-1.42;-1.04+2.14*j;-1.04-2.14*j]$$

我们用 $K=(\mathrm{F,G,pc})$，计算状态反馈增益为

$$\boldsymbol{K}=[-46.4\quad 5.76\quad -0.65]$$

估计器的误差极点为

$$pe=[-4.25;-3.13+j*6.41;-3.13-j*6.41]$$

我们用 Lt=place(F′,H′,pe)，L=Lt′计算估计器的增益为

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0.5\\ 61.4\\ 216\end{bmatrix}$$

代入式(7-177)，得到补偿器的传递函数为

$$D_c(s)=-190\frac{(s+0.432)(s+2.10)}{(s-1.88)(s+2.94\pm8.32j)}$$

图 7-42 给出了含补偿器和受控对象的系统的根轨迹，以补偿器增益作为参数。该图证实了当增益 $K=190$ 时根都位于所期望的位置上，尽管得到了一个特殊的(不稳定的)补偿。虽然该补偿器有一个不稳定极点在 $s=+1.88$ 处，但系统的所有闭环极点(包括控制器和估计器)是稳定的。

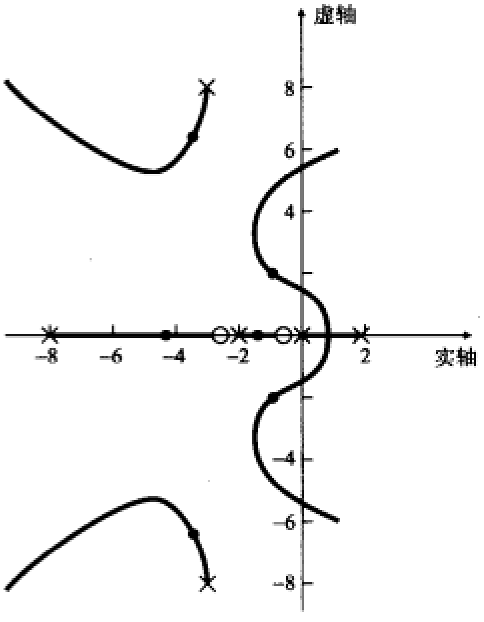


图 7-42 对直流伺服系统进行极点分配的得到的根轨迹

不稳定的补偿器一般是不可取的，因为在测试过程中，很难分清是补偿器自身的问题还是开环系统的问题。但是在某些情况下，不稳定补偿器可得到更好的控制效果；这时候，它在测试中存在的不利因素可能就很有价值了。①

图 7-33 表明了使用不稳定补偿器的一个直接后果，就是随着增益从标称值开始减小，系统也变得不稳定了。这样的系统被称为**条件稳定(conditionally stable)**系统，应该尽可能避免。我们将在第 9 章中看到，在响应大信号时，执行器饱和现象能降低系统的有效增益，这在条件稳定系统中，将导致系统的不稳定。同样地，如果电子装置也产生这种饱和，使得控制放大器的增益在开始工作时就从零连续第上升到标称值，那么这样的系统在初始时就是不稳定的。考虑到这些因素，我们需要为这类条件稳定系统寻找其他的设计方法。

例 7.31 利用降阶估计器重新设计直流伺服电机系统

在不改变控制极点的情况下，用降阶估计器对例 7.30 的直流伺服电机系统设计一个补偿器。把估计器的极点配置在 $-4.24\pm4.24j$ 上且 $\omega_n=6, \zeta=0.707$。

解：该降阶估计器对应的极点为

$$pc=[-4.24+4.24*j; -4.24-4.24*j]$$

将系统矩阵分块后，得到

① 甚至有些系统配置稳定的补偿器也不能使其稳定。

$$\begin{bmatrix} F_{aa} & F_{ab} \\ F_{ba} & F_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_a \\ G_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

求解以下估计器的误差特征多项式，

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}_{bb} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{F}_{ab}) = \alpha_e(s)$$

我们得到(用 place)

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 36 \end{bmatrix}$$

由式(7-181)计算得到的补偿器的传递函数为

$$D_{cr}(s) = 20.93 \frac{(s-0.735)(s+1.871)}{s+0.990 \pm 6.120j}$$

图 7-43 给出了该系统对应的根轨迹。注意到这一次我们得到了一个稳定的但非最小相位的补偿器和一个零度的根轨迹。根轨迹的右半平面部分将不会带来问题，因为所选择的增益必须使所有闭环极点都在左半平面内。

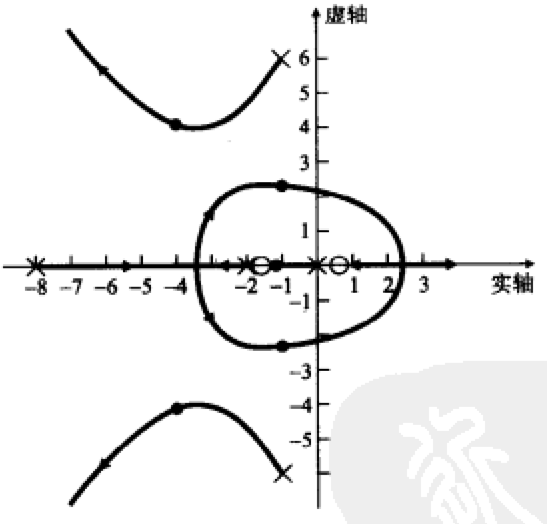


图 7-43　直流伺服系统的降阶控制器的根轨迹

下面我们尝试 SRL 设计法。作为对该系统进行控制设计的另一途径。

例 7.32　利用 SRL 法为直流伺服系统重新设计一个补偿器

利用基于 SRL 法的极点配置对例 7.30 的直流伺服电机系统设计一个补偿器。对于控制规律，让代价输出 z 和对象输出相同；对于估计器的设计，假设过程噪声和系统控制信号在同一位置进入系统。根据控制带宽约为 2.5rad/s 来选择极点，并且选择估计器的极点使得其带宽为控制带宽的 2.5 倍(约为 6.3rad/s)。由此推导出等效的离散控制器，假设采样周期为 $T_s=0.1$ 秒(是最快极点的 10 倍)，并分别比较连续系统和离散系统的控制输出和控制量。

解：由于该问题已经指定了 $\boldsymbol{G}_1=\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}$，则控制器和估计器的对称根轨迹是一样的，所以我们只需得到一条基于受控对象的传递函数的轨迹。系统的对称根轨迹如图 7-44 所示。从该轨

迹中，我们选择 $-2\pm1.56j$ 和 -8.04 作为期望的控制极点(pc=[-2+1.56*j;-2-1.56*j;-8.04])，且选择 $-4\pm4.9j$ 和 -9.169(pe=[-4+4.9*j;-4-4.9*j;-9.169])作为期望的估计器极点。状态反馈增益为 K=(F,G,pc)，或

$$\boldsymbol{K}=[-0.285\quad 0.219\quad 0.204]$$

并且用 Lt=place(F',H',pe)，L=Lt'，计算出估计器增益为

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}7.17\\97.4\\367\end{bmatrix}$$

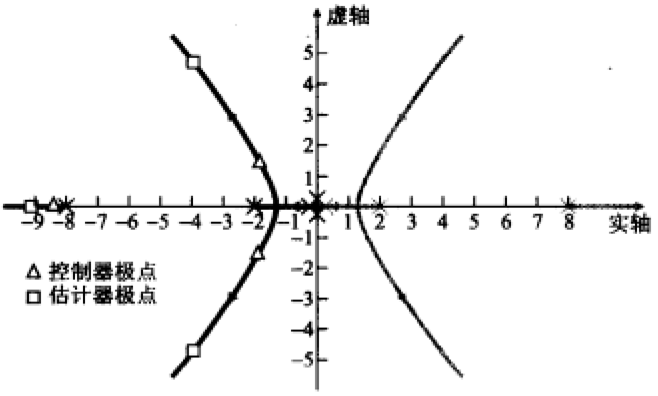


图 7-44 对称根轨迹

注意反馈增益比之前小了很多。相应的补偿器传递函数可由式(7-177)计算得到

$$D_c(s)=-\frac{94.5(s+7.98)(s+2.52)}{(s+4.28\pm6.42j)(s+10.6)}$$

现在，我们把这个补偿器和受控对象串接在一起，并把补偿器增益作为参数。得到的闭环系统的一般根轨迹如图 7-45 所示。当根轨迹增益等于标称增益 94.5 时，根就恰好在从对称根轨迹中选定的闭环位置上。

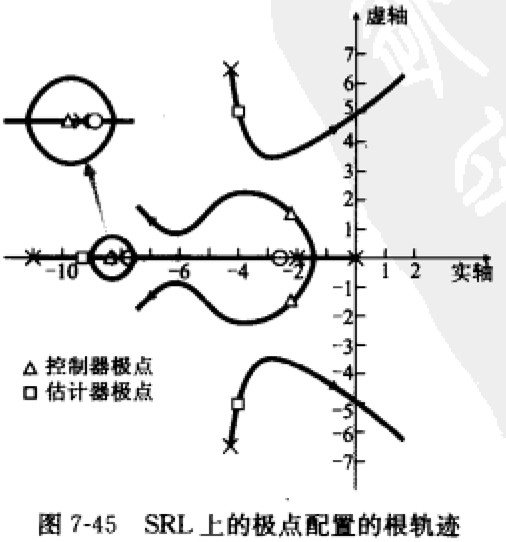


图 7-45 SRL 上的极点配置的根轨迹

注意，现在的补偿器是稳定的并且是最小相位系统。之所以能得到这种改进的设计，在很大程度上是因为受控对象极点 $s=-8$ 实际上既没有被控制器改变，也没有被估计器改变。要得到理想的性能，不需要改变这个极点；实际上，在原 $G(s)$ 中唯一需要修正的性能是在极点 $s=0$ 处。利用对称根轨迹法，我们发现改变位于 $s=0$ 和 $s=-2$ 的两个低频极点的位置并保持极点 $s=-8$ 不变，就能使控制器得到最大程度的利用。这样，控制器增益变得很小。而估计器的设计就不太重要了。这个例子阐明了为什么对称根轨迹法一般优于极点配置法的原因。

等效的离散控制器可由 MATLAB 的 c2d 命令得到，见以下代码：

```
nc=94.5*conv([1 7.98],[1 2.52]); % form controller numerator
dc=conv([1 8.56 59.5348],[1 10.6]); % form controller denominator
sysDc=tf(nc,dc); % form controller system description
ts=0.1;% sampling time of 0.1 sec
sysDd=c2d(sysDc,ts,'zoh'); % convert controller to discrete time
```

该离散控制器的传递函数为

$$D_d(z)=\frac{5.9157(z+0.766)(z+0.4586)}{(z-0.522\pm0.3903j)(z+0.3465)}$$

控制规律方程为

$$u(k+1)=1.3905u(k)-0.7866u(k-1)+0.1472u(k-2)+e(k)-7.2445e(k-2)+2.0782e(k-2)$$

图 7-46 给出了对连续系统和离散系统进行仿真得到的 Smulink 框图。连续系统和离散系统的阶跃响应及控制信号的比较，如图 7-47 所示。如果降低采样周期，那么两个响应的曲线将更趋于一致。

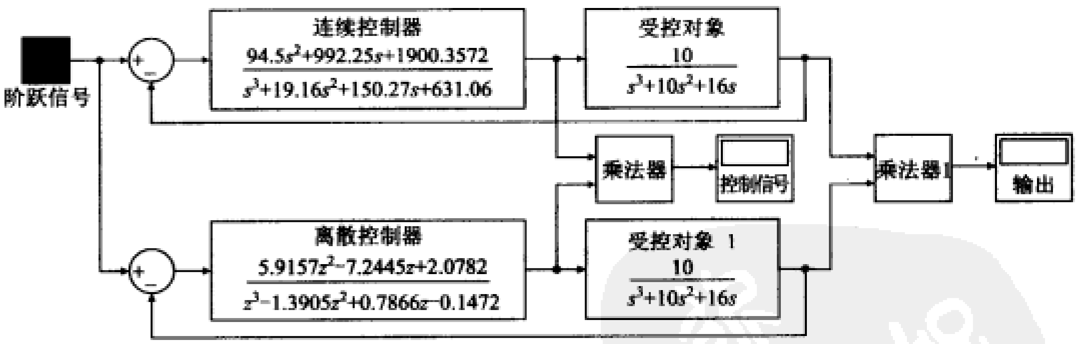
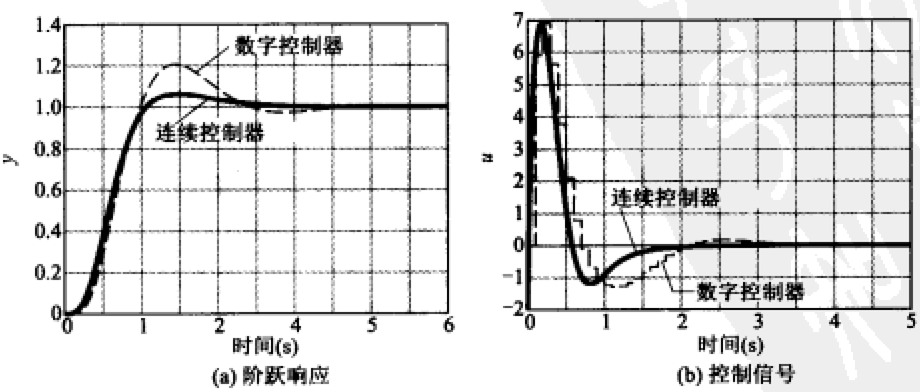


图 7-46　对连续系统和离散系统进行比较的 Simulink 框图



(a) 阶跃响应　　(b) 控制信号

图 7-47　连续控制器和离散控制器的阶跃响应和控制信号的比较

结合例 7.32 的知识，再回过头来研究该例的极点配置法的应用，这次选择更合适的极点。刚开始时，我们使用了三阶极点，产生了三个自然频率约为 2rad/s 的极点。该设计将位于 $s=-8$ 的极点移动到 $s=-1.4$ 处，这就违背了以下原则：即开环系统的极点不应该被移动，除非它们是问题的所在。现在让我们再尝试一下，这一次利用主导二阶极点代替那些慢速极点，而保持快速极点在 $s=-8$ 不变。

例 7.33 利用改进后的主导二阶极点重新设计直流伺服系统

利用极点配置对例 7.30 的直流电机伺服系统设计一个补偿器，其中控制器极点为

$$pc = [-1.41 \pm 1.41j; -8]$$

而估计器的极点为

$$pe = [-4.24 \pm 4.24j; -8]$$

解：根据这些极点位置，利用 K=place(F,G,pc)可得到期望反馈增益为

$$\boldsymbol{K} = [-0.469 \quad 0.234 \quad 0.0828]$$

与移动极点 $s=-8$ 的情况相比，所得增益的幅值比较小。

利用 Lt=place(F',H',pe)，L=Lt'，我们得到的估计器增益为

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 6.48 \\ 87.8 \\ 288 \end{bmatrix}$$

补偿器的传递函数为

$$D_c(s) = -\frac{414(s+2.78)(s+8)}{(s+4.13 \pm 5.29j)(s+9.05)}$$

这是一个稳定的且最小相位的系统。这个例子阐明了实用的极点选择和称根轨迹法的价值。

在初次使用极点配置法时，极点选择不合适将会导致控制量较大，而且会产生一个不稳定的补偿器。所有这些不希望出现的性质，可通过利用 SRL(或 LQR)，或改进极点选择得到解决。但我们的确需要用 SRL 法指导我们选择合适的极点。我们的底线就是，SRL(或 LQR)是首选的方法！

正如在前面的某些例子所见到的，我们介绍了通过 SRL 进行的最佳设计的应用。但是，实际中更倾向于跳过这一步骤而直接应用 LQR 法。

7.9 对含估计器的系统引入参考输入

把 7.5 节研究的控制规律和 7.8 节讨论的估计器结合起来设计控制器的过程本质上就是**调节器设计**(**regulator design**)。这意味着控制器和估计器的特征方程的选取是为了可靠地抑制干扰即对扰动信号，例如 $w(t)$，能得到令人满意的瞬态响应。但是，这种设计方法并没有考虑参考输入，也不能提供**指令跟随**(**command following**)，指令跟随就是通过复合系统对指令信号的变化能可靠地进行瞬态响应来证明。一般来说，在设

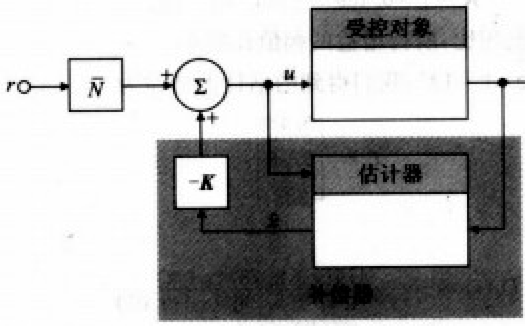
计控制系统时，良好的抑制干扰能力和良好的指令跟随你能力都需要考虑。在系统方程组中正确的引入参考输入，就可获得良好的指令跟随能力。

让我们在系统存在全阶估计器的情况下，重新写出受控对象和控制器方程组；从概念上来说，降阶情况和全阶的是一样的，只是在细节方面有些不同而已：

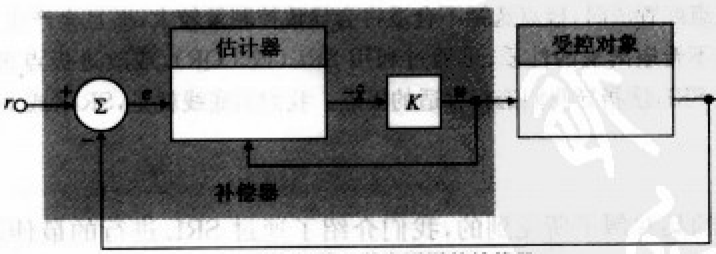
对象：
$$\dot{x}=Fx+Gu \tag{7-186a}$$
$$y=Hx \tag{7-186b}$$

控制器：
$$\dot{\hat{x}}=(F-GK-LH)\hat{x}+Ly \tag{7-187a}$$
$$u=-K\hat{x} \tag{7-187b}$$

图 7-48 给出了引入指令输入 r 到系统的两种可能情况。该图表明一个普遍存在的问题：即把补偿器放置于反馈通道还是反馈—前向通道中。因为传递函数的零点不同，系统对指令输入的响应也是不同的，这主要取决于系统的结构。但闭环极点是一致的，可以简单地令 $r=0$ 并注意到这时两个系统是相同就可容易地证明这一点。



(a) 反馈通道的补偿器



(b) 反馈—前向通道的补偿器

图 7-48　引入指令输入的可能位置

这两种结构在响应上的差别一眼就可看出来。现在考虑阶跃输入 r 的影响。在图 7-48a 中，阶跃信号对估计器和受控对象的激励影响是一样的；所以估计器误差在阶跃信号作用期间及作用后将保持为零。这意味着估计器的动态特性没有受指令输入的影响，所以从 r 到 y 的传递函数的零点与估计器的极点位置相同以致产生零极相消现象。因此，阶跃指令信号只通过控制极点影响系统行为，即 $\det(sI-F+GK)=0$ 的根。

在图 7-48b 中，阶跃质指令信号 r 只直接进入估计器，由此产生估计器误差，该误

差随着估计器的动态特性和与控制极点相对应的响应而衰减。所以，阶跃输入通过控制极点和估计器极点来影响系统的行为——也就是 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{GK})\cdot\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{LH})=0$ 的根。由于这一原因，图 7-48a 所示的结构就是控制某系统的一种典型优选方式，其中 $\bar{N}$ 可通过式(7-100)～式(7-102)求得。

在 7.9.1 节中，我们将根据实现反馈—前向通道或反馈通道情况的三种参数选择来介绍引入参考输入的一般结构。我们将从系统零点的角度来分析这三种选择方案，同时还研究零点与系统瞬态响应的关系。最后，在 7.9.2 节我们将介绍如何选择其余的参数以消除常值误差。

7.9.1 引入参考输入的一般结构

给定一个参考输入 $r(t)$，引进 r 的一般线性方法是，在控制器方程组中加入与 r 成正比例的一些项。我们可以在式(7-187b)中加入 $\bar{N}r$ 以及在式(7-187a)中加入 $\boldsymbol{M}r$ 来实现。注意，这里的 $\bar{N}$ 是标量，而 $\boldsymbol{M}$ 是 $n\times 1$ 向量。加入这些项以后，**控制器方程(controller equation)**变为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{GK}-\boldsymbol{LH})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{L}y+\boldsymbol{M}r \tag{7-188a}$$

$$u=-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}+\bar{N}r \tag{7-188b}$$

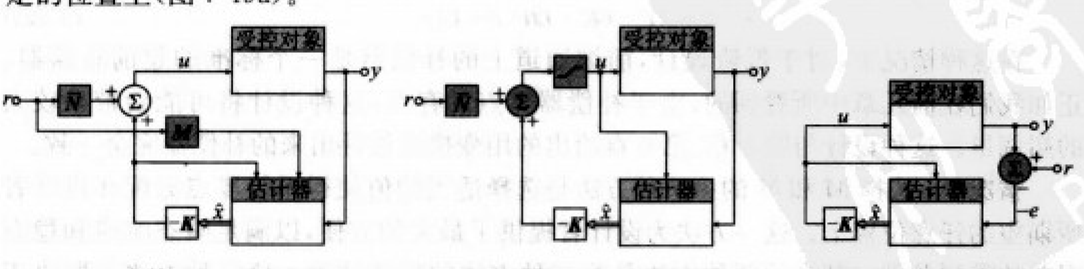
图 7-49a 给出了上式对应的框图。图 7-48 所示的其他结构对应于 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 的不同选择。因为 $r(t)$ 是外部信号，所以很明显，$\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 都不会影响到控制器—估计器联合系统的特征方程。从传递函数的角度来看，$\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 的选择只影响从 r 到 y 的传递函数的零点，也即只影响系统的瞬态响应但不影响其稳定性。我们怎样选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 以得到满意的瞬态响应呢？应当指出，我们通过反馈增益 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 来配置系统极点，现在我们将通过反馈—前向增益 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 来配置系统零点。

选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 有三种策略。

(1) 自激估计器。选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 使得状态估计器的误差方程与 r 无关(图 7-49b)。

(2) 跟踪误差估计器。选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 使得在控制中只使用跟踪误差 $e=(r-y)$(图 7-49c)。

(3) 零点配置估计器。选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 使得传递函数中的 n 个零点配置在设计者指定的位置上(图 7-49a)。



(a) 一般情况——零点配置　(b) 标准情况——无激励的估计器，零点$=\alpha_e(s)$　(c) 误差控制情况——经典补偿器

图 7-49 引入参考输入的可选择方法

情况1 从估计器性能的角度来说，第一种方法是最吸引的，也是最广泛应用的选择方案。如果$\hat{x}$是x的良好状态估计，则$\tilde{x}$对外部激励应该尽可能地自由，即$\tilde{x}$应该不受r的控制。为此，对M和$\bar{N}$进行的计算将十分简单。将式(7-188a)和式(7-186a)相减，将对象输出[式(7-186b)]代入估计器[式(7-187a)]并将控制[式(7-187b)]代入对象[式(7-186a)]，克得到估计器的误差方程为：

$$\dot{x}-\dot{\hat{x}}=Fx+G(-K\hat{x}+\bar{N}r)-[(F-GK-LH)\hat{x}+Ly+Mr] \tag{7-189a}$$

$$\dot{\tilde{x}}=(F-LH)\tilde{x}+G\bar{N}r-Mr \tag{7-189b}$$

如果式(7-189b)中没有出现r，则我们应该选择

$$M=G\bar{N} \tag{7-190}$$

因为$\bar{N}$是标量，所以M被限定在一个常数范围内了。注意，利用选择得到的M，我们可以将控制器方程写为

$$u=-K\hat{x}+\bar{N}r \tag{7-191a}$$

$$\dot{\hat{x}}=(F-LH)\hat{x}+Gu+Ly \tag{7-191b}$$

这与图7-49b的结构相对应。这种选择的纯影响就是在控制量加入之前就可通过反馈增益和参考输入将它计算出来，然后把该控制量输入到受控对象和估计器中在这种形式中，如果受控对象的控制饱和(如图7-49b中含有饱和非线性的系统所示，将在第9章中讨论)，那么在式(7-191)中可将该控制约束应用到估计状态$\hat{x}$方程的控制量中；并且$\tilde{x}$方程的非线性也消去了。这个性质对于获得良好的估计器性能是必需的。图7-49b给出了与这种方法对应的框图。在讨论完选择M的其他两种方法之后，我们将在7.9.2节中回过头来讨论参考输入增益因数$\bar{N}$的选择。

情况2 前面说到的第二种方法是采用跟踪误差。当传感器只能测量输出误差时，控制系统设计者不得不采用这种方法。比如说，在很多自动调温装置中，输出是被控温度与设定温度的差值，对控制器而言，而且控制器可用得参考温度没有绝对的指标。还有，在某些雷达跟踪系统中，有一个用来指示误差的读表，该误差信号必须单独为反馈控制所用。在这些场合，我们必须选择M和$\bar{N}$使得式(7-188)只受误差信号的驱动。如果我们选择以下关系，该要求将得到满足

$$\bar{N}=0 \text{ 且 } M=-L \tag{7-192}$$

则估计器方程为

$$\dot{\hat{x}}=(F-GK-LH)\hat{x}+L(y-r) \tag{7-193}$$

在这种情况下，对于低阶设计，前馈通道上的补偿器是一个标准的超前补偿器。正如我们在前几章中所看到的，由于补偿器零点的存在，这种设计将可能会带来较大的超调量。这种设计与第5章、第6章给出的用变换法设计出来的补偿器完全一致。

情况3 选择M和$\bar{N}$的第三种方法是选择适当的值使得系统零点分配在设计者所期望的任意位置上。这一方法为设计者提供了最大的方便，以满足瞬态响应和稳态误差的限制条件。其余的两种方法是第三种方法的特殊情况。这三种方法都取决于系统的零点。正如我们在7.5.2节中看到的，当没有估计器且参考输入加在控制器上时，闭环系统的零点与开环对象的零点保持一致，是固定不变的。现在我们来考查一

下当加入估计器以后，零点将发生什么变化。为此，我们重新考虑式(7-188)的控制器。如果从 r 到 u 的传递函数上有一个零点，则从 r 到 y 的传递函数上也必有一个零点，除非在该零点的位置有一个极点。所以我们只需单独考虑控制器以确定 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 的不同取值会对系统零点产生什么样的影响。由式(7-188)得到从 r 到 u 的传递函数的零点方程

$$\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{GK}+\boldsymbol{LH} & -\boldsymbol{M} \\ -\boldsymbol{K} & \bar{N} \end{bmatrix}=0 \tag{7-194}$$

（我们令 $y=0$，因为我们只关心 r 的影响）如果我们把最后一列除以（非零）标量 $\bar{N}$ 并乘上 $\boldsymbol{K}$ 倍后加到其他列上，我们发现反馈—前向零点是以下方程中 s 的值

$$\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{GK}+\boldsymbol{LH}-\dfrac{\boldsymbol{M}}{\bar{N}}\boldsymbol{K} & -\dfrac{\boldsymbol{M}}{\bar{N}} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}=0$$

或

$$\det\left(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{GK}+\boldsymbol{LH}-\frac{\boldsymbol{M}}{\bar{N}}\boldsymbol{K}\right)=\gamma(s)=0 \tag{7-195}$$

现在式(7-195)的形式跟式(7-136)的一样，选择 $\boldsymbol{L}$ 可得到估计器极点的期望位置。这里我们必须为参考输入与控制器之间的传递函数的期望零点多项式选择 $\boldsymbol{M}/\bar{N}$。所以 $\boldsymbol{M}$ 的选择为瞬态响应的影响提供了相当大的自由度。我们可以对从 r 到 u 的传递函数添加一个任意的 n 阶多项式，也适用于从 r 到 y 的传递函数；也就是说，除了先前所配置的极点以外，我们还可以配置 n 个零点。如果 $\gamma(s)$ 的根没有与系统的极点相消，则它们将包含在从 r 到 y 的传递函数的零点中。

以下两点将有助于我们选择 $\boldsymbol{M}/\bar{N}$，也就是零点的位置。第一个是动态响应。我们已经在第 3 章中看到，零点可对瞬态响应产生明显的影响，且它带来的启发将有助于我们为零点选择有效的位置。第二点是将状态空间设计法和变换法的另一个结论结合起来，那就是稳态误差或者速度恒速控制。在第 4 章中，我们推导出了 1 型系统稳态误差的精确度与闭环零极点之间的关系。如果系统是 1 型的，则对于阶跃输入，稳态误差将为零而对单位斜坡输入为

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v} \tag{7-196}$$

其中 K_v 是速度常数。另外，还证明了如果闭环极点为 $\{p_i\}$ 且闭环零点为 $\{z_i\}$，则（对于 1 型系统）**Truxal 公式(Truxal's formula)**给出

$$\frac{1}{K_v}=\sum\frac{1}{z_i}-\sum\frac{1}{p_i} \tag{7-197}$$

式(7-197)为 $\gamma(s)$ 的选择，即 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 的选择提供了基础。该选择方案基于以下的两个结论：

(1) 如果 $|z_i-p_i|\ll 1$，则这对零极点对动态响应的影响将很小，因为极点和零点的作用几乎相互抵消，并且对于任意瞬态响应，极点 p_i 残余的作用将很小。

(2) 虽然 z_i-p_i 很小，但 $1/z_i-1/p_i$ 可能会足够大，根据式(7-197)可知，这会对 K_v 有产生显著的影响。

应用这两点来选择 $\gamma(s)$，即选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\overline{N}$，得到一个滞后网络设计。我们用一个例子来阐明这种情况。

例 7.34 伺服机构：通过零点配置增大速度常数

考虑二阶控制系统 $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，其状态描述为

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

利用极点配置设计一个控制器，使得所有极点为 $s=-2$ 并且系统的速度常数 $K_v=10$。推导出等效的离散控制器，假设采样周期为 $T_s=0.1$ 秒（$20\times\omega_n=20\times0.05=0.1$ 秒），并分别比较连续的和离散的控制输出和控制量。

解：对于这个问题，状态反馈增益

$$\boldsymbol{K}=[8\quad 3]$$

可得到期望的控制极点。但是，由这个增益可以推出 $K_v=2$，而期望的 $K_v=10$。利用前面所说的选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\overline{N}$ 的三种方法设计出来的估计器对我们的设计有什么影响呢？应用第一个策略（自激估计器），我们发现 K_v 的值并没有改变。如果我们用第二种方法（误差控制），我们在事先不知道的位置上引入零点，则它对 K_v 的影响将无法直接设计控制。但是，如果我们用第三个方法（零点配置）结合 Truxal 公式[式(7-197)]，我们可以同时满足系统的动态特性和稳态误差的要求。

为使 $K_v=10$，首先我们必须选择满足式(7-197)的估计器的极点 p_3 和零点 z_3。我们希望保持 z_3-p_3 足够小，这样它对动态响应的影响也比较小，并且使得 $1/z_3-1/p_3$ 足够大以增大 K_v 的值。为此，我们设置 p_3 使其与控制系统的动态特性相比任意的小。例如，我们令 $p_3=-0.1$。注意，这种方法与通常要求快速响应的估计器设计原则是相反的。现在，用式(7-197)得到

$$\frac{1}{K_v}=\frac{1}{z_3}-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3},$$

其中 $p_1=-2+2\mathrm{j}$，$p_2=-2-2\mathrm{j}$，$p_3=-0.1$，令 $K_v=10$，我们解 z_3 得到

$$\frac{1}{K_v}=\frac{4}{8}+\frac{1}{0.1}+\frac{1}{z_3}=\frac{1}{10}$$

或

$$z_3=-\frac{1}{10.4}=-0.096$$

由此，我们设计一个降阶估计器，使其极点为 -0.1，并选择 M/N 使得 $\gamma(s)$ 有一个零点为 -0.096，得到系统的框图如图 7-50a 所示。你可以验证该系统的传递函数为

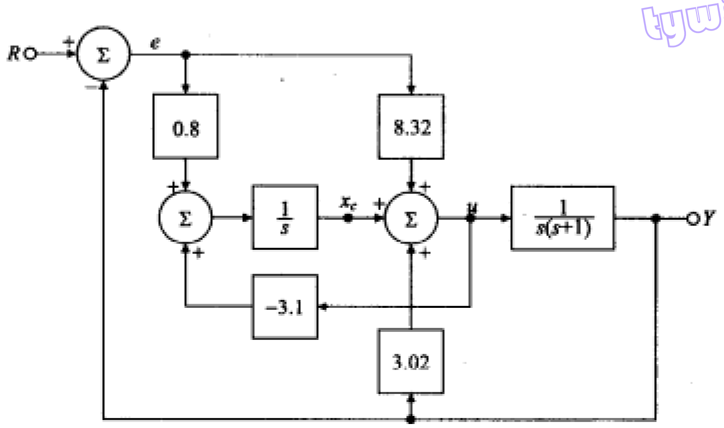
$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{8.32(s+0.096)}{(s^2+4s+8)(s+0.1)} \tag{7-198}$$

其 $K_v=10$，正如要求的。

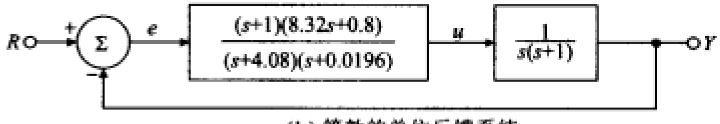
图 7-50a 所示的补偿器有两个输入（e 和 y）和一个输出，从这个意义上说它是非经典补偿。通过求出从 e 到 u 的传递函数重新来求解这些方程以提供纯误差补偿，得到如图 7-50b 所示的系统。

该过程如下：相关的控制器方程为

$$\dot{x}_c = 0.8e-3.1u$$
$$u = 8.32e+3.02y+x_c$$



(a) 双输入补偿器



(b) 等效的单位反馈系统

图 7-50 零点分配后的伺服机构(滞后网络)

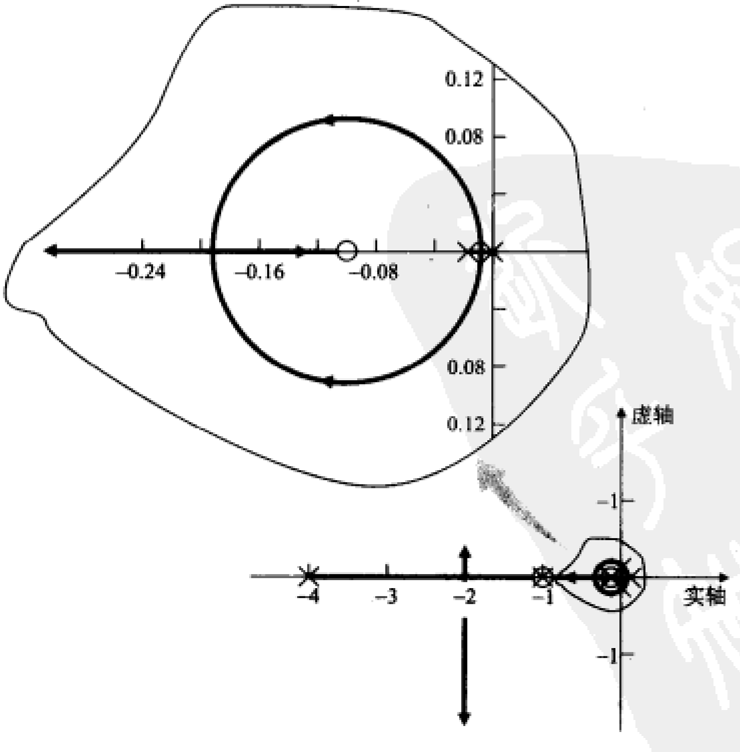


图 7-51 滞后—超前补偿器的根轨迹

其中 x_c 是控制器的状态。对该方程式取拉普拉斯变换，消去 $X_c(s)$，并将输出用($Y(s)=G(s)U(s)$)代替，求出的补偿器由下式描述

$$\frac{U(s)}{E(s)}=D_c(s)=\frac{(s+1)(8.32s+0.8)}{(s+4.08)(s+0.0196)}$$

这种补偿是典型的滞后—超前网络。图 7-50b 的系统的根轨迹如图 7-51 所示。注意，原点附近有极点—零点对，是滞后网络的特点。从图 7-52 的伯德图可知，系统在低频段相位滞后而在高频段相位超前。系统的阶跃响应如图 7-53 所示，可以看到响应曲线中的"尾巴"取决于慢速极点−0.1。当然，这要求系统是 1 型的，并且系统的跟踪误差为零。

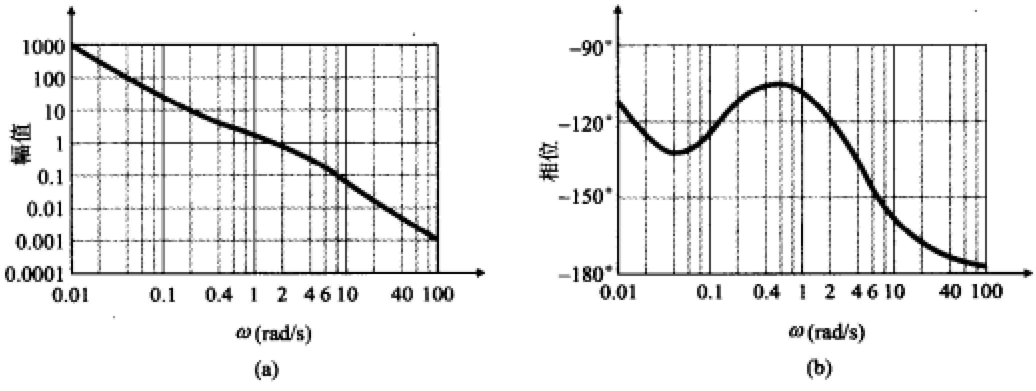


图 7-52 滞后—超前补偿器的频率响应

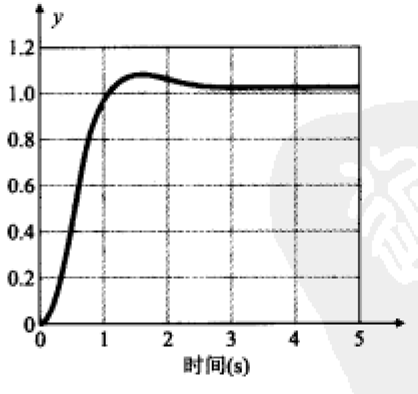


图 7-53 含滞后补偿器系统的阶跃响应

等效的离散控制器可通过 MATLAB 的 c2d 命令得到，代码如下：

```
nc=conv([1 1],[8.32 0.8]); % controller numerator
dc=conv([1 4.08],[1 0.0196]); % controller denominator
sysDc=tf(nc,dc); % form controller system description
ts=0.1; % sampling time of 0.1 sec
sysDd=c2d(sysDc,ts,'zoh'); % convert to discrete time controller
```

该离散控制器的离散传递函数为

$$D_d(z)=\frac{8.32z^2-15.8855z+7.5721}{z^2-1.6630z+0.6637}=\frac{8.32(z-0.9903)(z-0.9191)}{(z-0.998)(z-0.6665)}$$

描述控制规律的方程(为简洁起见,略去采样周期)为

$$u(k+1)=1.6630u(k)+0.6637u(k-1)+8.32e(k+1)-15.8855e(k)+7.5721e(k-1)$$

模拟连续系统和离散系统的 Simulink 框图如图 7-54 所示。连续系统和离散系统的阶跃响应和控制信号的比较如图 7-55 所示。若降低系统的采样周期,两者的响应将更一致。

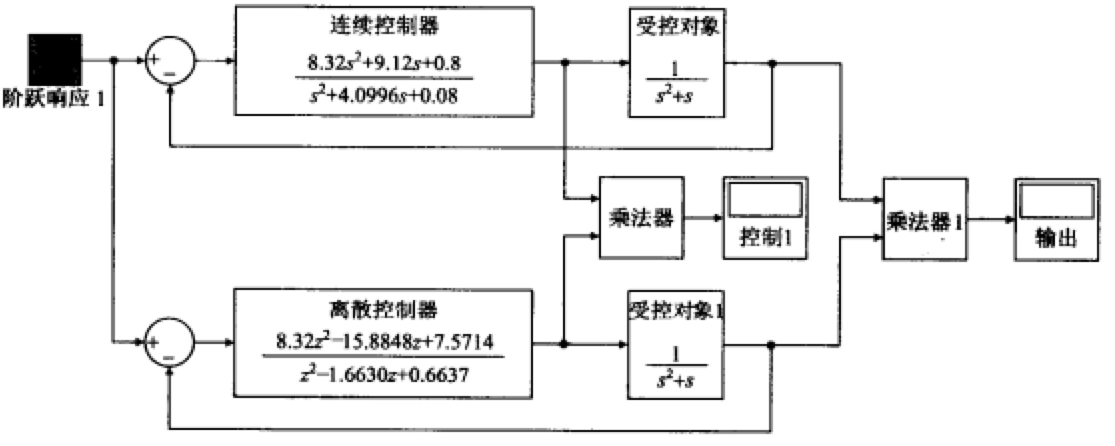


图 7-54 比较连续控制器和离散控制器的 Simulink 框图

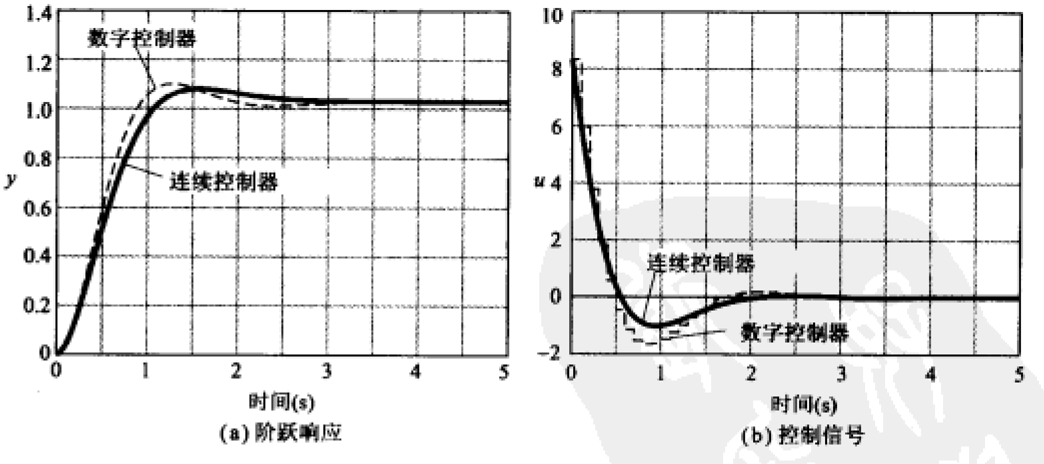


图 7-55 连续和离散控制器的阶跃响应和控制信号的比较

现在我们重新考虑选择 M 和 $\overline{N}$ 的前面两种方法,这次我们从零点的角度来验证它们的实现。对于第一条规则(自激估计器),我们令 $M=G\overline{N}$。代入式(7-195),得到控制器的反馈一前馈零点表达式为

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{LH})=0 \tag{7-199}$$

在这里,需要选择 L 使得估计器的特征多项式与 $\alpha_e(s)$ 相等。于是就得到了与估计器的 n 个极点位置相同的 n 个零点。由于这些零极点的相互抵消(这将造成估计器状态不能控),整个传递函数的极点只由状态反馈控制器的极点组成。

对于第二个规则(跟踪误差估计器),我们选择 $\boldsymbol{M}=-\boldsymbol{L}$ 且 $\bar{N}=0$。如果把它们代入式(7-194),则反馈—前馈零点为

$$\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{GK}+\boldsymbol{LH} & \boldsymbol{L} \\ -\boldsymbol{K} & 0 \end{bmatrix}=0 \tag{7-200}$$

如果我们让前面 n 列减去最后一列右乘上 $\boldsymbol{H}$,然后让前 n 行加上最后一行左乘 $\boldsymbol{G}$,则式(7-200)可化简为

$$\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F} & \boldsymbol{L} \\ -\boldsymbol{K} & 0 \end{bmatrix}=0 \tag{7-201}$$

如果把式(7-201)与状态描述系统的零点方程式(7-66)相比较,我们会看到,所增加的零点是通过将 $\boldsymbol{L}$ 代替输入矩阵以及将 $\boldsymbol{K}$ 代替输出矩阵而得到的。所以,如果想用误差控制,那么我们必须接受这些由 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 决定的补偿器的零点,并且我们不能直接控制它们。正如我们前面所说的,对于低阶情况,超前补偿器的这些结果作为单位反馈拓扑结构的一部分。

现在让我们来总结一下引入参考输入后所产生的影响。当参考输入信号包含在控制器中时,整个闭环系统的传递函数为

$$\mathcal{T}(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_s\gamma(s)b(s)}{\alpha_e(s)\alpha_c(s)} \tag{7-202}$$

其中 K_s 是系统的总增益,且 $\gamma(s)$ 和 $b(s)$ 是首项为1的多项式。令 $\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{GK}]=\alpha_c(s)$,可从多项式 $\alpha_c(s)$ 得到控制增益 $\boldsymbol{K}$。而令 $\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{LH}]=\alpha_e(s)$,可从多项式 $\alpha_e(s)$ 得到估计器增益 $\boldsymbol{L}$。作为一个设计者,我们可以选择 $\alpha_c(s)$ 和 $\alpha_e(s)$,因此我们有足够的自由分配闭环系统的极点。求解多项式 $\gamma(s)$ 有三种方法:一是我们可以通过图7-49b令 $\gamma(s)=\alpha_e(s)$,其中 $\boldsymbol{M}/\bar{N}$ 由式(7-190)给出;二是我们可以认为 $\gamma(s)$ 由式(7-201)给出,这样就可应用误差控制;三是我们可以通过从式(7-195)中选择 $\boldsymbol{M}/\bar{N}$,任意给定 $\gamma(s)$ 的系数。重点要指出的是,由 $b(s)$ 表示的对象零点在应用该方法过程中并没有被移动并且是闭环传递函数的一部分,除非我们选择使得它消去某些零点的 $\alpha_c(s)$ 和 $\alpha_e(s)$。

7.9.2 选择增益

现在让我们回到选择 $\boldsymbol{M}$ 的三种方法中,确定增益 $\bar{N}$ 的过程。如果我们选择方法一,控制由式(7-191a)给出且 $\hat{x}_s=x_s$。那么,我们可以用 $\bar{N}=N_u+\boldsymbol{KN}_x$,如式(7-102),也可以用 $u=N_ur-\boldsymbol{K}(\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{N}_xr)$。这是最普遍的选择。如果我们用第二种方法,那么结果就是零;回忆一下误差控制中 $\bar{N}=0$。如果我们用第三种方法,我们选择 $\bar{N}$ 使得整个闭环直流增益为单位增益[①]。

整个系统方程为

---

① 另一种合理的方法是选择 $\bar{N}$ 使得当 r 和 y 都不变时,从 r 到 u 的直流增益是从 y 和 u 的直流增益的相反数。这样,就可以把我们的控制器构造成误差控制和一般微分控制的结合,且如果系统具有1型行为,则其性能可以得到实现。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\hat{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F-GK & GK\\ 0 & F-LH\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \tilde{x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}G\\ G-\overline{M}\end{bmatrix}\overline{N}r \tag{7-203a}$$

$$y=\begin{bmatrix}H & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \tilde{x}\end{bmatrix} \tag{7-203b}$$

其中 $\overline{M}$ 是用式(7-195)或式(7-190)选择零点位置得到的。要使闭环系统有单位直流增益,那么有

$$-\begin{bmatrix}H & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F-GK & GK\\ 0 & F-LH\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}G\\ G-\overline{M}\end{bmatrix}\overline{N}=1 \tag{7-204}$$

如果解式(7-204)求 $\overline{N}$,得到①

$$\overline{N}=-\frac{1}{H(F-GK)^{-1}G[1-K(F-LH)^{-1}(G-\overline{M})]} \tag{7-205}$$

本节所介绍的方法可推广到降阶估计器的设计。

7.10 积分控制和鲁棒跟踪

7.9 节中选择的增益 $\overline{N}$ 对阶跃指令的稳态误差为零,但这个结果不具有鲁棒性,因为对象参数的任何改变都将使得误差不为零。我们必须用积分控制来达到鲁棒跟踪。

在我们目前所讨论的状态空间设计法中,还没有提到积分控制,也没有例子表明设计出来的补偿器含有积分项。在 7.10.1 节中,我们将介绍如何用直接方法引入积分控制,也就是将系统误差的积分加入到运动方程中。积分控制是当跟踪一个信号的稳态没有达到零时的特殊情况。我们(在 7.10.2 节)介绍有关鲁棒跟踪的一种通用方法,它符合内部状态原则,也就是解决一整类跟踪问题和扰动抑制问题。最后,在 7.10.3节,我们阐明了如果系统含有估计器并且需要消除已知结构的扰动,那么我们可以把扰动的模型加入到估计器方程中,并用扰动的计算机估计消除真实对象中扰动对输出的影响。

7.10.1 积分控制

首先我们介绍积分控制的一种特殊方法,即通过在动态变量中加入所期望的动态特性。对以下系统

$$\dot{x}=Fx+Gu+G_1w \tag{7-206a}$$

$$y=Hx \tag{7-206b}$$

我们通过把额外(积分)状态 x_I 加入到对象状态而把误差② $e=y-r$ 的积分反馈回去,就像对象的状态一样,额外状态满足以下微分方程

---

① 我们用到以下事实 $\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix}$。

② 请注意我们这里所用的信号,跟我们一贯的表示法相反。

$$\dot{x}_I = Hx - r(=e)$$

所以

$$x_I = \int^t e\mathrm{d}t$$

增加额外状态以后的状态方程变成

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_I \\ \dot{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & H \\ 0 & F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_I \\ x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ G\end{bmatrix}u - \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}r + \begin{bmatrix}0 \\ G_1\end{bmatrix}w \tag{7-207}$$

且反馈规律为

$$u = -[K_1 \quad K_0]\begin{bmatrix}x_I \\ x\end{bmatrix}$$

或者可以更简单一点，即

$$u = -K\begin{bmatrix}x_I \\ x\end{bmatrix}$$

通过这些修正后的系统定义，我们可以类似地应用7.5节所介绍的设计方法；得到的控制结构如图7-56所示。

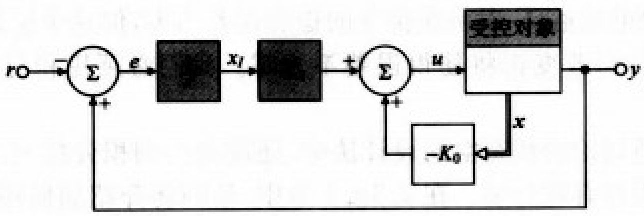


图7-56 积分控制结构

例7.35 电机速度控制系统的积分控制

考虑以下传递函数描述的电机速度控制系统

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3}$$

也就是，$F=-3, G=1$，且 $H=1$。设计使得系统含有积分控制，并让其在 $s=-5$ 处有两个极点。设计一个估计器，其极点为 $s=-10$，扰动进入系统的位置与控制指令相同，计算跟踪和扰动抑制响应。

解：极点配置的要求，等价于

$$p_c = [-5; \quad -5]$$

含有扰动 w 的系统描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_I \\ \dot{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_I \\ x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}(u+w) - \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}r$$

因此，我们可以通过求解下式，得到 K。

$$\det\left(sI - \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & -3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}K\right) = s^2 + 10s + 25$$

或者

$$s^2 + (3+K_0)s + K_1 = s^2 + 10s + 25$$

所得的结果为

$$\mathbf{K} = [K_1 \quad K_0] = [25 \quad 7]$$

我们还可以用 acker 函数修正这一结果。含反馈和扰动输入 w 的系统如图 7-57 所示。

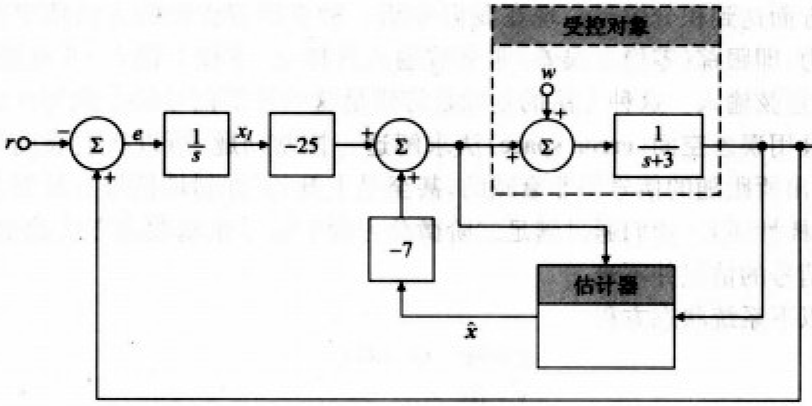


图 7-57 积分控制例子

估计器增益 $L=7$ 是由下式得到的

$$\alpha_e(s) = s + 10 = s + 3 + L$$

估计器方程的形式为

$$\dot{\hat{x}} = (F - LH)\hat{x} + Gu + Ly = -10\hat{x} + u + 7y$$

且

$$u = -K_0\hat{x} = -7\hat{x}$$

阶跃参考输入 r 对应的阶跃响应 y_1 和阶跃扰动输入 w 对应的输出扰动响应 y_2，如图 7-58a 所示，且相关的控制量(u_1 和 u_2)如图 7-58b 所示。正如所期望的，该系统是 1 型的并能跟踪参考输入且能渐近地抑制阶跃扰动。

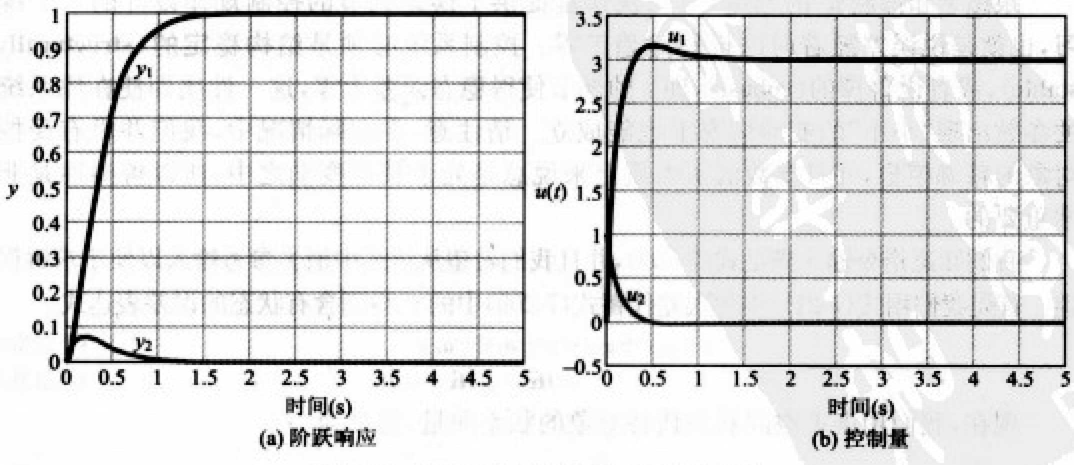


图 7-58 电机速度控制系统的瞬态响应

▲7.10.2 鲁棒跟踪控制:误差空间法

在7.10.1节中我们很直接地引入了积分控制并选择实现的结构以从参考输入和扰动输入两方面达到积分效果。现在我们介绍一种更具解析性的方法使得控制系统具有以下能力,即跟踪(零稳态误差)非衰减输入并抑制(零稳态误差)非衰减扰动,如阶跃、斜坡和正弦输入。这种方法的基础是将满足这些外部信号的方程包含到问题的表达式中并且用**误差空间(error space)**法求解这一控制问题,所以我们能确保误差趋于零,即使输出所跟随的信号是非衰减的,甚至是上升的(如斜坡信号),甚至某些参数是变动的(鲁棒性质)。我们通过满足二阶微分方程的信号来阐明该方法的细节,但推广到更复杂信号的情况并不难。

假设有以下系统状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u + \mathbf{G}_1 w \tag{7-208a}$$

$$y = \mathbf{H}\mathbf{x} \tag{7-208b}$$

并且知道参考输入满足某一指定的微分方程。方程的初始条件所产生的输入是未知的。例如,输入可能是斜坡函数,其斜率和初始条件未知。同类型的对象扰动也可能存在。我们希望对该系统设计一个控制器使得闭环系统有指定的极点,并能跟踪输入指令信号,且能在无稳态误差的要求下抑制扰动。我们将只用二阶微分方程来推导出结果。于是,我们可定义参考输入满足以下关系

$$\ddot{r} + \alpha_1 \dot{r} + \alpha_2 r = 0 \tag{7-209}$$

且扰动满足以下完全相同的方程式

$$\ddot{w} + \alpha_1 \dot{w} + \alpha_2 w = 0 \tag{7-210}$$

(跟踪)误差定义为

$$e = y - r \tag{7-211}$$

跟踪 r 和抑制 w 的问题,可以视作是提供了误差调节的控制规律设计的一个练习,也就是说误差随着时间推移而趋于零。控制系统必须是**结构稳定的(structurally stable)**,或者说**鲁棒的(robust)**,即 e 的调节使得稳态误差为零,这一性质即使在原系统的参数出现"小小"的变动情况下也能成立。请注意,在实际情况中,我们并没有受控对象的精确模型,并且参数值从本质上来说总是处于某些变动之中,所以鲁棒性是非常重要的。

我们知道指令输入满足式(7-209),并且我们希望从该式中消去参考输入以便于求解误差。首先我们用式(7-211)中的误差代替式(7-209)中的 r,得到含有状态的误差表达式:

$$\ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_2 e = \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_2 y \tag{7-212a}$$

$$= \mathbf{H}\ddot{\mathbf{x}} + \alpha_1 \mathbf{H}\dot{\mathbf{x}} + \alpha_2 \mathbf{H}\mathbf{x} \tag{7-212b}$$

现在,我们用误差空间状态代替对象的状态向量,定义为

$$\boldsymbol{\xi} \triangleq \ddot{\mathbf{x}} + \alpha_1 \dot{\mathbf{x}} + \alpha_2 \mathbf{x} \tag{7-213}$$

类似地,我们用误差空间的控制代替原来的控制,定义为

$$\mu \triangleq \ddot{u} + \alpha_1 \dot{u} + \alpha_2 u \tag{7-214}$$

利用这些定义，我们将式(7-212b)重写为

$$\ddot{e}+\alpha_1\dot{e}+\alpha_2 e=\boldsymbol{H}\xi \tag{7-215}$$

ξ 的状态方程由以下给出[①]

$$\dot{\xi}=\dddot{x}+\alpha_1\ddot{x}+\alpha_2\dot{x}=\boldsymbol{F}\xi+\boldsymbol{G}\mu \tag{7-216}$$

注意，扰动跟参考输入一样，从式(7-216)中消去。得到的式(7-215)和式(7-216)在误差空间中描述了整个系统。用标准的状态变量形式，方程可写为

$$\dot{z}=\boldsymbol{A}z+\boldsymbol{B}\mu \tag{7-217}$$

其中 $z=[e\quad \dot{e}\quad \xi^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 且

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \boldsymbol{0}\\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & \boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \boldsymbol{G}\end{bmatrix} \tag{7-218}$$

如果误差系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$是能控的，可以通过反馈给定任意的动态特性。如果对象$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$是能控的并且不存在与参考信号特征方程 $\alpha_r(s)=s^2+\alpha_1 s+\alpha_2$ 的根相同的零点，则误差系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$是能控的。[②] 因为我们假设这些条件均成立；所以存在以下形式的控制规律

$$\mu=-[K_2\quad K_1\quad \boldsymbol{K}_0]\begin{bmatrix}e\\ \dot{e}\\ \xi\end{bmatrix}=-\boldsymbol{K}z \tag{7-219}$$

使得通过极点配置，误差系统具有任意的动态特性。现在我们需要将这一控制规律表示为真实过程状态 $\boldsymbol{x}$ 和真实控制的形式。我们联立式(7-219)、式(7-213)和式(7-214)，得到用 u 和 $\boldsymbol{x}$ 表示的控制规律(我们用 $u^{(2)}$ 表示 $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2$)：

$$(u+\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x})^{(2)}+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i(u+\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x})^{(2-i)}=-\sum_{i=1}^{2}K_i e^{(2-i)} \tag{7-220}$$

式(7-220)的实现结构非常简单，能跟踪常数输入信号。在这种情况下，参考输入的方程为 $\dot{r}=0$。根据 u 和 $\boldsymbol{x}$，控制规律[式(7-220)]可简化为

$$\dot{u}+\boldsymbol{K}_0\dot{\boldsymbol{x}}=-K_1 e \tag{7-221}$$

在这里，我们只需对上式求积分，就可得到控制规律和积分控制的形式：

$$u=-K_1\int^t e\,\mathrm{d}\tau-\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x} \tag{7-222}$$

图 7-59 所示的框图清楚地表明了控制器中存在一个纯积分器。在这种情况中，图 7-59 的内部状态法和图 7-57 的特殊方法的唯一区别是积分器的增益的位置相对不同。

一个能够清楚地说明误差空间法在鲁棒跟踪上的强大作用的更复杂的问题，是要求零稳态误差地跟踪正弦信号的情况。举个例子，在大容量磁盘磁头装配(mass-storage disk-head assembly)控制中就会遇到这样的问题。

---

① 注意，这个概念可以推广到更复杂的输入方程和多变量系统中去。

② 比如说，不可能对在原点处存在零点的受控对象加入积分控制。

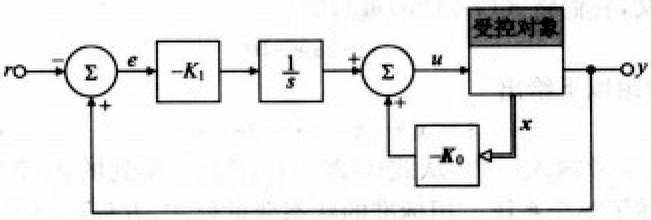


图 7-59 用内部状态法的积分控制

例 7.36 磁盘驱动器系统:跟随正弦信号的鲁棒控制

计算机磁盘驱动器系统的简单标准型由以下方程给出

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

$$G_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad H=[1\quad 0],\quad J=0$$

因为磁盘上的数据并不是精确地在中心环上,伺服电机必须跟踪由转轴速度决定的角频率为 ω_0 的正弦信号。

(a) 给出该系统的控制器结构,要求零稳态误差跟踪给定的参考输入。

(b) 假设 $\omega_0=1$ 且期望的闭环极点为 $-1\pm \mathrm{j}\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}\pm \mathrm{j}1$。

(c) 用 MATLAB 或 Simulink 证明系统的跟踪和抑制扰动特性。

解:(a) 参考输入满足差分方程 $\ddot{r}=-\omega_0^2 r$ 使得 $\alpha_1=0,\alpha_2=\omega_0^2$。结合这些值,根据式(7-218)得到误差状态矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\omega_0^2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$A-BK$ 的特征方程为

$$s^4+(1+K_{02})s^3+(\omega_0^2+K_{01})s^2+[K_1+\omega_0^2(1+K_{02})]s+K_{01}\omega_0^2K_2=0$$

其增益可通过极点配置进行选择。由式(7-220)实现的补偿器如图 7-60 所示,它表明了控制器中存在频率为 ω_0 的振荡器(也就是**输入发生器的内部状态**(**internal model of the input generator**))[①]。

(b) 现在假设 $\omega_0=1\mathrm{rad/s}$ 且期望的极点为

$$pc=[-1+\mathrm{j}*\sqrt{3};\ -1-\mathrm{j}*\sqrt{3};\ -\sqrt{3}+\mathrm{j};\ -\sqrt{3}-\mathrm{j}]$$

反馈增益为

$$K=[K_2\quad K_1\ :\ K_0]=[2.0718\quad 16.3923\ :\ 13.9282\quad 4.4641]$$

得到控制器

$$\dot{x}_c=A_c x_c+B_c e,$$

① 这是内部状态原则(internal model principle)的特殊情况,要求对控制器的外部状态或信号进行鲁棒跟踪以及抑制扰动。

$$u = C_c x_c$$

其中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} -16.3923 \\ -2.0718 \end{bmatrix}, \quad C_c = [1 \quad 0]$$

相关的 MATLAB 语句如下：

```
% plant matrices
F=[0 1; 0 -1];
G=[0;1];
H=[1 0];
J=[0];
% form error space matrices
omega=1;
A=[0 1 0 0;-omega*omega 0 1 0;0 0 0 1;0 0 0 -1];
B=[0;0;G];
% desired closed-loop poles
pc=[-1+sqrt(3)*j ;-1-sqrt(3)*j;-sqrt(3)+j;-sqrt(3)-j];
K=place(A,B,pc);
% form controller matrices
K1=K(:,1:2);
Ko=K(:,3:4);
Ac=[0 1;-omega*omega 0];
Bc=-[K(2);K(1)];;
Cc=[1 0];
Dc=[0];
```

控制器频率响应如图 7-61 所示，它表明在 $\omega_0=1\text{rad/s}$ 处增益为无穷大。从 r 到 e 的频率响应[如灵敏度函数]，如图 7-62 所示，可以看出在 $\omega_0=1\text{rad/s}$ 处有“尖谷”出现。同样的“尖谷”也出现在从 w 到 y 传递函数的频率响应中。

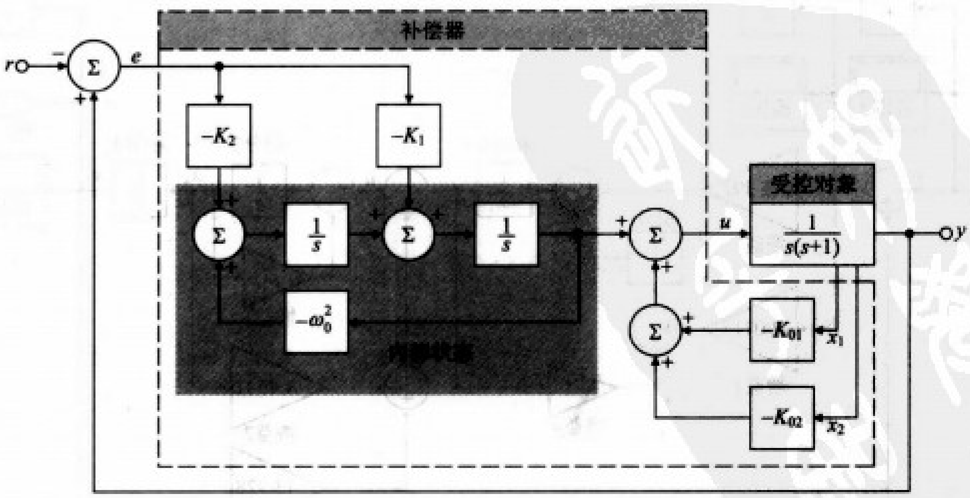


图 7-60 准确跟踪频率为 ω_0 的正弦信号的伺服电机补偿器结构

(c)图 7-63 为系统的 Simulink 模拟框图。虽然 MATLAB 也可以模拟，但用 Simulink 的交互图形环境更具结构性。Simulink 能够提供增加非线性(见第 9 章)的能力并能有效地得到鲁棒性

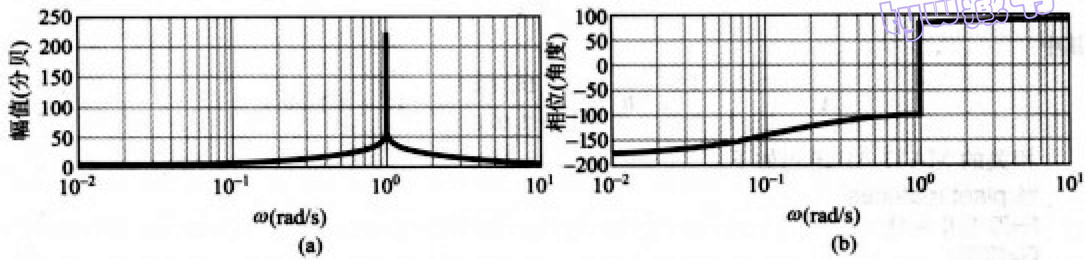


图 7-61 控制器频率响应

研究[①]。系统的跟踪特性如图 7-64 所示，它显示了系统的渐近跟踪特性。系统的抑制扰动特性如图 7-65 所示，它表明对于正弦扰动输入能渐近抑制。鲁棒自动跟踪装置的闭环频率响应[如补充传递函数(complementary transfer funtion)$\mathcal{T}(s)$]如图 7-66 所示。从图中可看出，从 r 到 y 的频率响应在 $\omega_0=1\mathrm{rad/s}$ 处为单位值，这正是我们所期望的。

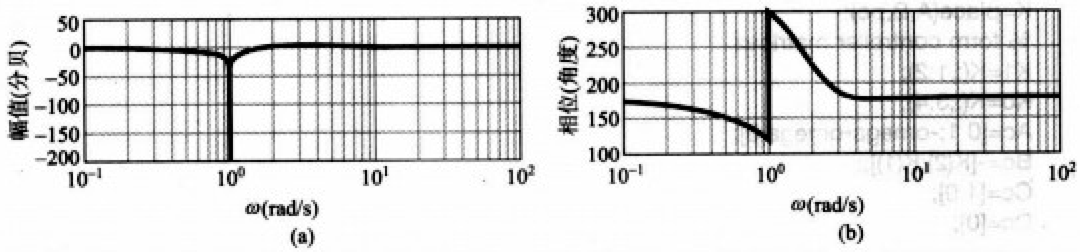


图 7-62 灵敏度函数的频率响应

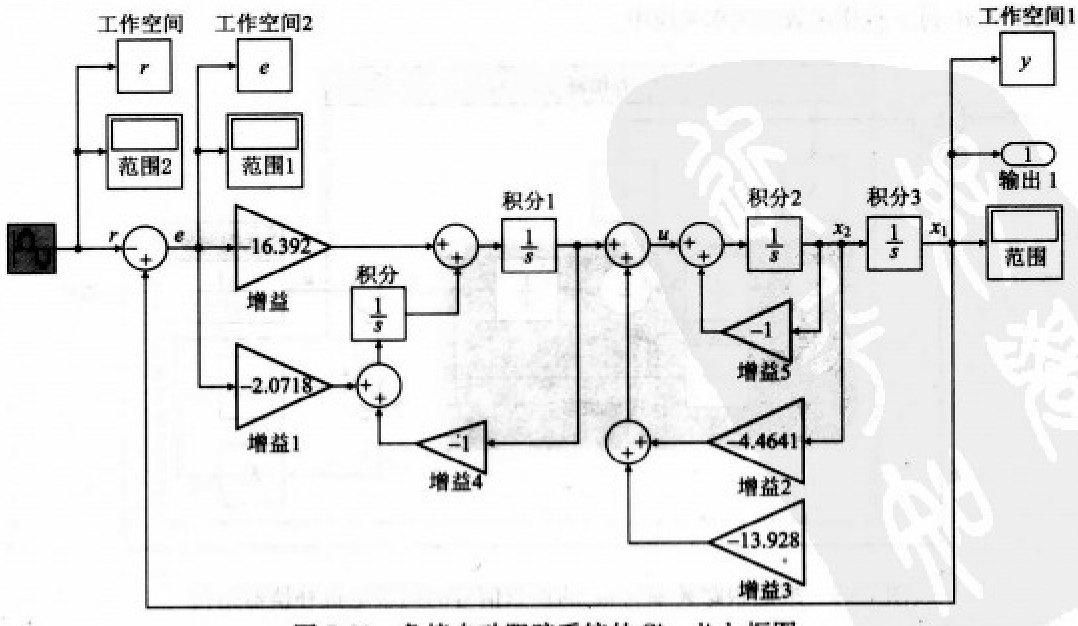


图 7-63 鲁棒自动跟踪系统的 Simulink 框图

① 一般地，该设计可以由 MATLAB 完成，且(非线性)模拟可由 Simulink 得到。

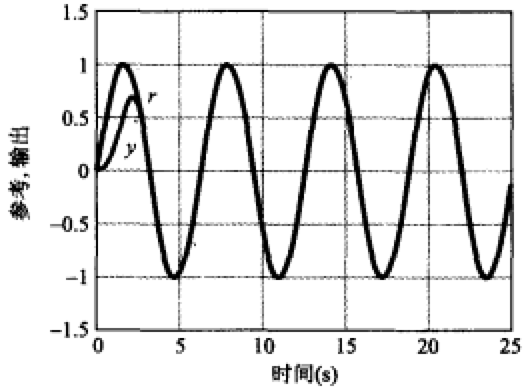


图 7-64 鲁棒自动跟踪系统的跟踪特性

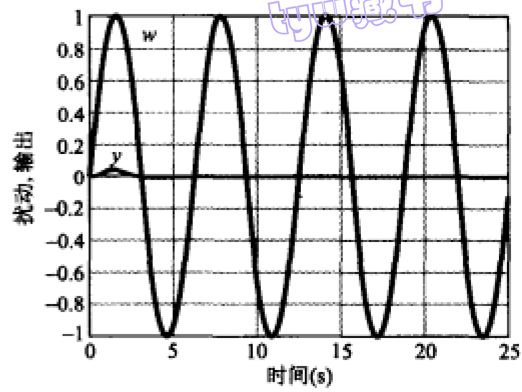


图 7-65 鲁棒自动跟踪系统的抑制扰动特性

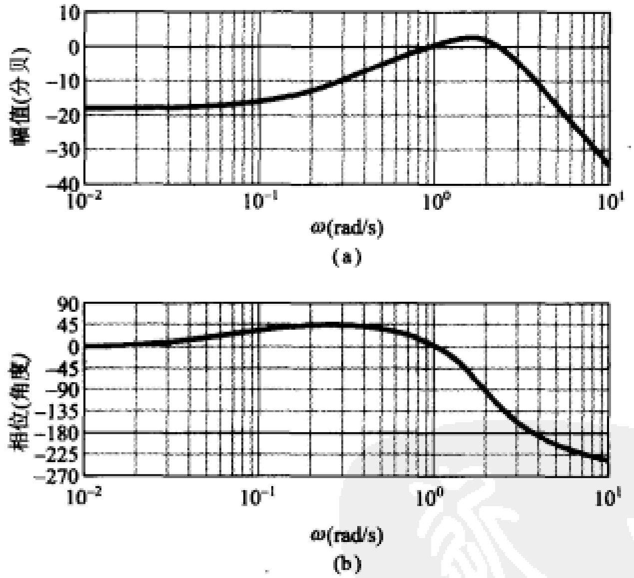


图 7-66 鲁棒自动跟踪装置的闭环频率响应

从 r 到 e 的系统的零点为 $\pm j, -2.7321\pm j2.5425$。鲁棒跟踪特性取决于 $\pm j$ 处的零点。从 w 到 y 的零点全在 $\pm j$ 处。鲁棒抑制扰动特性就由这些零点决定。

由极点配置的性质可知，只要 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$ 保持稳定，式(7-217)的状态 z 对系统参数的任何扰动都将趋于零。注意，被抑制的信号是指满足这些方程的那些信号，方程中 α_i 的值在外部信号模型中实现。极点配置法假设这些都是已知的且可精确地实现。如果实现的值有误差，则将导致稳态误差的产生。

例 7.37 利用误差空间法设计的积分控制

对于系统 $H(s)=\dfrac{1}{s+3}$，其状态变量描述为 $F=-3, G=1, H=1$，

构造一个控制器，其零点为 $s=-5$ 跟踪满足 $r=0$ 的输入。

解：误差系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{e}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mu$$

如果我们令期望方程为 $\alpha_c(s)=s^2+10s+25$，则求 K 的极点配置方程为

$$\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}]=\alpha_c(s) \tag{7-223}$$

更具体些，式(7-223)可写为

$$s^2+(3+K_0)s+K_1=s^2+10s+25$$

可得到

$$\boldsymbol{K}=[25\quad 7]=[K_1\quad K_0]$$

系统的实现如图 7-67 所示。该系统从 r 到 e 的传递函数，即灵敏度函数

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\mathcal{S}(s)=-\frac{s(s+10)}{s^2+10s+25}$$

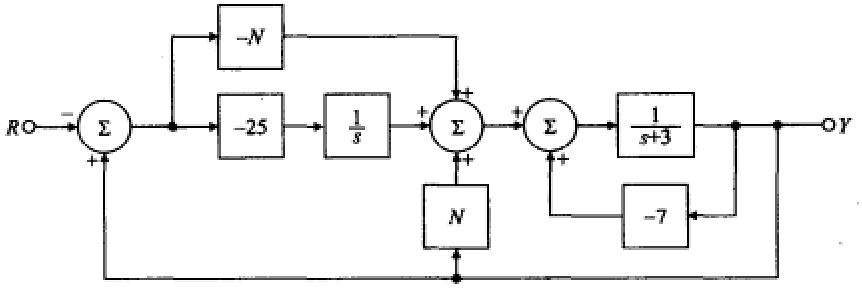


图 7-67　带反馈的内部状态举例

有零点在 $s=0$，这就避免了常数输入带来的误差。闭环传递函数(也就是补充灵敏度函数)即

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\mathcal{T}(s)=\frac{25}{s^2+10s+25}$$

图 7-68 的结构允许增加一个参考输入的反馈，这将为零点配置提供一个额外的自由度。如果我们对式(7-222)增加一个合适的 r 项，则得到

$$u=-K_1\int^t e(\tau)\mathrm{d}\tau-\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x}+Nr \tag{7-224}$$

这一关系的作用是产生了零点 $-K_1/N$。这个零点的位置可以选来改善系统的瞬态响应。为了精确的实现，我们可以将式(7-224)改写为含 e 的形式

$$u=-K_1\int^t e(\tau)\mathrm{d}\tau-\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x}+N(y-e) \tag{7-225}$$

系统的框图如图 7-68 所示。对于我们的例子，整个传递函数则变为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{Ns+25}{s^2+10s+25}$$

注意对于任何 N 值，直流增益都是单位增益，并且通过对 N 的选择，我们可以将零点配置为任意实数值以改善动态响应。配置零点的一个自然法则，就是让它消去系统的某些极点，在本例中，就是要消去 $s=-5$。$N=0,5,8$ 时对应的系统响应如图 7-69 所示。我们知道极点可以通过积分控制消去，这样我们可以选定某一个实数控制极

点，通过选取适当的 N 消去该极点。

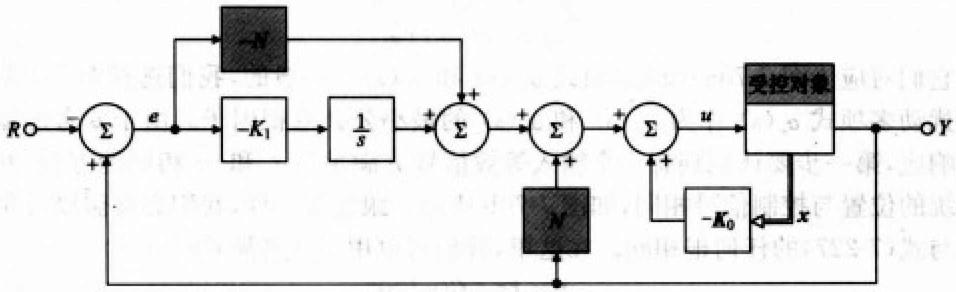


图 7-68　含反馈—前馈的积分控制内部状态

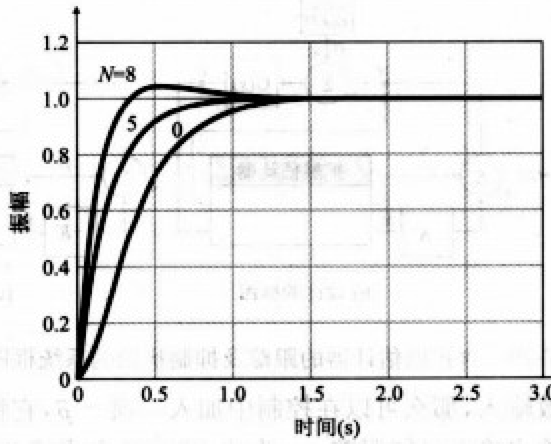


图 7-69　含积分控制和反馈—前馈的阶跃响应

▲7.10.3　扩展估计器

到目前为止，我们所讨论的鲁棒控制是基于全状态反馈的。如果状态不可用，和一般情况一样，全状态反馈，$\mathbf{Kx}$，可以用估计状态 $\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$ 代替，估计器的构造跟以前的方法一样。作为对外部输入设计控制方法的最终说明，在这一节中，我们介绍一个跟踪参考输入和抑制扰动的方法。该方法增加估计器以从外部信号中加入估计，使得我们可以消除它们对系统误差产生的影响。

假设对象由以下方程描述

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx} + \mathbf{G}u + \mathbf{G}w \tag{7-226a}$$

$$y = \mathbf{Hx} \tag{7-226b}$$

$$e = \mathbf{Hx} - r \tag{7-226c}$$

另外，假设所有的参考输入 r 和扰动 w 都是已知的，且满足下面方程①

① 我们再次以二阶方程为例推导含外部信号的结果；该讨论可推广到更高阶的方程。

$$\alpha_w(s)w = \alpha_\rho(s)w = 0 \tag{7-227}$$

$$\alpha_r(s)r = \alpha_\rho(s)r = 0 \tag{7-228}$$

其中

$$\alpha_\rho(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$$

它们对应于图 7-70a 中的多项式 $\alpha_w(s)$ 和 $\alpha_r(s)$。一般的，我们选择图 7-70b 中的等效扰动多项式 $\alpha_\rho(s)$ 作为 $\alpha_w(s)$ 和 $\alpha_r(s)$ 的最小公共乘积因子。由于要考虑输出的稳态响应，第一步要认识到有一个输入等效信号 ρ 满足与 r 和 w 相同的方程，并且进入系统的位置与控制信号相同，如图 7-70b 所示。跟过去一样，我们必须假设对象没有零点与式(7-227)的任何根相同。在这里，我们可以用下式替换式(7-226)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}(u+\rho) \tag{7-229a}$$

$$e = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} \tag{7-229b}$$

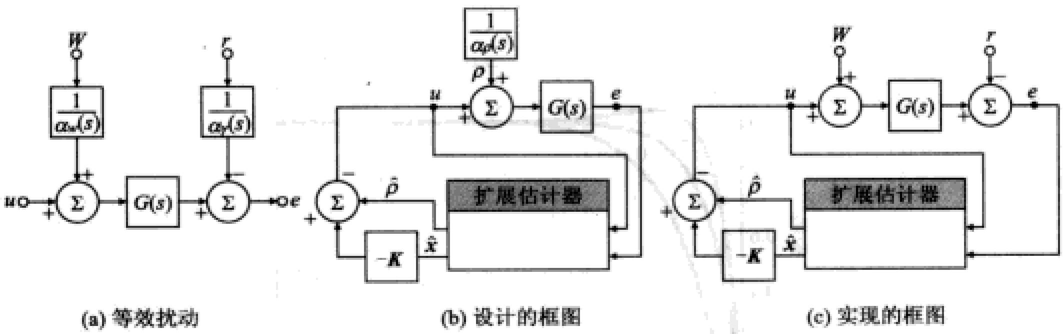


图 7-70　含扩展估计器的跟踪及抑制扰动的系统框图

如果能够估计等效输入，那么可以在控制中加入一项 $-\hat{\rho}$，它将消去实际扰动和参考输入的影响并使得输出稳态时能跟踪 r。为此，我们联立式(7-226)和式(7-227)及状态描述得到

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}u \tag{7-230a}$$

$$e = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z} \tag{7-230b}$$

其中 $\boldsymbol{z} = [\rho \quad \dot{\rho} \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \boldsymbol{0} \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{G} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{G} \end{bmatrix} \tag{7-231a}$$

$$\boldsymbol{C} = [0 \quad 0 \quad \boldsymbol{H}] \tag{7-231b}$$

式(7-231)给出的系统是不能控的，因为我们不能由 u 影响 ρ。但是，如果 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是能观测的并且如果系统($\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}$)没有零点与式(7-227)的根相同，则式(7-231)的系统交是能观测的，我们可以构造一个观测器计算对象和 ρ 的所有状态的估计量。估计器方程是标准的，而控制的方程则不是标准的：

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{B}u + \boldsymbol{L}(e - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{z}}) \tag{7-232a}$$

$$u = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\rho} \tag{7-232b}$$

根据原始变量，估计器方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\rho}} \\ \ddot{\hat{\rho}} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & 0 & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \dot{\hat{\rho}} \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \mathbf{L}_3 \end{bmatrix} [e - \mathbf{H}\hat{x}] \tag{7-233}$$

设计出来的系统框图如图 7-70b 所示。如果我们写出式(7-233)中 $\hat{x}$ 的最后方程并代入式(7-232b)，由于 $\hat{\rho}$ 的消去作用，简化结果为

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{G}\hat{\rho} + \mathbf{F}\hat{x} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}\hat{x} - \hat{\rho}) + \mathbf{L}_3(e - \mathbf{H}\hat{x}) = \mathbf{F}\hat{x} + \mathbf{G}(-\mathbf{K}\hat{x}) + \mathbf{L}_3(e - \mathbf{H}\hat{x}) = \mathbf{F}\hat{x} + \mathbf{G}\bar{u} + \mathbf{L}_3(e - \mathbf{H}\hat{x})$$

利用式(7-233)的估计器和式(7-232b)的控制，状态方程为

$$\dot{x} = \mathbf{F}x + \mathbf{G}(-\mathbf{K}\hat{x} - \hat{\rho}) + \mathbf{G}\rho \tag{7-234}$$

根据估计误差，式(7-234)可改写为

$$\dot{x} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K})x + \mathbf{G}\mathbf{K}\tilde{x} + \mathbf{G}\tilde{\rho} \tag{7-235}$$

因为我们所设计估计器为稳定的，稳态时 $\tilde{\rho}$ 和 $\tilde{x}$ 的值趋于零，并且状态的最后值不受外部输入的影响。最后实现的系统框图如图 7-70c 所示。下面以一个很简单的例子来阐明该过程的步骤。

例 7.38　扩展估计器电机速度系统的稳态跟踪和扰动抑制

对以下描述的电机速度系统构造一个估计器，以控制状态和消去输出的斜坡信号，并跟踪常数参考输入。

$$\dot{x} = -3x + u \tag{7-236a}$$

$$y = x + w \tag{7-236b}$$

$$\dot{w} = 0 \tag{7-236c}$$

$$\dot{r} = 0 \tag{7-236d}$$

配置控制极点为 $s=-5$ 且扩展估计器的两个极点为 $s=-15$。

解：首先，我们忽略等效扰动设计的控制规律。通过观察可以知道，增益 -2 可将单极点从 -3 移到期望的 -5。所以，$K=2$。增加了等效外部输入 ρ 的系统如下，ρ 代替了真实的扰动 w 和参考输入 r

$$\dot{\rho} = 0$$
$$\dot{x} = -3x + u + \rho$$
$$e = x$$

扩展估计器方程为

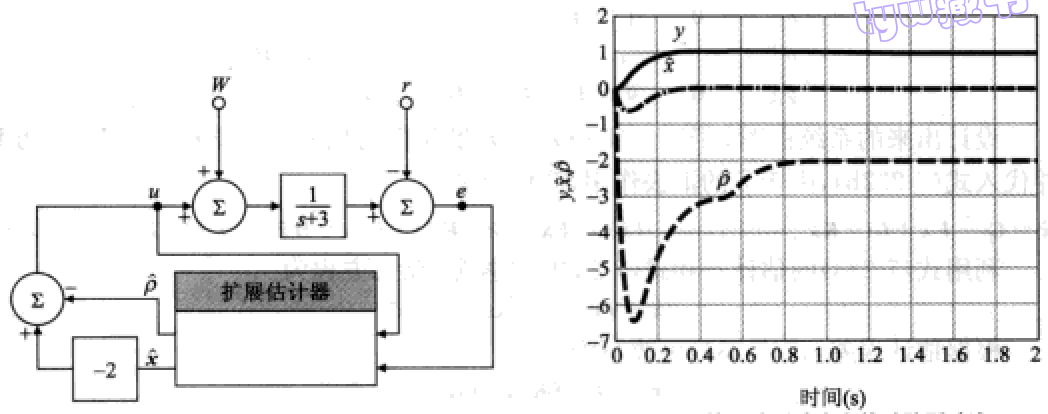
$$\dot{\hat{\rho}} = l_1(e - \hat{x})$$
$$\dot{\hat{x}} = -3\hat{x} + u + \hat{\rho} + l_2(e - \hat{x})$$

可通过下列特征方程

$$\det\begin{bmatrix} s & l_1 \\ 1 & s+3+l_2 \end{bmatrix} = s^2 + 30s + 225$$

得到估计器误差增益为 $\mathbf{L} = [225 \quad 27]^{\mathrm{T}}$。

图 7-71a 给出了系统的框图，对于输入 r（$t=0$ 时刻引入）和扰动（$t=0.5$ 时刻引入）的阶跃响应如图 7-71b 所示。



(a) 框图　　(b) 输入阶跃响应和扰动阶跃响应

图 7-71　含扩展估计器的电机速度系统

▲7.11　回路传递恢复(LTR)

在状态反馈控制器回路中引入估计器，可能影响系统的稳定性鲁棒性质[如相位裕度(PM)和幅值裕度(GM)特性可能变得相当差，如 Doyle 的著名例子所示(Doyle, 1978)]。但是，我们可以修正估计器的设计，尝试在某种程度上"恢复"线性二次回归(LQR)稳定性的鲁棒性质。这个过程，称为回路传递恢复(LTR)，尤其适用于最小相位系统。为了实现恢复，估计器的某些极点要配置在对象的零点上(或附近)，而剩下的极点要移到左半平面(足够远处)。LTR 的思想是重新设计估计器使得回路增益接近于 LQR 的结果。

回路传递恢复意味着反馈控制器可以设计成，在反馈系统(对象的输入或输出)的临界点上满足期望的灵敏度函数和补充灵敏度函数。当然，改善稳定的鲁棒性也要付出代价！新设计的系统可能具有较坏的传感噪声灵敏性。直观地说，我们可以令估计器的(部分)极点任意远，使得回路增益逼近 LQR 结果。另外，我们也可以从本质上想"反转"对象传递函数使得对象所有左半平面上的极点都被补偿器消去而达到期望的回路形式。很明显，它们之间有一个平衡，对于给定的问题，设计者必须谨慎地作出正确的选择，这取决于具体的控制系统。

LTR 现在是众所周知的方法，其明确的设计过程也已得到确定(Athans, 1986; Stein 和 Athans, 1987; Saberi et al., 1993)。同样的步骤也可应用于非最小相位系统，但并不能保证可能恢复的程度。LTR 法可以看作是基于线性二次回归的补偿器设计中平衡研究的系统过程。现在我们来说明 LTR 问题。

考虑以下线性系统

$$\dot{x} = Fx + Gu + w \tag{7-237a}$$

$$y = Hx + v \tag{7-237b}$$

其中 w 和 v 是不相关的零平均值白高斯噪声，协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_w \geqslant 0$ 且 $\boldsymbol{R}_v \geqslant 0$。估计器设计得到

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{G}u + \boldsymbol{L}(y - \hat{y}) \tag{7-238a}$$

$$\hat{y} = \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{7-238b}$$

得到一般动态补偿器

$$D_c(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F} + \boldsymbol{GK} + \boldsymbol{LH})^{-1}\boldsymbol{L} \tag{7-239}$$

现在我们将把噪声参数 $\boldsymbol{R}_w$ 和 $\boldsymbol{R}_v$ 视作动态补偿器设计的“把手”。不失一般性，让我们选择 $\boldsymbol{R}_w = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}^T$ 和 $\boldsymbol{R}_v = 1$。对于回路传递恢复，假设 $\Gamma = q\boldsymbol{G}$，其中 q 是标量设计参数。则可以用确定的设计参数 $\boldsymbol{R}_w$ 和 $\boldsymbol{R}_v$ 进行估计器设计。可以证明，对于最小相位系统，随着 q 的增大(Doyle 和 Stein，1979)，

$$\lim_{q\to\infty} D_c(s)G(s) = \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G} \tag{7-240}$$

对 s 的每一点都是收敛的，并且恢复的程度可以任意好。这个设计过程在极限 $q \to \infty$ 时有效“反转”了对象传递函数：

$$\lim_{q\to\infty} D_c(s) = \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G}G^{-1}(s) \tag{7-241}$$

这也就是为什么全回路传递恢复方法不适用于非最小相位系统的原因。该限制也可用对称根轨迹法来解释。随着 $q \to \infty$，估计器的某些极点趋近于以下方程的零点：

$$G_e(s) = \boldsymbol{H}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{\Gamma} \tag{7-242}$$

并且其余极点趋于无穷大[①][见式(7-166)和式(7-167)]。在实际中，LTR 设计过程还是可以用于非最小相位系统。恢复的程度将取决于非最小相位零点的位置。如果右半平面的零点设置在确定的闭环带宽之外，则在很多频率下足够的恢复还是可能的。Fredudenberg 和 Looze 在 1985 年讨论过反馈系统实现的限制在于右半平面零点。下面我们将通过一个简单例子说明 LTR 过程。

例 7.39　人造卫星姿态控制的 LTR 设计

考虑状态空间描述的人造卫星系统

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = 0$$

(a) 设计一个 LQR 控制器，其中 $\boldsymbol{Q} = \rho \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}$ 且 $R = 1$，$\rho = 1$，并确定其环路增益。

(b) 对 $q = 1, 10, 100$，用回路传递恢复法(LTR)分别设计补偿器以恢复(a)中的 LQR 环路增益。

(c) 考虑附加高斯白噪声后的激励行为，比较(b)中不同参数的结果。

解：利用 lqr 函数，所选定的 LQR 权重得到的反馈增益 $K = [1 \quad 1.414]$。开环传递函数为

$$\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G} = \frac{1.414(s + 0.707)}{s^2}$$

该 LQR 开环增益下的幅值频率响应如图 7-72 所示。用 lqe 函数设计估计器，令 $\boldsymbol{\Gamma} = q\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{R}_w = \boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{\Gamma}$，$\boldsymbol{R}_v = 1$，并选择 $q = 10$，得到估计器增益

---

① 在巴特沃斯空间中。

$$L=\begin{bmatrix}14.142\\100\end{bmatrix}$$

补偿器传递函数为

$$D_c(s)=K(sI-F+GK+LH)^{-1}L=\frac{155.56(s+0.6428)}{(s^2+15.556s+121)}=\frac{155.56(s+0.6428)}{(s+7.77+\mathrm{j}7.77)(s+7.77-\mathrm{j}7.77)}$$

且开环传递函数为

$$D_c(s)G(s)=\frac{155.56(s+0.6428)}{s^2(s+7.77+\mathrm{j}7.77)(s+7.77-\mathrm{j}7.77)}$$

图 7-72 显示了不同 q 值($q=1,10,100$)的开环传递函数的频率响应和理想 LQR 开环传递函数的频率响应。

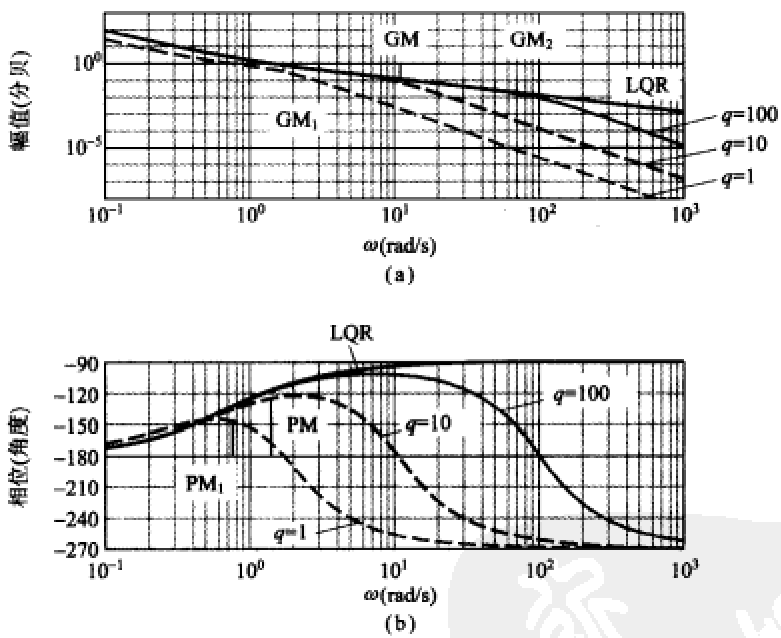


图 7-72　LTR 设计的频率响应曲线

从图中可看出，随着 q 值的增加，开环增益趋于接近 LQR。如图 7-72 所示，对于 $q=10$，“恢复”幅值裕度为 GM=11.1=20.9 分贝，而相位裕度 PM=55.06°。从而得到以上 LTR 设计过程的简单 MATLAB 语句如下：

```
F=[0 1; 0 0];
G=[0;1];
H=[1 0];
J=[0];
sys0=ss(F,G,H,J);
H1=[1 0];
sys=ss(F,G,H1,J);
w=logspace(-1,3,1000);
rho=1.0;
Q=rho*H1'*H1;
r=1;
```

```
[K]=lqr(F,G,Q,r)
sys1=ss(F,G,K,0);
[maggk1,phasgk1,w]=bode(sys1,w);

q=10;
gam=q*G;
Q1=gam'*gam;
rv=1;
[L]=lqe(F,gam,H,Q1,rv)

aa=F-G*K-L*H;
bb=L;
cc=K;
dd=0;
sysk=ss(aa,bb,cc,dd);
sysgk=series(sys0,sysk);
[maggk,phsgk,w]=bode(sysgk,w);
[gm,phm,wcg,wcp]=margin(maggk,phsgk,w)
loglog(w,[maggk1(:)maggk(:)]);
semilogx(w,[phasgk1(:)phsgk(:)]);
```

为了确定噪声 v 对激励行为的影响，我们确定图 7-73 所示的从 v 到 u 的传递函数。对于选定的 LTR 设计参数值，$q=10$，我们得到

$$\frac{U(s)}{V(s)}=H(s)=\frac{-D_c(s)}{1+D_c(s)G(s)}$$

$$=\frac{-155.56s^2(s+0.6428)}{s^4+15.556s^3+121s^2+155.56s+99.994}$$

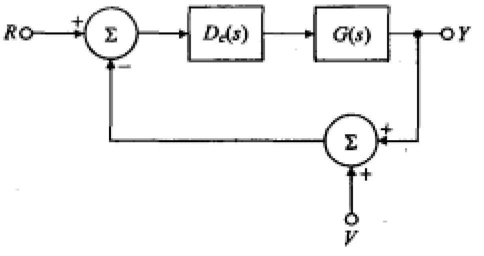


图 7-73 LTR 闭环系统

一个有关噪声对激励行为的影响的合理衡量参考是控制 u 在附加噪声 v 影响下的均方根(RMS)值。控制的均方根值，可用下式计算：

$$\|u\|_{rms}=\left(\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}u(t)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7-243}$$

其中 T_0 是信号持续时间。假设高斯白噪声 v，控制的均方根值也可以解析地确定(Boyd 和 Barratt，1991)。含外部带限白噪声的闭环 Simulink 框图如图 7-74 所示。利用 Simulink 模拟，对应于 LTR 设计参数 q 的不同值的控制均方根值计算结果列于表 7-2。随着 q 值增加，结果增大。

表 7-2 对 LTR 不同调整参数 q 计算均方根控制值

q	$\|u\|_{rms}$
1	0.1454
10	2.8054
100	70.5216

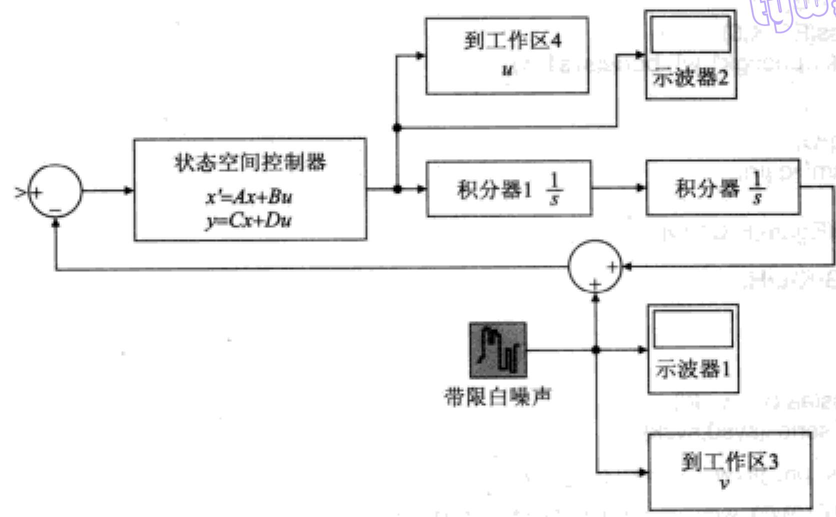


图 7-74　LTR 的 Simulink 框图

▲7.12　有理传递函数的直接设计

对目前为止所讨论的状态空间设计，一个可选择的方法是假定一个二输入（r 和 y）单输出的一般结构动态控制器，并且求解控制器的传递函数以得到明确的 r 到 y 的传递函数。该方法的框图如图 7-75 所示。我们把受控对象写成以下传递函数而不是状态方程的形式。

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b(s)}{a(s)} \tag{7-244}$$

控制器也用它的传递函数表示，在这种情况下，双输入单输出的传递函数为

$$U(s)=-\frac{c_y(s)}{d(s)}Y(s)+\frac{c_r(s)}{d(s)}R(s) \tag{7-245}$$

这里，$d(s)$，$c_y(s)$，$c_r(s)$ 是多项式。为了实现图 7-75 和式(7-245)的控制器，分子多项式的阶数必须不能高于分母多项式的阶数。

为了实现设计，我们要求式(7-244)和式(7-245)定义的闭环传递函数与期望传递函数相匹配。

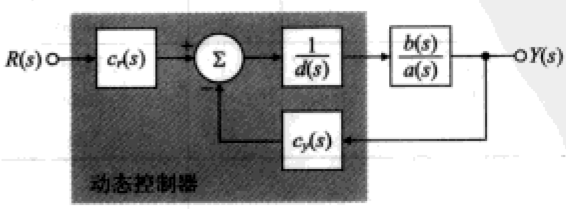


图 7-75　直接传递函数的公式表达

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{c_r(s)b(s)}{\alpha_c(s)\alpha_e(s)} \tag{7-246}$$

式(7-246)告诉我们，受控对象的极点一定是整个系统的极点。改变该极点的唯一方法是让 $b(s)$ 的参数出现在 α_c或 α_e。我们联立式(7-244)和式(7-245)得到

$$a(s)Y(s)=b(s)\left[-\frac{c_y(s)}{d(s)}Y(s)+\frac{c_r(s)}{d(s)}R(s)\right] \tag{7-247}$$

上式可改写成

$$[a(s)d(s)+b(s)c_y(s)]Y(s)=b(s)c_r(s)R(s) \tag{7-248}$$

通过比较式(7-246)和式(7-247)，可以马上看出，如果能解以下任意给定 a,b,α_c和 α_e的**丢番图方程(Diophantine equation)**，我们就可以完成设计

$$a(s)d(s)+b(s)c_y(s)=\alpha_c(s)\alpha_e(s) \tag{7-249}$$

因为每个传递函数都是一个多项式的分式的形式，所以我们可以假设 $a(s)$和 $d(s)$ 是一多项式(**monic polynomials**)；也就是说，在每个多项式中，最高次数的 s 的系数为1。问题在于，如果我们令式(7-249)中同阶数的 s 的系数相等，共有多少条方程，当中有多少未知？如果 $a(s)$ 是 n 阶的(给定)而 $d(s)$ 是 m 阶的(可选)，则直接可数出 $d(s)$ 和 $c_y(s)$ 中有 $2m+1$ 未知且从 s 的阶数系数中可得 $m+n$ 个方程。则要求满足 $2m+1\geqslant n+m$，或 $m\geqslant n-1$。

一个可能的解法是选择 $d(s)$ 为 n 阶而 $c_y(s)$ 为 $n-1$ 阶。对应于全阶估计器的状态空间设计情况中，有 $2n$ 个方程且对于 $2n$ 阶的 $\alpha_c\alpha_e$有 $2n$ 个未知。结果，当且仅当 $a(s)$ 和 $b(s)$ 没有公共因子，方程对于任意的 α_i有解[①]。

例 7.40 多项式传递函数的极点配置

用多项式方法，对例 7.30 的三阶受控对象设计一个 n 阶控制器。注意，如果将例 7.30 的多项式 α_c 和 α_e 相乘，则得到期望闭环特征方程：

$$\alpha_c(s)\alpha_e(s)=s^6+14s^5+122.75s^4+585.2s^3+1505.64s^2+2476.8s+1728 \tag{7-250}$$

解：令 $b(s)=10$，利用式(7-249)，我们得到

$$(d_0s^3+d_1s^2+d_2s+d_3)(s^3+10s^2+16s)+10(c_0s^2+c_1s+c_2)\equiv\alpha_c(s)\alpha_e(s) \tag{7-251}$$

展开多项式 $d(s)$和 $c_y(s)$，它们的系数分别为 d_i 和 c_i。

现在，令式(7-251)中相同阶数的 s 的系数相等，得出参数必须满足[②]

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\10&1&0&0&0&0&0\\16&10&1&0&0&0&0\\0&16&10&1&0&0&0\\0&0&16&10&10&0&0\\0&0&0&16&0&10&0\\0&0&0&0&0&0&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_0\\d_1\\d_2\\d_3\\c_0\\c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\14\\122.75\\585.2\\1505.64\\2476.8\\1728\end{bmatrix} \tag{7-252}$$

① 如果它们确实有公共因子，则将出现在式(7-249)的左边；因为方程有解，则它也必定出现式(7-249)的右边，也就是 α_c或 α_e的因子。

② 式(7-252)左边的矩阵称为西尔威斯特矩阵并且当且仅当 $a(s)$ 和 $b(s)$ 没有公共因子时，它是非奇异的。

式(7-252)的解为

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, & c_0 &= 190.1 \\ d_1 &= 4, & c_1 &= 481.8 \\ d_2 &= 66.75, & c_2 &= 172.8 \\ d_3 &= -146.3 \end{aligned}$$

[该解可通过 MATLAB 中的 x=a\b 命令得到，其中 a 是西尔威斯特矩阵而 b 是式(7-252)的右边矩阵。] 所以控制器传递函数为

$$\frac{c_y(s)}{d(s)} = \frac{190.1s^2 + 481.8s + 172.8}{s^3 + 4s^2 + 66.75s - 146.3} \tag{7-253}$$

注意，只要将控制器 $D_c(s)$(通过状态变量法得到)的系数展开，就会发现式(7-253)的系数与 $D_c(s)$的系数相同。

用多项式法也可得到降阶补偿器。

例 7.41　多项式传递函数形式的降阶设计

对例 7.30 中的三阶系统设计一个降阶控制器。期望特征方程为

$$\alpha_c(s)\alpha_e(s) = s^5 + 12s^4 + 74s^3 + 207s^2 + 378s + 288.$$

解：解此问题所需的方程式与求解式(7-251)的相同，但这里令 $d(s)$和 $c_y(s)$的阶数为 $n-1$。我们需要解下式

$$(d_0s^2 + d_1s + d_2)(s^3 + 10s^2 + 16s) + 10(c_0s^2 + c_1s + c_2) \equiv \alpha_c(s)\alpha_e(s) \tag{7-254}$$

令式(7-254)中相同阶数的 s 的系数相等，得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 74 \\ 207 \\ 378 \\ 288 \end{bmatrix} \tag{7-255}$$

其解为(再一次使用 MATLAB 中的 x=a\b 命令)

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, & c_0 &= -20.8 \\ d_1 &= 2.0, & c_1 &= -23.6 \\ d_2 &= 38, & c_2 &= 28.8 \end{aligned}$$

结果控制器为

$$\frac{c_y(s)}{d(s)} = \frac{-20.8s^2 - 23.6s + 28.8}{s^2 + 2.0s + 38} \tag{7-256}$$

同样地，将例 7.31 中用状态变量法得到的 $D_{cr}(s)$ 展开并且不考虑它们之间数值上的微小差别，式(7-256)与 $D_{cr}(s)$ 完全相同。

注意，在例 7.40 和例 7.41 中并没有将参考输入多项式 $c_r(s)$ 列入分析。我们可以选择 $c_r(s)$ 让它配置从 $R(s)$ 到 $Y(s)$ 的传递函数的零点。这跟 7.9 节中 $\gamma(s)$ 所扮演的角色相同。选择 $c_r(s)$ 的一个方法是让它消去 $\alpha_e(s)$，使得整体传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_{\mathrm{s}}b(s)}{a_c(s)}$$

这对应于 7.9 节中介绍的引入参考输入的的选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 的第一个方法，也是最普遍的方法。

除此以外，还可以在多项式设计法中引入积分控制和基于内部状态的鲁棒跟踪控制。这要求我们用误差控制，并且控制器在内部状态处有极点。对图 7-75 所示的结构用误差控制，我们只需令 $c_r=c_y$。对控制器配置期望的极点，必须要求 $d(s)$有一个明确的因子。而对于积分控制（最普遍的情况）这是微不足道的。如果我们让最后一项 d_m 等于零，则多项式 $d(s)$有一个根为零。如果 $m=n$，那么方程可解。对于更一般的内部状态，我们定义 $d(s)$为降阶多项式和某一明确多项式（如式(7-277)）的乘积，并且如以前所做的，匹配丢番图方程。这个过程是简单易懂的，但非常冗长。再一次提醒大家注意，虽然多项式设计法是有效的，但该方法的数值问题往往比应用状态方程方法更差。对于高阶系统，状态空间设计法更优。

▲7.13 含纯滞后时间的系统设计

在由集总元件组成的任何线性系统中，系统在激励下会立即响应。在某些反馈系统中（如过程控制系统，不管是操作指导系统还是计算机控制系统）存在**纯时间滞后**（也称为**传输滞后**）。这些性质使得系统的响应保持为零直到延迟 λ 秒之后。典型的阶跃响应如图 7-76a 所示。纯滞后环节的传递函数为 $e^{-\lambda s}$。我们可以把含时滞的单输入单输出(SISO)系统的传递函数表示为

$$G_I(s)=G(s)e^{-\lambda s} \tag{7-257}$$

其中 $G(s)$不含有纯时间滞后。因为 $G_I(s)$不存在有限的状态描述，不可能使用状态变量法的标准用法。但是 O. J. M. 史密斯(1985)证明了如何构造有效地消除回路中时滞的

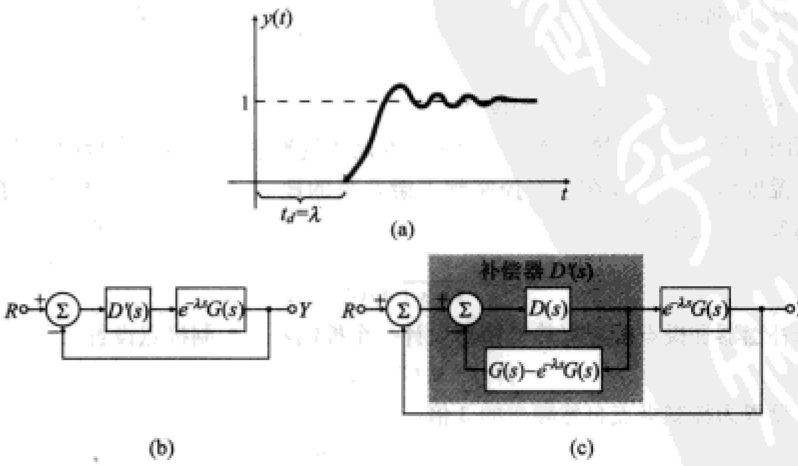


图 7-76 含时滞系统的史密斯调节器

反馈结构，并且允许反馈的设计只依赖于 $G(s)$，这就可以用标准方法完成。这个方法的结论就是含滞后 λ 的闭环传递函数的设计与不含时滞的闭环设计有相同的响应。为了说明该方法是如何实现的，让我们考虑图 7-76b 所示的反馈构造。整体的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\mathcal{T}(s)=\frac{D'(s)G(s)e^{-\lambda s}}{1+D'(s)G(s)e^{-\lambda s}} \tag{7-258}$$

史密斯建议用以下方法解出 $D'(s)$：建立一个虚拟的整体传递函数，其控制器传递函数 $D(s)$ 与 $G(s)$ 在同一环路中，而与滞后不在同一环中，整体的滞后为 λ：

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\mathcal{T}(s)=\frac{D(s)G(s)}{1+D(s)G(s)}e^{-\lambda s} \tag{7-259}$$

令式(7-258)和式(7-259)相等得到 $D'(s)$：

$$D'(s)=\frac{D(s)}{1+D(s)[G(s)-G(s)e^{-\lambda s}]} \tag{7-260}$$

如果受控对象的传递函数和滞后是已知的，$D'(s)$ 可通过图 7-76c 所示的含实元件的框图实现。利用这一知识，基于式(7-259)，我们可以用一般方法设计补偿器 $D(s)$，就是把它看作不含有时滞环节，并如图 7-76c 所示来实现该环节。得到的闭环系统行为将跟不含有时滞环节的有限闭环系统一样。当纯滞后 λ 比过程时间常数大时，比如说在纸浆和纸张生产过程的应用中，这一设计方法显得更为合适。

请注意，从概念上说，史密斯补偿器反馈回一个模拟对象输出以消去真实对象输出，然后加入一个不含时滞的模拟对象输出。可以证明，图 7-76c 所示的 $D'(s)$ 等效于满足相位超前补偿器要求的一般调节器。为了在模拟系统中实现这一补偿器，必须用 Padé 逼近来代替 $D'(s)$ 中的时滞；而对于数字补偿器，滞后可以精确实现(见第 8 章)。另外，补偿器 $D'(s)$ 是 $G(s)$ 的一个强函数，用于控制器的对象状态中的一个小误差可能将导致闭环系统的大误差，甚至是不稳定。该设计非常敏感。如果把 $D(s)$ 实现为 PI 控制器，则必须(如减小增益)想办法保证稳定性和合理的性能。关于史密斯调节器的自动调节和 Stanford 静水力精度车床流动温度控制的现代应用，请读者参考 J－J. Huang 和 D. B. DeBra(2000)的著作。

例 7.42　热交换器：纯时间滞后的设计

图 7-77 给出了例 2.13 的热交换器。产品温度是通过控制交换器绝缘套的蒸汽流动速度来实现控制的。温度传感器设置在蒸汽控制阀下游几里的地方，所以在状态中引入了运输滞后。一个合理的模型由下式给出

$$G(s)=\frac{e^{-5s}}{(10s+1)(60s+1)}$$

用史密斯补偿器和极点配置对热交换器设计一个控制器。控制极点设置为

$$p_c=-0.05\pm0.087j$$

而估计器极点设置为控制极点自然频率的 3 倍：

$$p_e=-0.15\pm0.26j$$

并用 Simulink 模拟系统的响应。

解：状态空间方程的一个合适组合为

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-0.017 & 0.017\\ 0 & -0.1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}u(t-5)$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

$$\lambda=5$$

对于精确的控制极点位置并暂时忽略时间滞后，我们得到状态反馈增益为 $\boldsymbol{K}=[5.2\ \ -0.17]$。

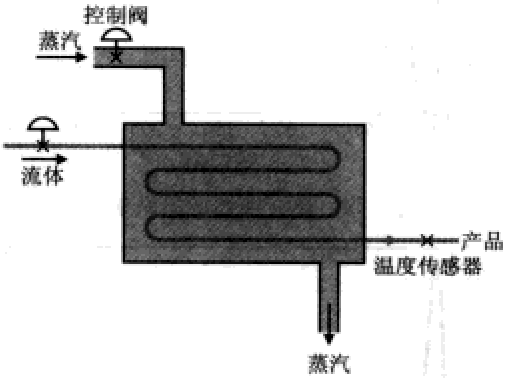


图 7-77 热交换器

对于给定的估计器极点，全阶估计器的增益矩阵为 $\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0.18\\ 4.2\end{bmatrix}$。

结果控制器传递函数为

$$D(s)=\frac{U(s)}{Y(s)}=\frac{-0.25(s+1.8)}{s+0.14\pm 0.27\mathrm{j}}$$

如果我们选择调整为单位闭环直流增益，则 $\overline{N}=1.2055$。

系统的 Simulink 框图如图 7-78 所示。系统的开环和闭环阶跃响应和控制量如图 7-79 和图 7-80 所示，而系统的根轨迹(不含滞后)如图 7-81 所示。注意，在图 7-79 和图 7-80 中，时间滞后 5 秒相对于系统响应来说很小，在这种情况下几乎可以忽略。

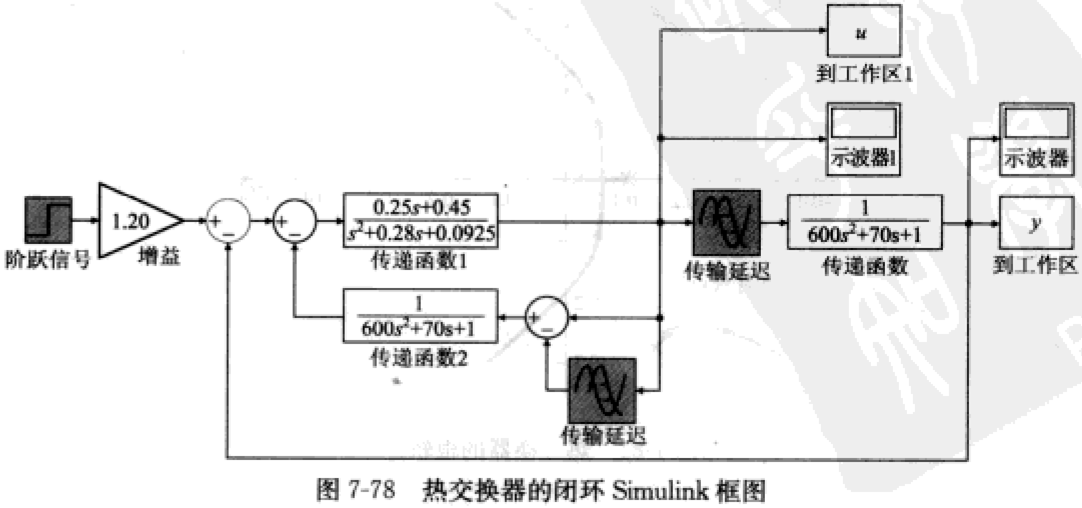


图 7-78 热交换器的闭环 Simulink 框图

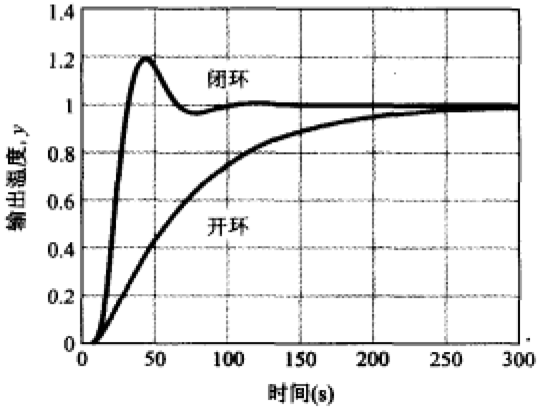


图 7-79　热交换器的阶跃响应

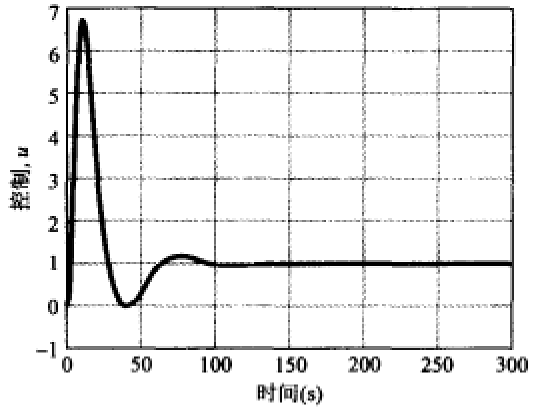


图 7-80　热交换器的控制量

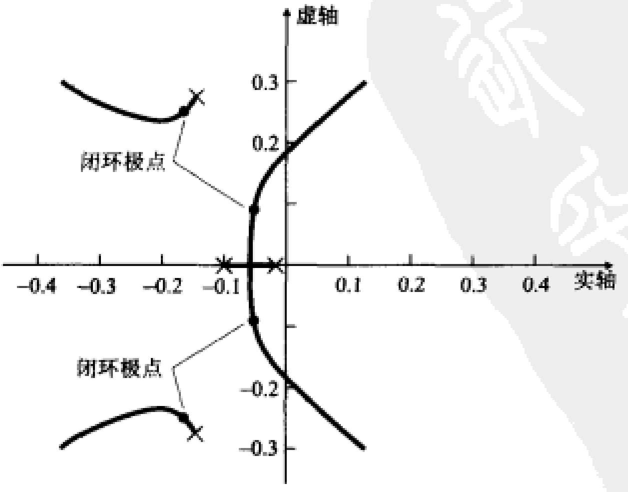


图 7-81　热交换器的根轨迹

小结

☐ 对于零点不多于极点的任何传递函数，状态空间形式与微分方程是对应的。

☐ 状态空间描述有多种标准型。它们是**能控标准型**、**能观标准型**和**模态标准型**。

☐ 开环极点和零点可通过状态描述矩阵($\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H},J$)计算

极点：$p=\text{eig}(\boldsymbol{F})$，$\det(p\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})=0$

零点：$\det\begin{bmatrix} z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H} & J \end{bmatrix}=0$

☐ 对任意 n 阶能控系统，存在状态反馈规律使得可以将闭环极点配置在任意 n 阶**控制特征方程**的根上。

☐ 可以引入参考输入使得对阶跃响应有零稳态误差。这一性质对于参数变化不具备鲁棒性。

☐ 理想的闭环极点配置取决于期望的瞬态响应，对参数变化的鲁棒性和动态特性与控制量之间的平衡。

☐ 可以选择闭环极点以得到主导的二阶响应，与原型的动态响应相匹配，或使得二次性能指标的值最小。

☐ 对于任意 n 阶能观测系统，估计器(或观测器)可以只由传感输入和对象状态的估计构成。估计器误差系统的 n 个极点可以任意配置。

☐ 控制规律和估计器可以联合起来构成控制器，闭环系统的极点就由控制规律极点和估计器极点两部分组成。

☐ 基于估计器的控制器，引入**参考输入**就像允许配置 n 个任意零点。配置零点最普遍的选择是配置零点使得它消去估计器极点，这样就不会引起估计器误差。

☐ 可以引入**积分控制**增加对象状态，从而得到对阶跃信号的鲁棒稳态跟踪。该设计对于抑制常数扰动也是鲁棒的。

☐ 一般地，可以结合对象方程和参考状态得到**误差空间**，并为扩展系统设计控制规律实现**鲁棒控制**。鲁棒设计的实现证明了**内部状态原则**。当要保持鲁棒性时，可以加入对象状态的估计器。

☐ 可以扩展估计器，使得它包含等效控制扰动的估计，这样就可得到鲁棒跟踪和扰动抑制。

☐ 极点配置设计，包括积分控制，除了用状态描述以外，还可以用对象传递函数的多项式来进行计算。频繁使用多项式进行设计会导致数值精度问题。

☐ 含有纯时间滞后的对象控制器在设计时可视作没有滞后，而含时滞的对象的控制器在实际上也可以实现，可以设计为对参数变化响应灵敏。

☐ 表 7-3 列出了本章的重要方程，其中标有三角形的表示该方程是从课本中选读

章节中选出来的。

- □ 通过经验数据确定模型或者用经验修改理论模型，是用状态空间分析设计系统的一个重要环节，这在用频率响应设计法设计补偿器中是不必需的。

复习题

以下问题基于状态变量形式的系统，矩阵为 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$ 和 J，输入为 u，输出为 y，状态为 x。

1. 为什么把运动方程写为状态变量形式更为方便？
2. 写出该系统的传递函数表达式。
3. 写出系统传递函数极点的两种表达形式。
4. 写出系统传递函数零点的表达式。
5. 在什么情况下，系统的状态是能控的？
6. 在什么情况下，系统对输出 y 是能观测的？
7. 假设状态反馈为 $u=-\boldsymbol{Kx}$，给出闭环极点的表达式。
8. 在什么情况下可以选择反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$ 使得 $\alpha_c(s)$ 具有任意根？
9. 用 LQR 或者对称根轨迹设计反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的优点是什么？
10. 在反馈控制中应用估计器的主要原因是什么？
11. 设估计器增益为 $\boldsymbol{L}$，写出基于估计器的闭环极点表达式。
12. 在什么情况下可以选择估计器增益 $\boldsymbol{L}$ 使得 $\alpha_e(s)=0$ 的根是任意的？
13. 如果安排参考输入使得估计器的输入跟被控过程的输入一样，则整体的闭环传递函数是什么？
14. 如果引入参考输入使得允许零点配置为 $\gamma(s)$ 的根，则整体的闭环传递函数是什么？
15. 在状态反馈设计法中引入积分控制的三种标准方法是什么？

表 7-3 第7章的重要方程

名称	方程	原书页码
能控标准型	$\boldsymbol{A}_c=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$	453
	$\boldsymbol{B}_c=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}_c=[b_1\quad b_2\quad \cdots\quad \cdots\quad b_n]$, $D_c=0$	
状态描述	$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Fx}+\boldsymbol{G}u$	455
输出方程	$y=\boldsymbol{Hx}+Ju$	455

（续）

名　称	方　程	原书页码
状态转换	$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{T}$ $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{G}$ $y=\boldsymbol{H}\boldsymbol{T}z+Ju=\boldsymbol{C}z+Du$, 此处 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{T}$, $D=J$	456
能控性矩阵	$\mathcal{C}=[\boldsymbol{G}\quad \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}\cdots\boldsymbol{F}^{n-1}\boldsymbol{G}]$	457
状态方程的传递函数	$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\boldsymbol{H}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G}+J$	465
传递函数极点	$\det(p_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})=0$	467
传递函数零点	$\alpha_z(s)=\det\begin{bmatrix} z_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H} & J \end{bmatrix}=0$	468
控制特征方程	$\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{K})]=0$	473
用于极点配置的 Ackermann 控制公式	$\boldsymbol{K}=[0\quad\cdots\quad 0\quad 1]\mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\boldsymbol{F})$	477
参考输入增益	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H} & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_x \\ N_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix}$	481
含参考输入的控制方程	$u=N_ur-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{N}_xr)$ $=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+(N_u+\boldsymbol{K}\boldsymbol{N}_x)r$ $=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+\bar{N}r$	482
对称根轨迹	$1+\rho G_0(-s)G_0(s)=0$	488
估计器误差特征方程	$\alpha_e(s)=\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{H})]=0$	498
能观标准型	$\dot{\boldsymbol{x}}_o=\boldsymbol{F}_o\boldsymbol{x}_o+\boldsymbol{G}_ou$, $y=\boldsymbol{H}_o\boldsymbol{x}_o$, 此处 $\boldsymbol{F}_o=\begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & 1 \\ -a_n & 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{G}_o=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}\quad \boldsymbol{H}_o=[1\quad 0\quad 0\quad\cdots\quad 0]$	501
能观性矩阵	$\mathcal{O}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^{n-1} \end{bmatrix}$	502

（续）

名称	方程	原书页码
估计器公式	$\boldsymbol{L}=\alpha_e(\boldsymbol{F})\mathcal{O}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$	503
补偿器（补偿器）传递函数	$D_c(s)=\frac{U(s)}{Y(s)}=-\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{GK}+\boldsymbol{LH})^{-1}\boldsymbol{L}$	513
降阶补偿器传递函数	$D_r(s)=\frac{U(s)}{Y(s)}=\boldsymbol{C}_r(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_r)^{-1}\boldsymbol{B}_r+D_r$	513
控制器方程	$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{GK}-\boldsymbol{LH})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{L}y+\boldsymbol{M}r$ $u=-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}+\bar{N}r$	526
积分控制的扩展状态方程	$\begin{bmatrix}\dot{x}_I\\\dot{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\boldsymbol{H}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_I\\\boldsymbol{x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{G}\end{bmatrix}u-\begin{bmatrix}1\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}r+\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{G}_1\end{bmatrix}w$	537
▲多项式形式的一般控制器	$U(s)=-\frac{c_y(s)}{d(s)}Y(s)+\frac{c_r(s)}{d(s)}R(s)$	559
▲闭环特征方程的丢番图方程	$a(s)d(s)+b(s)c_y(s)=\alpha_c(s)\alpha_e(s)$	560

习题

7.3 节习题：框图和状态空间

7-1 2004年4月30日发射的地心引力探测－B(GP－B)实验装置的人造卫星和科学探测器的示意图如图7-82所示。假设宇宙飞船加上氦舱的质量 m_1 等于2000千克，探测器的质量 m_2 为1000千克。一个转子悬浮在探测器里并由电容性强迫装置强迫其跟随探测器运动。耦合弹簧系数 k 为 3.2×10^6。粘滞阻尼系数 b 为 4.6×10^3。

(a) 利用内部位置变量 y_1, y_2，写出含有质量 m_1 和 m_2 的系统运动方程。

(b) 实际扰动是微米数量级的，结果方程将非常小。所以，用以下变量改写你的方程：$z_1=10^6y_1, z_2=10^6y_2, v=1000u$。

(c) 用状态 $\boldsymbol{x}=[z_1\quad \dot{z}_1\quad z_2\quad \dot{z}_2]^T$ 将方程写成状态变量形式，输出为 $y=z_2$，且对质量 m_1 有一个脉冲输入 $u=10^{-3}\delta(t)$ 牛·秒。

(d) 利用以上数值，将以下形式的运动方程写入MATLAB

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Fx}+\boldsymbol{G}v \tag{7-261}$$

$$y=\boldsymbol{Hx}+Jv \tag{7-262}$$

并定义MATLAB系统：sysGPB=ss(F,G,H,J). 用MATLAB命令 impuls(sysGPB)描绘由脉冲引起的响应 y。这就是转子必须跟随的信号。

(e) 利用MATLAB命令 p=eig(F)找出系统极点（根）且用命令 z=tzero(F,G,H,J)找出系统的零点。

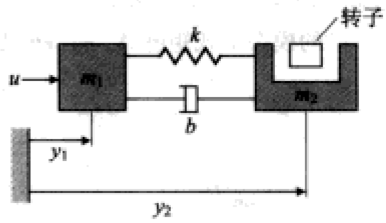


图 7-82　GP-B 人造卫星和探测器的示意图

7.4 节习题：状态方程的分析

7-2　对下面的传递函数给出能控标准型的状态描述矩阵：

(a) $\dfrac{1}{4s+1}$

(b) $\dfrac{5(s/2+1)}{(s/10+1)}$

(c) $\dfrac{2s+1}{s^2+3s+2}$

(d) $\dfrac{s+3}{s(s^2+2s+2)}$

(e) $\dfrac{(s+10)(s^2+s+25)}{s^2(s+3)(s^2+s+36)}$

7-3　利用 MATLAB 函数 tf2ss 求题 7-2 的状态矩阵。

7-4　写出题 7-2 传递函数状态描述矩阵的正常模态形式。保持每一对复数共轭极点在一起，以保证状态矩阵的每个状态为实值，并将它们视为能控标准型的独立子块。

7-5　一个含状态 $\boldsymbol{x}$ 的确定系统由以下状态矩阵描述

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{H}=[1\quad 0],\qquad J=0$$

找出转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得如果 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Tz}$，则描述 $\boldsymbol{z}$ 的动态特性的状态矩阵为能控标准型。计算新矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$。

7-6　证明对于状态的线性变换，传递函数并没有改变。

7-7　利用简化框图或梅森公式找出图 7-31 的能观标准型系统的传递函数。

7-8　假设给定一个系统，其状态矩阵为 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$（在这里 $J=0$）。找出变换 $\boldsymbol{T}$，使得在式(7-24)和式(7-25)下，新的状态描述矩阵为能观标准型。

7-9　利用式(7-41)的变换矩阵精确展开例 7.10 最后的方程式。

7-10　找出令式(7-35)的能观标准型转化为模态标准型的状态变换。

7-11　(a) 找出转换 $\boldsymbol{T}$，使得保持例 7.11 的磁带驱动系统为模态标准型但将输入矩阵 $\boldsymbol{B}_m$ 的每一个元素转化为单位值。

(b) 利用 MATLAB 证明你的转换。

7-12　(a) 找出转换 T，使得保持例 7.11 的磁带驱动系统为模态标准型但使得极点出现在 $\boldsymbol{A}_m$ 中以增加幅值。

(b) 用 MATLAB 验证(a)的结果，并给出状态矩阵的全新集合 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$。

7-13 用式(7-58)找出式(7-17a)的模态形式矩阵 $\boldsymbol{A}_m$ 的特征方程。

7-14 给定以下系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

初始条件为零，对于阶跃输入 u，找出 $\boldsymbol{x}$ 的稳态值。

7-15 考虑图 7-83 所示的系统：

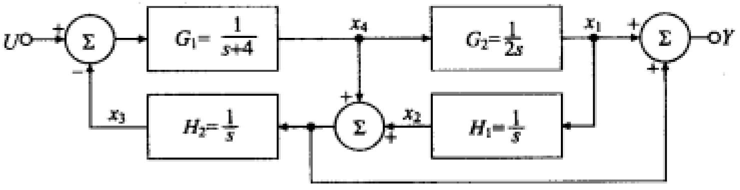


图 7-83 题 7-15 的框图

(a) 找出 U 到 Y 的传递函数。

(b) 利用图示的状态变量写出系统的状态方程。

7-16 利用图给定的状态变量写出图 7-84 中各系统的状态方程。利用框图处理法和矩阵代数法[如式(7-48)]写出每个系统的传递函数。

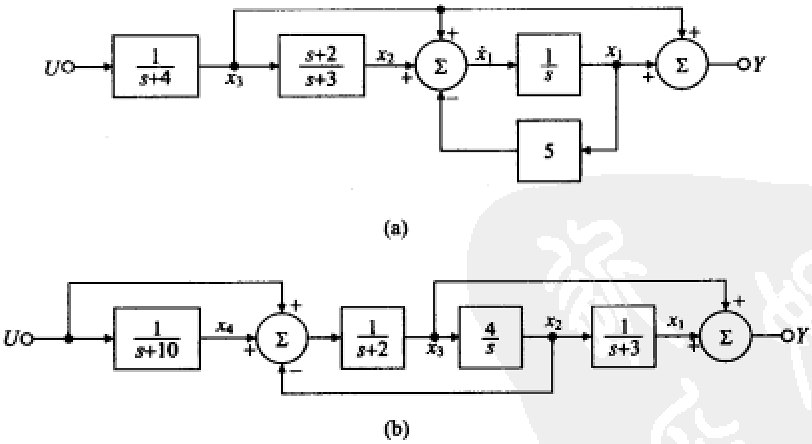


图 7-84 题 7-16 的框图

7-17 对于以下给出的每个传递函数，分别给出能控标准型和能观标准型状态方程。对每一种情况，画出框图并给出 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的逼近表达。

(a) $\dfrac{s^2-2}{s^2(s^2-1)}$（外部推力作用下倒立摆的控制）

(b) $\dfrac{3s+4}{s^2+2s+2}$

7-18 考虑以下传递函数

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+1}{s^2+5s+6} \tag{7-263}$$

(a) 通过将上式改写为

$$G(s)=\frac{1}{s+3}\left(\frac{s+1}{s+2}\right)$$

把 $G(s)$ 看作是两个一阶系统的串联，给出它的**串联实现**。

(b) 利用 $G(s)$ 的部分分式展开式给出 $G(s)$ 的**并联实现**。

(c) 用能控标准型实现 $G(s)$。

7.5 节习题：全状态反馈的控制规律设计

7-19　考虑以下描述的受控对象

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 7 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}x$$

(a) 对每个状态变量用一个积分器，画出系统的框图。

(b) 用矩阵代数法找出系统的传递函数。

(c) 假设反馈为以下形式，分别找出闭环特征方程

(1) $u=-\begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix}x$；

(2) $u=-Ky$。

7-20　对以下系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

设计一个状态反馈控制器满足以下要求：

☐ 闭环极点的阻尼系数 $\zeta=0.707$。

☐ 阶跃响应的峰值时间小于 3.14s。

用 MATLAB 验证你的设计。

7-21　(a) 对于以下系统设计一个状态反馈控制器使得闭环阶跃响应的超调量小于 25%，且在稳态值 1% 范围内的调节时间小于 0.115s：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -10\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

(b) 用 MATLAB 中的 step 命令验证你的设计是否满足要求。如果没有达到要求，根据需要调整反馈增益。

7-22　考虑以下系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

(a) 对系统设计一个状态反馈控制器使得闭环阶跃响应的超调量小于 5%，且在稳态值 1% 范围内的调节时间小于 4.6s。

(b) 用 MATLAB 中的 step 命令验证你的设计是否满足要求。如果没有达到要求，根据需要调整反馈增益。

7-23　考虑图 7-85 的系统。



图 7-85　题 7-23 的系统

(a) 用如 $\dot{x}=Fx+Gu$, $y=Hx$ 的能控标准型写出描述系统的方程组。

(b) 设计以下形式的控制规律

$$u=-[K_1\quad K_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

将闭环极点配置为 $s=-2\pm 2\mathrm{j}$。

7-24　输出能控性。在很多情况下，一个控制工程可能对控制输出 y 比控制状态 x 更感兴趣。如果在任意时刻，可以通过适当的控制信号 u^* 在有限的时间内将输出从零转移到任意期望输出 y^*，这样的系统称为**输出能控**(**output controllable**)。对于连续系统(F,G,H)，推出输出能控的必要条件和充分条件。输出与状态能控性有关系吗？如果有，是怎样的关系？

7-25　考虑以下系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&4&0&0\\-1&-4&0&0\\5&7&1&15\\0&0&3&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}u$$

(a) 找出该系统的特征值。(提示：注意块三角结构。)

(b) 找出该系统的能控状态和不能控状态。

(c) 对于每一个不能控状态，找出向量 v 使得

$$v^TG=0,\quad v^TF=\lambda v^T$$

(d) 证明存在无穷多个反馈增益 K 使得可以将系统的状态重新分配为 $-5,-3,-2$ 和 -2。

(e) 从以上极点配置中找出一个唯一的矩阵 K 使得系统不能控部分的初始条件不会影响能控部分。

7-26　两个单摆，由弹簧耦合，用如图 7-86 所示的作用于单摆球上大小相等方向相反的力 u 进行控制。运动方程为

$$ml^2\ddot{\theta}_1=-ka^2(\theta_1-\theta_2)-mgl\theta_1-lu$$
$$ml^2\ddot{\theta}_2=-ka^2(\theta_2-\theta_1)-mgl\theta_2-lu$$

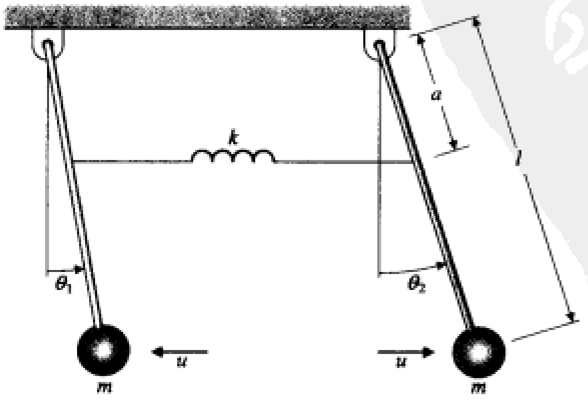


图 7-86　题 7-26 的耦合单摆

(a) 证明系统是不能控的。你能否将物理意义和能控或不能控联系起来?

(b) 有什么方法可以使得系统能控?

7-27 有确定应用的状态空间模型已经由以下状态描述矩阵给出：

$$F=\begin{bmatrix}0.174 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.157 & 0.645 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}-0.207\\ -0.005\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad H=[1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]$$

(a) 对每个状态变量设置一个积分器，画出系统的框图。

(b) 有一个学生计算得到 $\det\mathcal{C}=2.3\times10^{-7}$ 并断定系统是不能控的。这个学生的观点是正确的还是错误的? 为什么?

(c) 该实现是能观测的吗?

7-28 梯形算法(Van Dooren et al,1978)：任何实现(F,G,H)都可以通过**直角相似变换(orthogonal similarity transformation)**转换为($\bar{F}$, $\bar{G}$, $\bar{H}$)，其中 $\bar{F}$ 是 Hessenberg **上三角矩阵(upper Hessenberg matrix)**(在主对角线上方的对角线上有非零值)由以下给出

$$\bar{F}=T^TFT=\begin{bmatrix}* & \alpha_1 & \mathbf{0} & 0\\ * & * & \ddots & 0\\ * & * & \ddots & \alpha_{n-1}\\ * & * & \cdots & *\end{bmatrix},\quad \bar{G}=T^TG=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\g_1\end{bmatrix}$$

其中 $g_1\neq0$，且

$$\bar{H}=HT=[h_1\cdots h_n],\quad T^{-1}=T^T$$

直角变换对应于长度没有改变的经转换的向量(由矩阵的列表示)的一个**旋转(rotation)**。

(a) 证明对于某些 i 如果 $\alpha_i=0$ 且 $\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_{n-1}\neq0$，则经过变换之后，系统的能控和不能控状态将会一样。

(b) 怎样用这种方法验证(F,G,H)的能观和不能观?

(c) 这种方法比起用其他方法来确定能控和不能控有哪些优点?

(d) 怎样用这种方法确定如题 7-42 所示的能控和不能控子空间的基本组成?

这个算法可用来设计极点配置的数值稳定算法[见 Minimis 和 Paige(1982)]。该算法的名字来源于多输入描述中 α_i 是使得 $\bar{F}$ 成为梯形形状的块。

7.6 节习题：理想设计极点配置的选择

7-29 用小车的角度 θ 表示的倒立摆运动的一般方程为

$$\ddot{\theta}=\theta+u,\quad \ddot{x}=-\beta\theta-u$$

其中 x 是小车的位置而控制输入 u 是作用在小车上的力。

(a) 将状态定义为 $\mathbf{x}=[\theta\quad \dot{\theta}\quad x\quad \dot{x}]^T$，找出状态反馈增益 K 使得闭环极点配置在 $s=-1,-1,-1\pm1j$。对于(b)到(d)，假设 $\beta=0.5$。

(b) 利用对称根轨迹法选择极点，使带宽与(a)中的尽量接近，并找出控制规律使得闭环极点配置在你所选的极点位置上。

(c) 假设初始条件为 $\theta=10^{\circ}$，比较(a)和(b)的系统响应。你可能需要用到 MATLAB 中的 in-

itial 命令。

(d) 对于小车位置的常数指令输入，计算稳态误差为零时的 $\mathbf{N}_x$ 和 N_u，并比较两个闭环系统的阶跃响应。

7-30　考虑图 7-87 的反馈系统。找出 K、T 和 ξ 之间的关系使得对于阶跃输入，闭环传递函数时间乘上误差的绝对值的积分(ITAE)最小。

$$\mathcal{J}=\int_0^{\infty} t\,|e|\,\mathrm{d}t$$

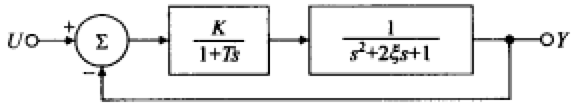


图 7-87　题 7-30 的控制系统

7-31　证明 LQR 设计的奈奎斯特图能避免半径为 1 的圆的圆心在 -1 点上，如图 7-88所示。并证明：这意味着 $\frac{1}{2}<\mathrm{GM}<\infty$，即幅值裕度的"上限"为 $\mathrm{GM}=\infty$ 且"下限"为 $\mathrm{GM}=1/2$，而相位裕度最小为 $\mathrm{PM}=\pm 60°$。所以在保证闭环系统稳定的情况下，LQR 增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可以乘上一个很大的标量也可以减半。

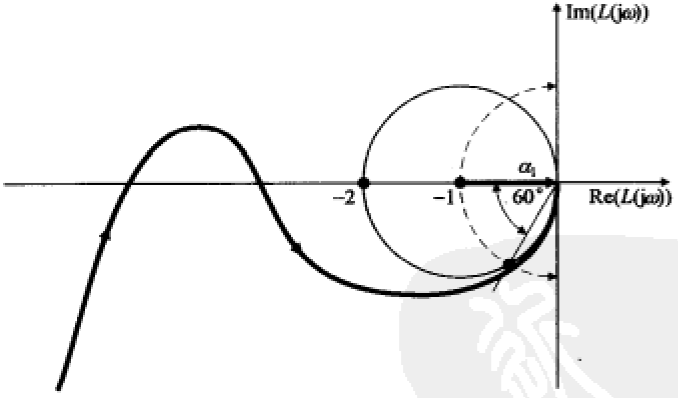


图 7-88　最佳调节器的奈奎斯特图

7.7 节习题：估计器设计

7-32　考虑以下系统

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix},$$

假设用以下形式的反馈 $u=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+r$，其中 r 是参考输入信号。

(a) 证明$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$是能观测的。

(b) 证明存在 $\boldsymbol{K}$ 使得$(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{K},\boldsymbol{H})$是不能观测的。

(c) 计算使得(b)中系统不能观测的 $\boldsymbol{K}=[1,\quad K_2]$形式的 $\boldsymbol{K}$ 值；也就是找出 $\boldsymbol{K}_2$ 使得闭环系统不能观测。

(d) 比较(c)中的闭环系统的传递函数与开环系统的传递函数。导致不能观的原因是什么？

7-33 考虑以下传递函数的系统

$$G(s)=\frac{9}{s^2-9}$$

(a) 找出系统能观标准型的$(\boldsymbol{F}_o,\boldsymbol{G}_o,\boldsymbol{H}_o)$。

(b) $(\boldsymbol{F}_o,\boldsymbol{G}_o)$能控吗？

(c) 计算$\boldsymbol{K}$使得闭环极点配置在$s=-3\pm3j$。

(d) (c)中的闭环系统是能观测的吗？

(e) 设计一个全阶估计器，估计器误差极点为$s=-12\pm12j$。

(f) 如果修改系统使得它具有零点

$$G_1(s)=\frac{9(s+1)}{s^2-9}$$

证明如果$u=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+r$，则存在反馈增益$\boldsymbol{K}$使得闭环系统不能观测。[再次假设用能观标准型实现$G_1(s)$。

7-34 解释线性系统的能控性，能观性与稳定性之间的关系。

7-35 考虑图7-89所示的电路。

(a) 写出电路的内部(状态)方程。输入$u(t)$为电流，输出y为电压。令$x_1=i_L$，$x_2=v_c$。

(b) R，L和C要满足什么条件才能保证系统是能控的？

(c) R，L和C要满足什么条件才能保证系统是能观的？

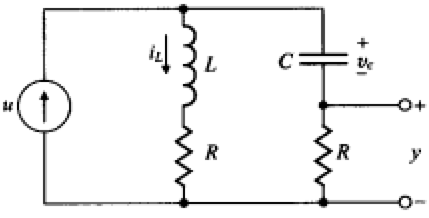


图7-89 题7-35的电路

7-36 某反馈系统的框图如图7-90所示。系统状态为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_p\\ \boldsymbol{x}_f\end{bmatrix}$$

且矩阵的维数如下：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{F}=n\times n,\quad \boldsymbol{L}=n\times 1,\\ &\boldsymbol{G}=n\times 1,\quad \boldsymbol{x}=2n\times 1,\\ &\boldsymbol{H}=1\times n,\quad r=1\times 1,\\ &\boldsymbol{K}=1\times n,\quad y=1\times 1.\end{aligned}$$

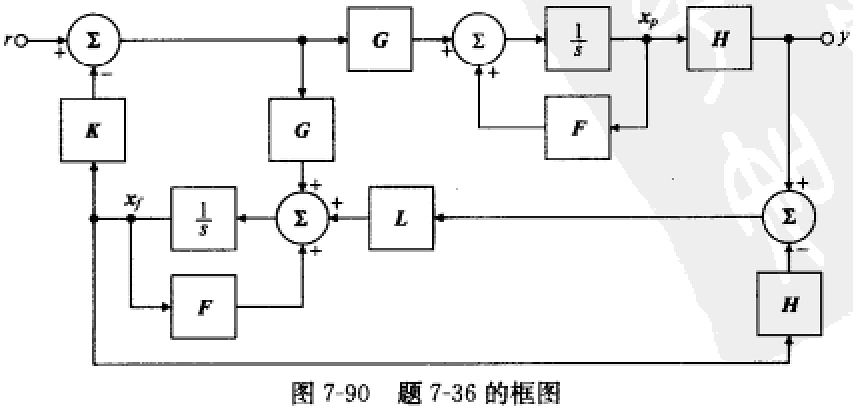


图7-90 题7-36的框图

(a) 写出系统的状态方程。

(b) 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}$，其中 $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}$，证明系统是不能控的。

(c) 找出从 r 到 y 的系统传递函数。

7-37　希望以下习题能帮助你更深入了解能控性和能观性。考虑图 7-91 的电路，以电压源 $u(t)$ 为输入，以电流 $y(t)$ 为输出。

(a) 用电容电压和电感电流作为状态变量，写出系统的状态方程和输出方程。

(b) 分别找出使得系统不能控和不能观的 R_1，R_2，C，L 之间的关系。

(c) 根据系统的时间常数，从物理上解释(b)中得到的关系。

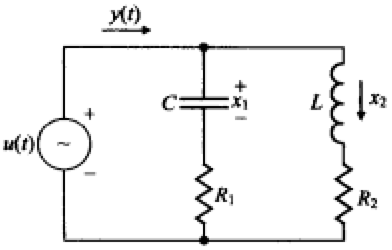


图 7-91　题 7-37 的电路

(d) 找出系统的传递函数。证明在(b)推导得到的关系下存在零极点相互抵消(也就是当系统不能控和不能观时)。

7-38　人造卫星运动线性方程为

$$\dot{x}=Fx+Gu$$
$$y=Hx$$

其中

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2\omega & 0 & 0\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad u=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

输入 u_1 和 u_2 是径向推力和切向推力，状态变量 x_1 和 x_3 是半径和背离参考(圆形)轨道的角度，输出 y_1 和 y_2 分别是测量的半径和角度。

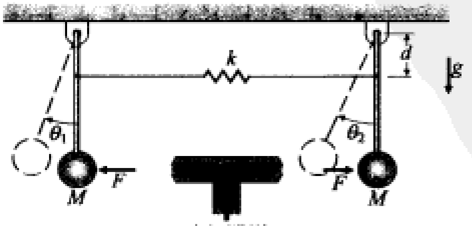
(a) 证明用全部控制输入，系统是能控的。

(b) 证明只用一个单独输入，系统是能控的，这个输入是什么？

(c) 证明用全部测量变量，系统是能观测的。

(d) 证明只用一个测量变量，系统是能观测的，这个测量变量是什么？

7-39　考虑图 7-92 的系统。



$K=kd$

$\ddot{\theta}_1=-\omega^2\theta_1-K(\theta_1-\theta_2)+F/ml$

$\ddot{\theta}_2=-\omega^2\theta_2+K(\theta_1-\theta_2)-F/ml$

图 7-92　题 7-39 的耦合单摆

(a) 写出系统的状态变量方程，利用$[\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^{\mathrm{T}}$ 作为状态向量且用 F 作为单输入。

(b) 证明只用 θ_1 测量值，所有状态变量是能观测的。

(c) 证明系统特征多项式是两个振荡器的乘积。为此，先写出含有状态变量的系统方程的新集合

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 \\ \theta_1 - \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

提示：如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是可逆矩阵，则有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

(d) 推导出以下结论：弹簧状态对 F 是能控的，但单摆状态是不能控的。

7-40 一个确定的五阶系统的特征方程的根为 0、−1、−2 和 −1±1j。将它分解为能控和不能控两部分，发现能控部分有特征方程的根为 0 和 −1±1j。将它分解为能观和不能观两部分，发现能观状态在 0，−1 和 −2。

(a) 对于此系统，$b(s)=\boldsymbol{H}\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})\boldsymbol{G}$ 的零点是什么？

(b) 只含能控和能观状态的降阶传递函数的极点是什么？

7-41 考虑图 7-93 中分别用串联、并联和反馈结构的系统。

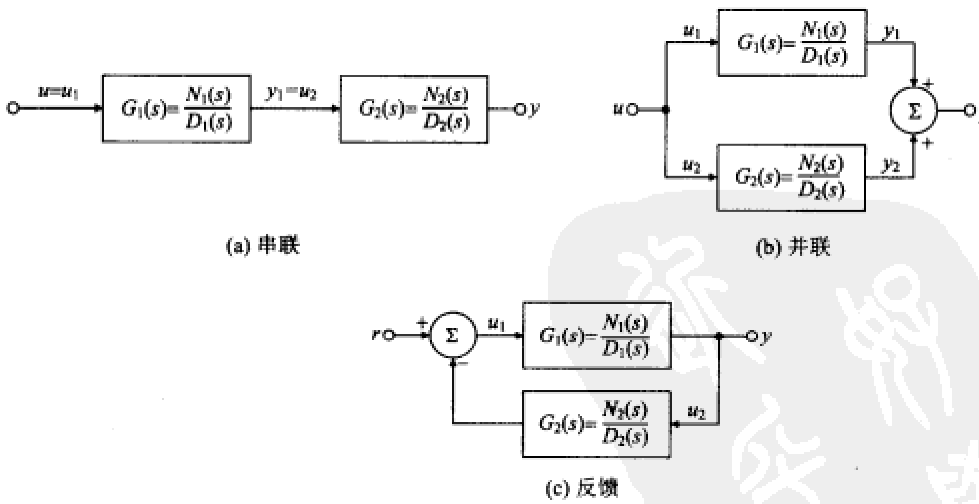


图 7-93 题 7-41 的框图

(a) 假设对于每个子系统，有能控—能观实现形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{G}_i u_i$$
$$y_i = \boldsymbol{H}_i \boldsymbol{x}_i, \text{其中 } i = 1,2$$

给出图 7-93 所示联合系统的状态方程。

(b) 对于每一种情况，确定使得系统能控和能观，多项式 N_i 和 D_i 的根应满足什么条件。从零极点相消的角度对你的结果作一个简单的解释。

7-42 考虑系统 $\ddot{y}+3\dot{y}+2y=\dot{u}+u$。

(a) 找出给定微分方程的能控标准型的状态矩阵 $\boldsymbol{F}_c$、$\boldsymbol{G}_c$ 和 $\boldsymbol{H}_c$。

(b) 在(x_1, x_2)平面上画出 $\boldsymbol{F}_c$ 的特征向量的草图，并画出对应于完全能观(x_0)和完全不能观($x_{\bar{0}}$)状态变量的向量。

(c) 用能观性矩阵 ϑ 表示 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{x}_{\bar{0}}$。

(d) 给出能观标准型的状态矩阵并从能控性的角度重做(b)和(c)。

7-43　位置保持卫星(如天气卫星)的运动方程为

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - 3\omega^2 x = 0,\quad \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = u,$$

其中，x=径向摄动，

y=纵向摄动，

u=y 方向上的引擎推力。

如图 7-94 描述。如果轨道与地球的旋转同步，则 $\omega = 2\pi/(3600\times24)\,\mathrm{rad/s}$。

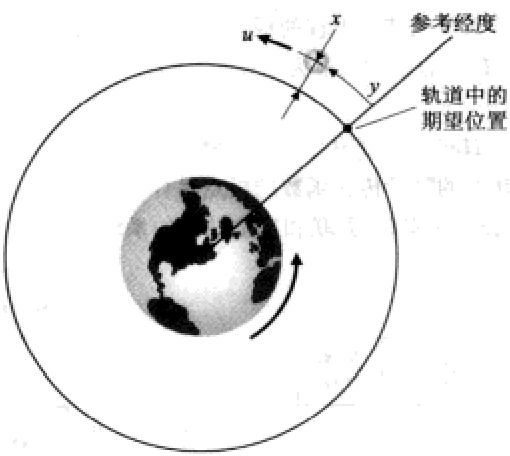


图 7-94　题 7-43 轨道中的位置保持卫星示意图

(a) 状态 $\boldsymbol{x} = [x\quad \dot{x}\quad y\quad \dot{y}]^{\mathrm{T}}$ 能观测吗？

(b) 选择 $\boldsymbol{x} = [x\quad \dot{x}\quad y\quad \dot{y}]^{\mathrm{T}}$ 作为状态向量且 y 作为测量值，设计一个全阶观测器，其极点为 $s = -2\omega, -3\omega, -3\omega\pm3\omega\mathrm{j}$。

7-44　图 7-95 所示的简单单摆的线性化运动方程为

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = u$$

(a) 写出状态空间形式的运动方程。

(b) 设计一个估计器(观测器)重构给定测量值 $\dot{\theta}$ 的单摆的状态。假设 $\omega = 5\,\mathrm{rad/s}$，并令估计器极点为 $s = -10\pm10\mathrm{j}$。

(c) 写出测量值 $\dot{\theta}$ 与估计值 θ 之间估计器的传递函数。

(d) 设计一个控制器(也就是确定状态反馈增益 $\boldsymbol{K}$)使得闭环特征方程的根为 $s = -4\pm4\mathrm{j}$。

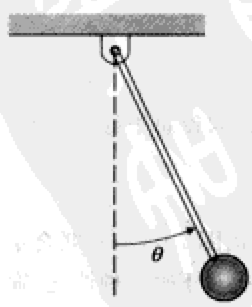


图 7-95　题 7-44 的单摆示意图

7-45　对惯性导航系统的误差分析，得到一般状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u,$$

其中，x_1＝东边速度误差；

x_2＝向北轴方向的平台倾斜；

x_3＝北轴回转仪的偏离；

u＝回转仪偏离的变化率。

将 $y=x_1$ 作为测量值设计一个降阶估计器，配置观测误差极点在 −0.1 和 −0.1。确保提供所有相关的估计器方程。

7.8 节习题：补偿器设计：联合控制规律和估计器

7-46　一个确定的过程有传递函数为 $G(s)=4/(s^2-4)$。

(a) 找出能观标准型的系统的 $\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 矩阵。

(b) 如果 $u=-\boldsymbol{Kx}$，计算 $\boldsymbol{K}$ 使得闭环控制极点配置在 $s=-2\pm 2\mathrm{j}$。

(c) 计算 $\boldsymbol{L}$ 使得估计器误差极点配置在 $s=-10\pm 10\mathrm{j}$。

(d) 给出结果控制器的传递函数[例如用式(7-177)]。

(e) 控制器和给定开环系统的幅值裕度和相位裕度分别是多少？

7-47　接近盘旋的直升机线性化纵向运动（见图 7-96）可用一般三阶系统来模仿

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{\theta}\\ \dot{u}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.4 & 0 & -0.01\\ 1 & 0 & 0\\ -1.4 & 9.8 & -0.02\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\ \theta\\ u\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6.3\\ 0\\ 9.8\end{bmatrix}\delta$$

q＝倾斜率，

θ＝机身倾斜角，

u＝水平速度（标准航行器标志）

δ＝旋翼倾斜角（控制变量）

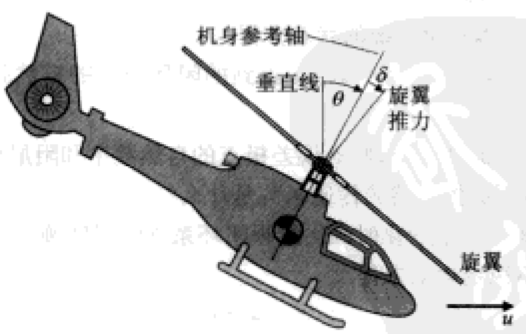


图 7-96　题 7-47 的直升飞机

假设我们的传感器测量水平速度作为输出：即 $y=u$。

(a) 找出开环极点位置。

(b) 系统能控吗？

(c) 找出将系统极点配置在 $s=-1\pm 1\mathrm{j}$ 和 $s=-2$ 的反馈增益。

(d) 为系统设计一个全阶估计器，估计器的极点为 −8 和 $-4\pm 4\sqrt{3}\mathrm{j}$。

(e) 设计一个所有极点在 −4 的降阶估计器。相比于全阶情况，降阶估计器的优缺点是什么？

(f) 利用(d)中设计的全阶估计器和控制增益计算补偿器传递函数，并用 MATLAB 画出频率响应。对于闭环设计画出伯德图，并标出相应的幅值裕度和相位裕度。

(g) 用降阶估计器重复(f)。

(h) 画出对称根轨迹(SRL)并为控制规律选择根使得控制带宽符合(c)的设计，并为全阶估计器选择根使得结果的估计器误差带宽与(d)的设计相容。画出相应的伯德图并在考虑带宽、稳定裕度、阶跃响应和对单位阶跃旋翼角输入的控制量各方面比较极点配置和 SRL 设计法。用 MATLAB 进行相关计算。

7-48 假设电机电流为 u 的直流驱动电机连接在小车的轮子上以控制装在小车的倒立摆的运动。对应于该系统的线性和一般方程可用以下式子表示

$$\ddot{\theta} = \theta + v + u$$
$$\dot{v} = \theta - v - u$$

其中，θ=摆角，

　　v=小车速度。

(a) 我们希望通过以下形式的反馈 u 控制 θ：

$$u = -K_1\theta - K_2\dot{\theta} - K_3 v$$

找出反馈增益使得结果闭环极点配置在 -1 和 $-1\pm\sqrt{3}j$。

(b) 假设 θ 和 v 是测量值。对 θ 和 $\dot{\theta}$ 构造以下形式的估计器

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{F}\hat{x} + \mathbf{L}(y - \hat{y})$$

其中 $\mathbf{x}=[\theta \quad \dot{\theta}]^T$ 且 $y=\theta$。把 u 和 v 视为已知。选择 $\mathbf{L}$ 使得估计器极点为-2 和-2。

(c) 给出控制器的传递函数，并画出闭环系统的伯德图，标明相应的幅值裕度和相位裕度。

(d) 用 MATLAB 画出给定初始条件 θ 的系统的响应，并对小车的初始运动给出物理解释。

7-49 考虑对 $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{10}{s(s+1)}$ 的控制。

(a) 令 $y=x_1$ 和 $\dot{x}_1=x_2$，写出系统的状态方程。

(b) 找出 K_1, K_2 使得 $u=-K_1x_1-K_2x_2$ 得到的闭环极点的自然频率为 $\omega_n=3$ 且阻尼比为 $\zeta=0.5$。

(c) 设计系统的一个状态估计器，状态误差极点的自然频率和阻尼比为 $\omega_{n1}=15, \zeta_1=0.5$。

(d) 联合(a)到(c)得到的控制器的传递函数是什么？

(e) 当对象增益(一般为 10)变化时画出结果闭环系统的根轨迹。

7-50 以下形式的不稳定运动方程

$$\ddot{x} = x + u$$

出现在倒立摆(如火箭)的运动控制中。

(a) 令 $u=-Kx$(只含反馈位置)，画出对应于标量增益 K 的根轨迹。

(b) 考虑以下形式的超前补偿器

$$U(s) = K\frac{s+a}{s+10}X(s)$$

选择 a 和 K 使得系统的上升时间约为 2 秒且超调量不少于 25%。画出对应于 K 的根轨迹。

(c) 画出补偿前对象的伯德图(包括幅值和相位)。

(d) 画出补偿后设计的伯德图，并估计相位裕度。

(e) 设计状态反馈使得闭环极点与(b)中设计的相同。

(f) 用测量值 $x=y$ 设计 x 和 $\dot{x}$ 的估计器，并选择观测器增益 L 使得 $\bar{x}$ 的方程的特征根的阻尼比 $\zeta=0.5$ 为且自然频率为 $\omega_n=8$。

(g) 联立你所设计的估计器和控制规律，画出框图，并标明 $\hat{x}$ 和 $\dot{\hat{x}}$。画出闭环系统的伯德图，并与(b)设计得到的带宽和稳定裕度相比较。

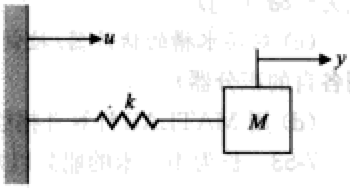


图 7-97 题 7-51 的简化机械臂

7-51 灵活机械臂的简化控制模型如图 7-97 所示，其中

$k/M=900$ 弧度 / 秒^2；

$y=$ 输出，运动块的位置；

$u=$ 输入，弹簧尽头的位置。

(a) 写出状态空间形式的运动方程。

(b) 设计根在 $s=-100\pm100\mathrm{j}$ 的估计器。

(c) 如果只能测量 y，是不是系统的所有状态变量都可以估计？

(d) 设计一个全状态反馈控制器，其根为 $s=-20\pm20\mathrm{j}$。

(e) 为系统设计根为 $s=-200\pm200\mathrm{j}$ 的控制规律是否合理？说明理由。

(f) 写出包含指令输入 y 的补偿器方程。画出闭环系统的伯德图并给出设计的幅值和相位裕度。

7-52 图 7-98 的两层水槽流量动态控制的线性化微分方程为

$$\delta\dot{h}_1+\sigma\delta h_1=\delta u$$
$$\delta\dot{h}_2+\sigma\delta h_2=\sigma\delta h_1$$

其中

δh_1 =水槽 1 水的深度与正常水位的差值；

δh_2 =水槽 2 水的深度与正常水位的差值；

δu =水槽 1 水流流入量的变化量(控制)。

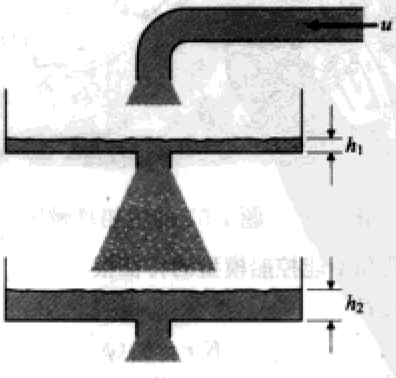


图 7-98 题 7-52 的双层水槽

(a) 双层水槽的水位控制器：用以下形式的状态反馈

$$\delta u=-K_1\delta h_1-K_2\delta h_2$$

选择 K_1,K_2 的值使得闭环特征值为

$$s=-2\sigma(1\pm\mathrm{j})$$

(b) 双层水槽的水位估计器：假设只测量水槽2的水位变化量(也就是 $y=\delta h_2$)。利用这些测量值，设计一个估计器以得到水槽1和水槽2水位变化量的连续的，平滑的估计，估计器误差极点为 $-8\sigma(1\pm j)$。

(c) 双层水槽的估计器/控制器：画出联合(b)的估计器和(a)的控制器的闭环系统的框图(标明各自的积分器)。

(d) 用MATLAB计算并描绘初始偏移 δh_1 时的 y 的响应。假设 $\sigma=1$。

7-53　长为100米的船只以常速率10米/秒横向运动，可描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{r}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0895 & -0.286 & 0\\ -0.0439 & -0.272 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ r\\ \psi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.0145\\ -0.0122\\ 0\end{bmatrix}\delta$$

其中

β=侧滑角(角度)；

ψ=航向角(角度)；

δ=方向舵转角(角度)；

r=偏航速度(见图7-99)。

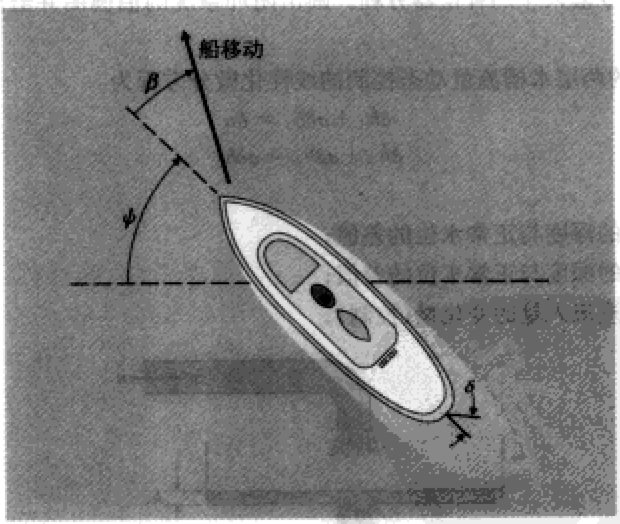


图7-99　题7-53的轮船鸟瞰图

(a) 确定 δ 到 ψ 的传递函数和不能控船模型的特征根。

(b) 用以下形式的全状态反馈

$$\delta=-K_1\beta-K_2r-K_3(\psi-\psi_d)$$

其中是 ψ_d 期望航向角，确定 K_1,K_2,K_3 的值，使得闭环极点为

$$s=-0.2,-0.2\pm0.2j$$

(c) 设计基于 ψ 的测量值(如用旋转罗盘)的状态估计器。配置估计器误差方程的根为 $s=-0.8$ 和 $-0.8\pm0.8j$。

(d) 给出图7-100的补偿器 $D_c(s)$ 的状态方程和传递函数，并描绘它的频率响应。

(e) 画出闭环系统的伯德图，并计算相应的幅值和相位增益。

(f) 计算对于一个参考输入的反馈—前馈增益，并绘出航向角改变 5°时系统的阶跃响应。

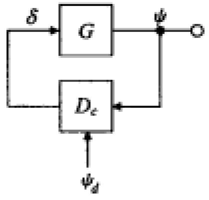


图 7-100 题 7-53 的船只控制框图

7.9 节习题：引入估计器的参考输入

▲7-54 正如 7.9.2 节下注 11 中提到的，选择式(7-205)的反馈—前馈增益的一个合理方法是，选择 $\bar{N}$ 使得当 r 和 y 都不变时，r 到 u 的直流增益是 y 和 u 的直流增益的相反数。推导出基于此规则的 $\bar{N}$ 的公式。证明如果对象是 1 型的，这种选择的结果跟式(7-205)给出的相同。

7.10 节习题：积分控制和鲁棒跟踪

7-55 假设滚珠轴承悬浮装置的线性化和时标运动方程为 $\ddot{x}-x=u+w$。这里 w 是经过功率放大器后的常数偏移。引入积分误差控制，并选择三个控制增益 $\boldsymbol{K}=[K_1 \quad K_2 \quad K_3]$ 使得闭环极点为 -1 和 $-1\pm \mathrm{j}$ 且对于 w 和(阶跃)位置指令的稳态误差为零。令 $y=x$ 且参考输入 $r \stackrel{\Delta}{=} y_{ref}$ 为常数。画出你设计的系统的框图并标明反馈增益 K_i 的位置。假设所有的 $\dot{x}$ 和 x 都是可量测的。画出闭环系统对阶跃指令输入的响应以及对斜度阶跃变化的输入的响应。验证系统是 1 型的。利用 MATLAB(Simulink)软件模拟系统的响应。

7-56 考虑以下状态矩阵描述的系统

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}=[1 \quad 3]$$

(a) 用 $u(t)=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)+\bar{N}r(t)$ 形式的反馈，其中 $\bar{N}$ 是非零标量，把极点移到期 $-3\pm 3\mathrm{j}$。

(b) 选择 $\bar{N}$ 使得如果 r 是一个常数，则系统有零稳态误差；即 $y(\infty)=r$。

(c) 证明如果 $\boldsymbol{F}$ 变化为 $\boldsymbol{F}+\delta\boldsymbol{F}$，其中 $\delta\boldsymbol{F}$ 是任意 2×2 矩阵，则(b)中选择的 $\bar{N}$ 不再有 $y(\infty)=r$。所以，系统对于系统参数 $\boldsymbol{F}$ 的变化不具有鲁棒性。

(d) 系统的稳态误差的鲁棒性可通过在系统中加入积分控制和使用单位反馈得到——也就是，通过令 $\dot{x}_I=r-y$，其中 x_I 是积分器的状态。为达到这一点，首先用 $u=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}-K_1x_I$ 形式的状态反馈使得增加后系统的极点为 -3，$-2\pm \mathrm{j}\sqrt{3}$。

(e) 证明只要系统保持稳定，不管矩阵 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 如何变化，结果系统仍有 $y(\infty)=r$。

(f) 对于(d)，用 MATLAB(Simulink)软件画出系统对常数输入的时间响应。画出控制器，灵敏度函数和补充灵敏度函数的伯德图。

▲7-57 考虑一个跟随计算机磁盘存储系统数据轨迹的自动跟踪装置。由于各种各样不可避免的机械非理想特性的存在，数据轨迹不可能精确地在中心圆环上，所以径向伺服电机必须跟随角频率为 ω_0(硬盘的旋转速度)的正弦输入。这样的系统的线性化模型的状态矩阵为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}=[1 \quad 3]$$

正弦参考输入满足 $\ddot{r}=-\omega_0^2 r$。

(a) 令 $\omega_0=1$，配置内部状态设计的误差系统的极点为

$$\alpha_c(s)=(s+2\pm \mathrm{j}2)(s+1\pm 1\mathrm{j})$$

并且配置降阶估计器的极点为

$$\alpha_e(s)=(s+6)$$

(b) 画出系统的框图，并标明控制器中存在频率为 ω_0 的振荡器(内部状态)。同时证明存在零点 $\pm \mathrm{j}\omega_0$。

(c) 用 MATLAB(Simulink)软件画出系统对频率 $\omega_0=1$ 的正弦信号的响应。

(d) 画出伯德图以表明系统对频率不等于 ω_0 但接近 ω_0 的正弦信号是如何响应的。

▲7-58　计算例 7.38 的控制器传递函数(从 $Y(s)$ 到 $U(s)$)。允许跟踪和抑制扰动的控制器的显著特征是什么?

▲7-59　考虑控制转矩 T_c 和扰动转矩 T_d 的单摆问题：

$$\ddot{\theta}+4\theta=T_c+T_d$$

(这里 $g/l=4$)假设在钉销处有一个电位计测量输出角度 θ，但包含有未知偏移 b。所以测量方程为 $y=\theta+b$。

(a) 让"附加"状态向量为 $\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ w\end{bmatrix}$，其中 w 是输入等效偏移。写出状态空间形式的系统方程。给出矩阵 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的值。

(b) 利用状态变量法证明模型的特征方程为 $s(s^2+4)=0$。

(c) 如果我们假设 $y=\theta$，证明 w 是能观测的，并写出以下估计的估计器方程

$$\begin{bmatrix}\hat{\theta}\\ \dot{\hat{\theta}}\\ \hat{w}\end{bmatrix}$$

求估计器增益 $[l_1\quad l_2\quad l_3]^{\mathrm{T}}$ 使得估计器误差特征方程的根为 -10。

(d)利用估计(能控)状态变量的全状态反馈，推出把闭环极点配置在 $-2\pm 2\mathrm{j}$ 的控制规律。

(e)用积分器块画出全闭环系统(估计器、受控对象和控制器)的框图。

(f)将估计偏移引入控制使得对输出偏移 b 有零稳态误差。通过描绘系统对 b 的阶跃变化(也就是 b 从零跳变到了某一常数值)的响应证明你所设计系统的性能。

▲7-60　考虑传递函数为 $e^{-Ts}G(s)$ 的系统，其中

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

该系统的史密斯补偿器为

$$D_c'(s)=\frac{D_c}{1+(1-e^{-sT})G(s)D_c}$$

画出 $T=5$，$D_c=1$ 时的补偿器频率响应，并画出标明系统幅值裕度和相位裕度的伯德图[①]。

① 该问题由 Åström (1977)提出。

第8章 数字控制

数字控制介绍

到目前为止，我们所研究的大多数控制器都是用拉普拉斯变换或是微分方程描述的；严格地讲，这两种描述法都是建立在模拟电子电路(analog electronics)基础之上的，分别如图5-32和图5-34所示。但正如4.4.1节所讨论的那样，如今大部分控制系统都是用数字计算机(即通常所说的微处理器)实现控制器的。本章旨在讲解如何在数字计算机中实现的控制系统设计。这种实现产生了一个平均为半个采样周期的时延和一个在控制器设计中需要提及的现象——混叠现象。

采用模拟电子电路可以对信号进行积分和微分。为了用数字计算机完成这些任务，描述补偿环节的微分方程必须通过变换成由加法、减法和乘法组成的代数方程来逼近，正如在4.4.1节中已经介绍的那样。本章将介绍实现这些逼近的各种方法。如果需要，得到的设计可以用直接数字分析和设计法来调整。

学完本章后，你应该能够设计、分析并实现数字控制系统。

全章概述

在8.1节中，我们描述了数字控制系统的基本结构，并介绍了采样引起的各种问题。在4.4.1节中描述的数字实现，对于在数字控制系统中实现反馈控制规律来说是足够的，你可以通过Simulink来评估数字控制系统以确定其与连续系统相比所存在的缺陷。然而，学习离散线性分析工具对于全面理解采样对数字控制系统的影响是很有帮助的。这就要求读者掌握我们将在8.2节中讨论的z变换。建立在理解这些内容的基础上，8.3节为4.4.1节使用的离散方程提供了更好的理论根据。硬件特征和采样速率将在8.4节和8.5节中讨论，这两节都是实现数字控制器需要讨论的内容。

与离散方程设计(即一种近似法)相比，作为选读内容的8.6节探讨了直接数字设计(也称作离散设计)，该方法提供了一种不依赖采样速率的精确方法。在选读8.7节中，简短地介绍了如何用状态变量形式进行设计。

8.1　数字化

图8-1a给出了我们在前几章介绍的典型连续系统的拓扑结构。误差信号 e 和动态补偿 $D(s)$ 的计算都可由图8-1b所示的数字计算机完成。这两种实现的本质区别在于，数字系统处理可测受控对象输出的**采样**（**samples**）信号，而不是连续信号，并且由 $D(s)$ 提供的控制必须用代数递归方程产生。

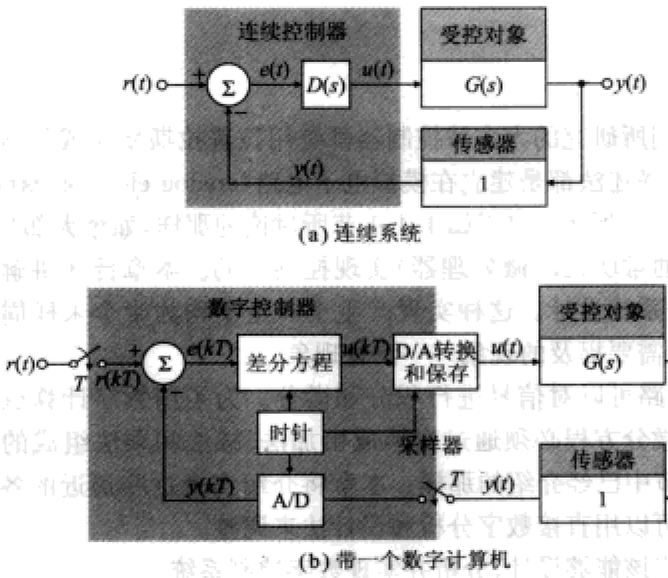


图8-1　基本控制系统的框图

我们首先考虑**模数转换器**（**analog-to-digital converter**）（A/D）对信号的作用。这个设备采样一个物理变量，最常见的是电压，并将电压转换成一个通常10至16位的二进制数。模拟信号 $y(t)$ 至采样值 $y(kT)$ 的转换每隔 T 秒的时间间隔重复进行一次。T 即为**采样周期**（**sample period**），$1/T$ 为单位为赫兹的**采样速率**（**sample rate**）。采样信号为 $y(kT)$，其中 k 可取任意整数值。$y(kT)$ 经常简写为 $y(k)$。我们把这种称为**离散信号**（**discrete signal**），以区别于在时间域内连续变化的连续信号，如 $y(t)$。既有离散信号又有连续信号的系统，被称为**数据采样系统**（**sampled data system**）。

我们假定采样周期是固定的。在实际中，数字控制系统有时具有变化的采样周期或在不同的反馈路径中采样周期也不同。通常，计算机逻辑包含一个时钟，它每隔 T 秒提供一个脉冲或**中断**（**interrupt**），且每次中断到达时A/D转换器就给计算机送一个数。另一种实现的方法是，也就是通常提到的**自激**（**free running**），每一个代码执行周期结束后，存取一遍A/D转换器。在前一种情况中，采样周期是预先规定的；在后一种情况中，若不存在可以改变被执行代码数量的逻辑分支，采样周期本质上是由代码的长度决定的。

对于输入指令信号 $r(t)$，也可用采样器和 A/D 转换器产生离散的 $r(kT)$，然后用 $r(kT)$减去可测输出 $y(kT)$就得到离散的误差信号 $e(kT)$。如我们在 4.4.1 节和 5.5 节、例 6.14、例 7.32 和例 7.34 中看到的，连续补偿是用差分方程逼近，差分方程是微分方程的离散形式；若采样周期足够短，则差分方程可以用来模拟$D(s)$的动态特性。差分方程的结果在每个采样瞬间的离散 $u(kT)$。这个信号被数模(D/A)转换器(**digital-to-analog converter**)转换为一个连续的 $u(t)$并被保存下来：D/A 转换器将二进制数转变为模拟电压，且**零阶保持器**(**zero-order hold**)ZOH 在整个采样周期内维持这个电压。其结果 $u(t)$则以与连续实现中相同的方式加到激励上。求出数字控制器的差分方程有两种基本的方法。第一种方法，称为**离散方程法**(**discrete equivalent**)，使用包括前面章节讨论的方法设计连续补偿$D(s)$，然后用 4.4.1 节的方法("Tustin 法")或用 8.3 节描述的其他方法来逼近 $D(s)$。另一种方法是在 8.6 节和8.7节中描述的**离散设计**(**discrete design**)。该方法不用事先设计 $D(s)$，而是直接求出差分方程。

要求的采样速率取决于系统的闭环带宽。一般来说，采样速率应大约为 20 倍的带宽或更快，以保证数字控制器将与连续控制器的性能相匹配。若在数字控制器中做一些调整或者降低某些性能指标，则采用慢一些的采样速率也是可以接受的。如希望硬件成本最小化，则 8.6 节描述的离散设计法允许使用慢一点的采样速率；然而，数字控制器最佳性能是当采样速率大于 25 倍带宽时才能达到的。

值得注意的是，对实现控制系统数字化影响最大的就是与保持相关的延迟。因为在图 8-1b 中 $u(kT)$的每个值被保持直到从计算机那里得到下一个值为止，$u(t)$的连续值由一些阶梯信号组成(参看图 8-2)，可见这些阶梯信号都是从 $u(t)$开始，平均延迟了 $T/2$。若我们将这 $T/2$ 的延迟简单地纳入到系统的连续分析中，就能很好地预测当采样速率远低于 20 倍带宽时采样对系统的影响。我们将在 8.3.3 节中进一步讨论这个话题。

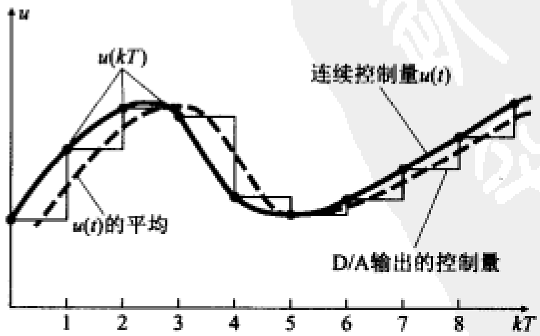


图 8-2 由保持功能引起的延迟

8.2 离散系统的动态分析

z变换是分析线性离散系统的数学工具。它在离散系统分析中所起的作用和拉普拉斯变换在连续系统分析中所起的作用是一样的。本节将简要地介绍z变换、它在分析离散系统中的应用及其是如何与拉普拉斯变换联系在一起的。

8.2.1 z变换

在连续系统的分析中，我们利用拉普拉斯变换，定义如下

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

由以上定义可直接导出拉普拉斯变换的重要性质(初始条件为零)：

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) \tag{8-1}$$

对于给定系统的微分方程，式(8-1)使得我们很容易找出一个线性连续系统的传递函数。

对于离散系统，利用z变换可得到与上述相似的过程。z变换定义为：

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \tag{8-2}$$

其中$f(k)$是$f(t)$的采样值，如图8-3所示，且$k=0,1,2,3,\cdots$对应离散采样时刻t_0，t_1，t_2，t_3，…。以上定义直接导出了与式(8-1)类似的性质，即

$$\mathcal{Z}\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z) \tag{8-3}$$

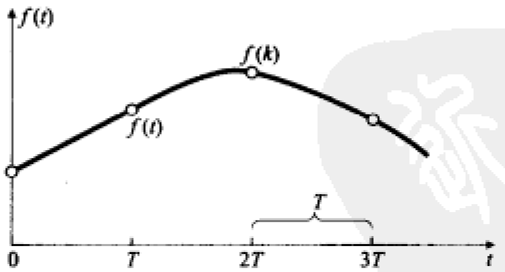


图8-3 信号f的连续采样值

对于给定系统的微分方程，利用上述关系式，我们很容易找出离散系统的传递函数。例如，一般二阶差分方程

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) + b_0u(k) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2)$$

重复使用式(8-3)，可将上式转换成$y(k)$，$u(k)$，…的形式

$$Y(z) = (-a_1z^{-1} - a_2z^{-2})Y(z) + (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2})U(z) \tag{8-4}$$

由式(8-4)，得到离散传递函数为

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

8.2.2 z 逆变换

表 8-1 给出了简单的离散时间函数和与其对应的 z 变换，并给出了同一时间函数的拉普拉斯变换。

给定一个一般的 z 变换，我们可以用部分分式展开法（见附录 A）将其展开成初等项的和的形式，并从表中找出相应的时域响应。这些步骤与连续系统中的步骤完全相同；与连续系统中的情况相同，大多数设计者用离散方程的数值计算来获得时域响应，而不是用 z 逆变换。

表 8-1　简单离散时间函数的拉普拉斯变换和 z 变换

$F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，$F(z)$ 是 $f(kT)$ 的 z 变换。注意，当 $t=0$ 时，$f(t)=0$

No.	$F(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
1		$1, k=0; 0, k\neq 0$	1
2		$1, k=k_o; 0, k\neq k_o$	z^{-k_o}
3	$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(kT)^2$	$\frac{T^2}{2}\left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right]$
6	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{3!}(kT)^3$	$\frac{T^3}{6}\left[\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}\right]$
7	$\frac{1}{s^m}$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}e^{-akT}\right)$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$
8	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2}{2}e^{-aT}z\frac{(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
11	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}e^{-akT}\right)$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$
12	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
13	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(akT-1+e^{-akT})$	$\frac{z[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
14	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
15	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{z[z-e^{-aT}(1+aT)]}{(z-e^{-aT})^2}$
16	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-akT}(1+akT)$	$\frac{z[z(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})+e^{-2aT}-e^{-aT}+aTe^{-aT}]}{(z-1)(z-e^{-aT})^2}$

（续）

F(s)是 f(t)的拉普拉斯变换，F(z)是 f(kT)的 z 变换。注意，当 t=0 时，f(t) =0

No.	$F(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
17	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bkT}-ae^{-akT}$	$\frac{z[z(b-a)-(be^{-aT}-ae^{-bT})]}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
18	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin akT$	$\frac{z\sin aT}{z^2-(2\cos aT)z+1}$
19	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos akT$	$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-(2\cos aT)z+1}$
20	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\cos bkT$	$\frac{z(z-e^{-aT}\cos bT)}{z^2-2e^{-aT}(\cos bT)z+e^{-2aT}}$
21	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\sin bkT$	$\frac{ze^{-aT}\sin bT}{z^2-2e^{-aT}(\cos bT)z+e^{-2aT}}$
22	$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1-e^{-akT}(\cos bkT+\frac{a}{b}\sin bkT)$	$\frac{z(Az+B)}{(z-1)[z2^2-2e^{-aT}(\cos bT)z+e^{-2aT}]}$ $A=1-e^{-aT}\cos bT-\frac{a}{b}e^{-aT}\sin bT$ $B=e^{-2aT}+\frac{a}{b}e^{-aT}\sin bT-e^{-aT}\cos bT$

在连续域内没有相应方法的 z 逆变换法称为**长除法(long division)**。给定 z 变换

$$Y(z)=\frac{N(z)}{D(z)} \tag{8-5}$$

我们利用长除法只需用分母多项式去除分子多项式。这样，得到一个 z^{-1} 的幂序列(可能有无限项)，然后利用式(8-2)可得到相应的时域值序列。

例如，一个用差分方程描述的一阶系统

$$y(k)=ay(k-1)+u(k)$$

得到其离散传递函数

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

对于下列定义的单位脉冲输入

$$u(0)=1$$

$$u(k)=0,\quad k\neq 0$$

其 z 变换为

$$U(z)=1 \tag{8-6}$$

故有

$$Y(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \tag{8-7}$$

因此，为了找出 y 的时域序列，我们用长除法将(8-7)的分子多项式除以分母多项式：

$$
\begin{array}{r l}
 & 1+\alpha z^{-1}+\alpha^{2}z^{-2}+\alpha^{3}z^{-3}+\cdots \\
1-\alpha z^{-1}\,\big) & 1 \\
 & 1-\alpha z^{-1} \\
\hline
 & \alpha z^{-1}+0 \\
 & \alpha z^{-1}-\alpha^{2}z^{-2} \\
\hline
 & \alpha^{2}z^{-2}+0 \\
 & \alpha^{2}z^{-2}-\alpha^{3}z^{-3} \\
\hline
 & \alpha^{3}z^{-3} \\
 & \ddots
\end{array}
$$

得到无穷序列为

$$Y(z)=1+\alpha z^{-1}+\alpha^{2}z^{-2}+\alpha^{3}z^{-3}+\cdots \tag{8-8}$$

根据式(8-8)和式(8-2)，我们可以得到 y 的采样时间序列为

$$
\begin{aligned}
y(0)&=1\\
y(1)&=\alpha\\
y(2)&=\alpha^{2}\\
&\vdots\\
y(k)&=\alpha^{k}
\end{aligned}
$$

8.2.3 s 与 z 的关系

从第 3 章可知，连续系统的特定行为源于 s 平面上不同的极点位置：位于虚轴附近的极点使系统产生振荡；负实轴上的极点使响应按指数规律衰减；具有正实部的极点使系统产生不稳定。一个类似的关系在设计离散系统时很有用。考虑连续信号

$$f(t)=\mathrm{e}^{-at},\ t>0$$

其拉普拉斯变换为

$$F(s)=\frac{1}{s+a}$$

对应的极点为 $s=-a$ 。$f(kT)$的 z 变换为

$$F(z)=\mathcal{Z}\{\mathrm{e}^{-akT}\} \tag{8-9}$$

从表 8-1 中我们可看出式(8-9)等价于

$$F(z)=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}}$$

对应的极点为 $z=\mathrm{e}^{-aT}$。这意味着 s 平面的极点 $s=-a$ 对应于离散域内的极点 $z=\mathrm{e}^{-aT}$。将其推广到一般情况：

Z 平面与 s 平面之间的等效性由下面的表达式给出：

$$Z=\mathrm{e}^{sT} \tag{8-10}$$

其中 T 是采样周期。

表 8-1 还包含了拉普拉斯变换，这证明了表中项 $F(s)$ 与 $F(z)$的分母多项式的根之间存在关系 $z=\mathrm{e}^{sT}$。

图 8-4 给出了常阻尼系数 ζ 与自然频率 ω_n 曲线从 s 平面(见图 3-13)到 z 平面上半平面的映射曲线，映射关系符合式(8-10)。这种映射有几个重要特征(见习题 8-4)：

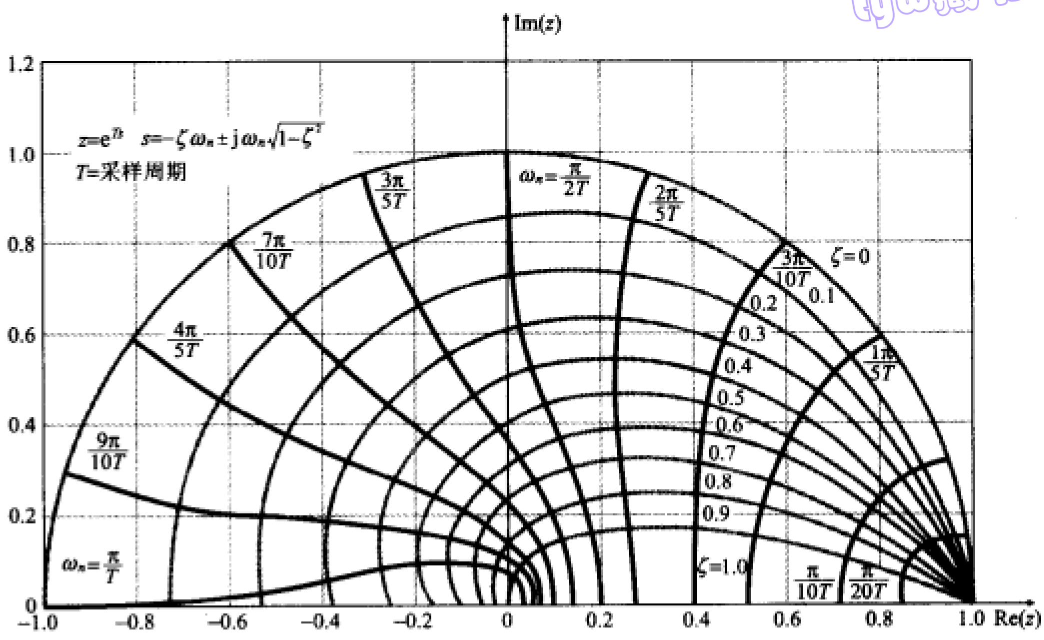


图 8-4　z 平面上的自然频率(黑色)和阻尼系数(淡色)轨迹；
在 Re (z)轴下的部分与图中给出的上半部是对称的

(1) 稳定边界为单位圆$|z|=1$。

(2) z 平面内在 $z=\pm1$ 周围的小领域必须与 s 平面上 $s=0$ 附近的小领域保持一致。

(3) z 平面的位置给出了规范化为采样速率的响应信息，而 s 平面上是规范化为时间。

(4) z 负实轴总是代表频率 $\omega_s/2$；其中 $\omega_s=2\pi/T$ 为采样频率，单位为弧度每秒。

(5) s 平面左半平面的垂直线(实部为常数或时间为常数)映射到 z 平面是在单位圆内的一些圆。

(6) s 平面内的水平线(频率虚部为常值)映射到 z 平面内为放射线。

(7) 频率 $\omega_s/2$ 称为**奈奎斯特频率(Nyquist frequency)**，由式(8-10)隐含的三角函数的周期特性，在 z 平面上高于 $\omega_s/2$ 的频率叠加在与其对应的低频之上。这种重叠称为**混叠现象(aliasing or folding)**。因此，有必要使采样频率至少为信号最高频率分量的两倍，这样才能用采样值表示信号(我们将在 8.4.3 节中进一步讨论混叠现象)。

为了理解 z 平面内的位置与相应的时域序列的对应关系，图 8-5 画出了由指定位置处的极点产生的时域响应曲线。下图是图 3-13 的离散形式。

8.2.4　终值定理

我们在 3.1.6 节中讨论的连续系统的终值定理指出：只要 $sX(s)$ 所有的极点都在

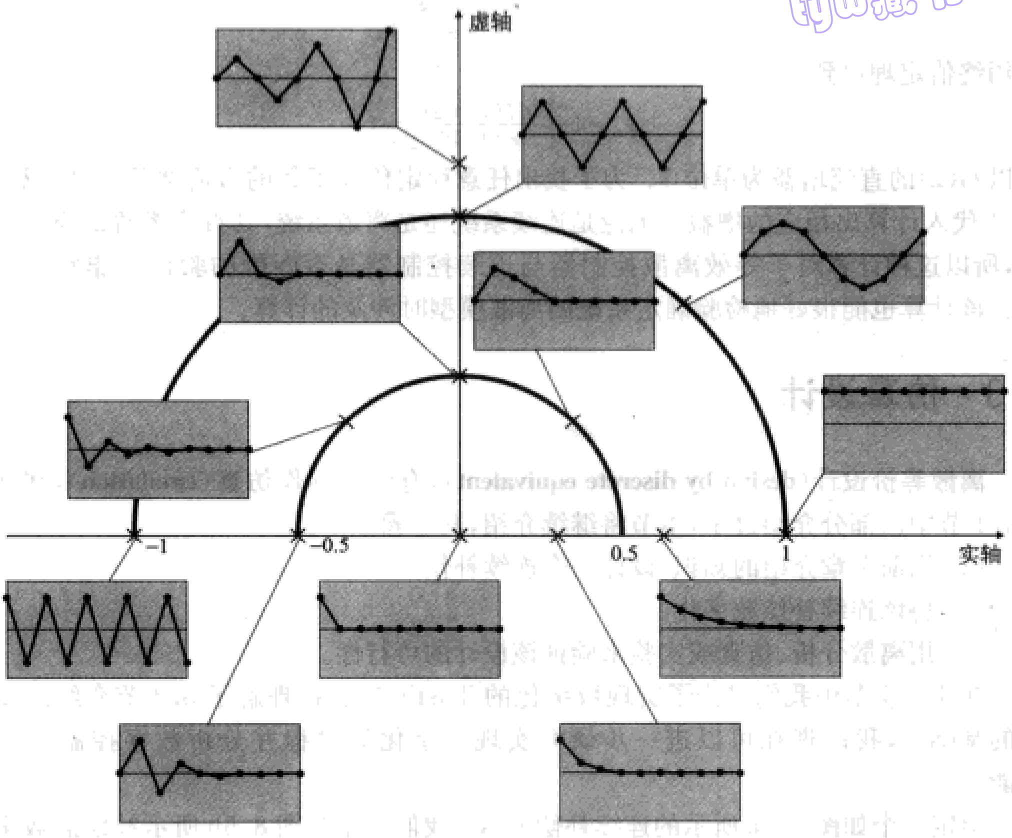


图 8-5 与 z 平面内点对应的时域序列

左半平面(LHP),则

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_{ss} = \lim_{s\to 0} sX(s) \tag{8-11}$$

这个定理常用来求解系统的稳态误差或控制系统各部分的稳态增益。注意,定常连续系统的稳态响应可由 $X(s)=A/s$ 表示,且在式(8-11)中再乘以 s,我们可以在离散系统中获得相似的关系。因为离散系统的定常稳态响应为

$$X(z)=\frac{A}{1-z^{-1}}$$

离散系统的终值定理为

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = x_{ss} = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) \tag{8-12}$$

如果$(1-z^{-1})X(z)$的所有极点都在单位圆内。

例如,为了找出下列传递函数的直流(DC)增益

$$G(z)=\frac{X(z)}{U(z)}=\frac{0.58(1+z)}{z+0.16}$$

我们令 $u(k)=1$,当 $k\geqslant 0$ 时,所以

$$U(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$X(z)=\frac{0.58(1+z)}{(1-z^{-1})(z+0.16)}$$

应用终值定理得到

$$x_{ss}=\lim_{z\to 1}\left[\frac{0.58(1+z)}{z+0.16}\right]=1$$

所以 $G(z)$ 的直流增益为单位 1。为了找出任意稳定传递函数的直流增益，我们只需将 $z=1$ 代入计算出相应的增益。无论是连续系统还是离散系统，其直流增益都应是不变的，所以这种计算对于等效离散控制器与连续控制器是否匹配的验证是非常有帮助的。该计算也能很好地检验确定系统的离散模型时涉及的计算。

8.3　仿真设计

离散等价设计（**design by discrete equivalent**），有时也称作**仿真**（**emulation**），在前面 4.4.1 节中已部分介绍过了，本节将继续介绍，其步骤如下：

（1）用前 7 章介绍的知识，设计一个连续补偿。

（2）将该连续补偿数字化。

（3）用离散分析、仿真或实验来验证该设计的可行性。

在 4.4.1 节中我们讨论了实现数字化的 Tustin 法。在理解了 8.2 节介绍的 z 变换的基础上，我们现在可以进一步研究实现数字化的过程并分析数字控制系统的性能。

给定一个如图 8-6a 所示的连续补偿 $D(s)$，我们希望为图 8-6b 所示补偿的数字实现找出一组差分方程或 $D(z)$。首先，我们可以把问题改述为在图 8-6a 所示的数字实现中找出一个最佳的 $D(z)$ 来匹配图 8-6b 中由 $D(s)$ 表示的连续系统。在本节中我们将检验和比较用以解决上述问题的三种方法。



(a) 数字实现　　(b) 连续实现

图 8-6　数字实现与连续实现的对比

如前所述，必须记住这些方法都是逼近的；对所有可能的输入没有精确的解法，这是因为 $D(s)$ 响应 $e(t)$ 的所有时间序列，而 $D(z)$ 只响应 $e(kT)$ 的采样值。从某种意义上说，各种数字化方法只是对采样点间的 $e(t)$ 做了不同的假设。

Tustin 法

正如在 4.4.1 节中讨论的那样，一种数字化的方法是把问题看作一个数值积分。假设

$$\frac{U(s)}{E(s)}=D(s)=\frac{1}{s}$$

是一个积分。因此有

$$u(kT)=\int_{0}^{kT-T}e(t)\mathrm{d}t+\int_{kT-T}^{kT}e(t)\mathrm{d}t \tag{8-13}$$

上式可改为：

$$u(kT)=u(kT-T)+\text{最后一个周期内 } e(t) \text{ 所包围的面积} \tag{8-14}$$

其中 T 是采样周期。

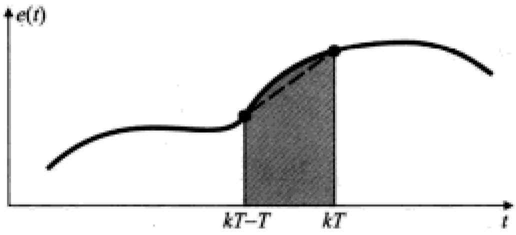


图 8-7　梯形积分

Tustin 法中的每一步的任务就是用梯形积分法，即用两个采样点之间的一条直线（如图 8-7 所示）来逼近 $e(t)$。将 $u(kT)$ 简写为 $u(k)$，$u(kT-T)$ 简写为 $u(k-1)$，我们将式(8-14)转化为：

$$u(k)=u(k-1)+\frac{T}{2}[e(k-1)+e(k)] \tag{8-15}$$

将上式进行 z 变换

$$\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{T}{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)=\frac{1}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)} \tag{8-16}$$

对于 $D(s)=a/(s+a)$，应用相同的积分法得到：

$$D(z)=\frac{a}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a}$$

事实上，对任意 $D(s)$ 的每一处 s 作替换：

$$s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

得到一个基于梯形积分公式的 $D(z)$。这就是 Tustin 法或双线性逼近(bilinear approximation)。为一个简单的传递函数手工找出其 Tustin 逼近也需要大量的代数运算。MATLAB 中的 c2d 函数可以快速实现这一过程，正如下例所示。

例 8.1　用 Tustin 法逼近求例 6.14 的数字控制器

用 Tustin 法确定差分方程来实现例 6.14 中的补偿，

$$D(s)=10\frac{s/2+1}{s/10+1}$$

以 25 倍带宽的采样速率，将其性能与连续系统进行比较。

解：例 6.14 的带宽（ω_{BW}）大约为 10 rad/s。通过观察可知分隔频率 ω_c 约为 5 rad/s，并通过观察在图 6-50 中 ω_{BW} 与 ω_c 的关系，可推导出 ω_{BW}。因此，采样频率应为

$$\omega_s = 25\times\omega_{BW} = (25)(10) = 250\ \text{rad/s}$$

通常，当一种频率用圆弧的单位每秒或赫兹表示时，它可用符号 f 表示，所以用这种替代，我们有

$$f_s = \omega_s/(2\pi) \simeq 40\ \text{Hz} \tag{8-17}$$

且采样周期为

$$T = 1/f_s = 1/40 = 0.025\ \text{s}$$

这个离散补偿可用下列 MATLAB 语句实现

```
sysDs = tf(10*[0.5 1],[0.1 1]);
sysDd = c2d(sysDs,0.025,'tustin');
```

执行上述语句得到

$$D(z) = \frac{45.56 - 43.33z^{-1}}{1 - 0.7778z^{-1}} \tag{8-18}$$

我们观察式(8-18)，可写出差分方程

$$u(k) = 0.7778u(k-1) + 45.56e(k) - 43.33e(k-1)$$

或将上式中所有的时间变量都加1，得出其等效形式

$$u(k+1) = 0.7778u(k) + 45.56[e(k+1) - 0.9510e(k)] \tag{8-19}$$

给出控制信号的过去值 $u(k)$，误差信号的现在值和前一时刻值 $e(k+1)$ 和 $e(k)$，用式(8-19)计算出控制信号的现在值 $u(k+1)$。

原则上，差分方程是在初始 $k=0$ 已知的情况下去计算 $k=1,2,3,\cdots$ 各时刻的值的。然而，通常不要求把所有时刻的值都保留在内存中。因此，计算机只需要当前时刻和前一时刻定义的变量值。用式(8-19)的差分方程实现图 8-1b 中的反馈回路的计算机指令需调用下面的代码实现一个连续循环：

READ y, r

　$e = r - y$

　$u = 0.7778u_p + 9.111[e - 0.9513e_p]$

OUTPUT u

　$u_p = u$ (where u_p will be the past value for the next loop through)

　$e_p = e$

从上一个 READ 语句结束起 T 秒过后再回到 READ 语句。

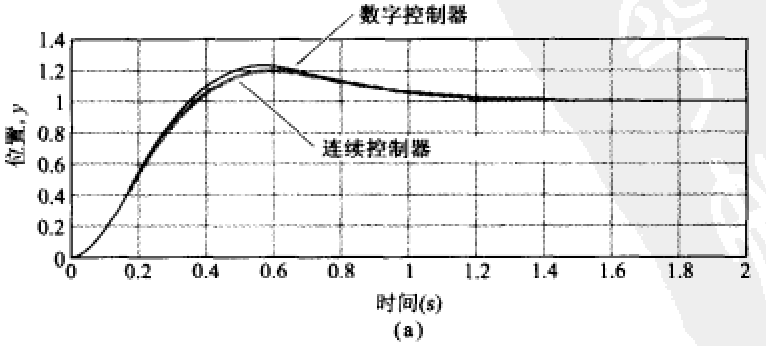
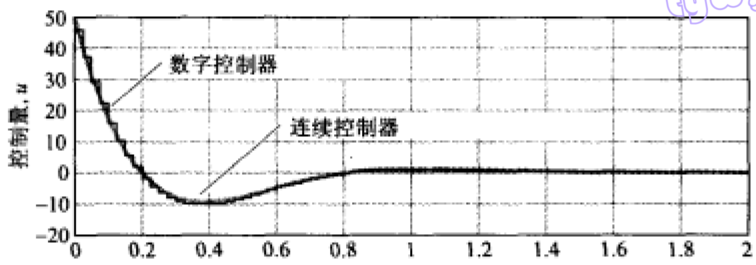


图 8-8　采样速率为 25 倍带宽时数字控制器与连续控制器的阶跃响应的对比



(b)

图 8-8 （续）

与例 6.14 的方法相似，用 Simulink 比较两种实现从而得到如图 8-8 所示的阶跃响应。注意到用 25 倍带宽的采样速率得到的数字实现与连续控制器匹配得非常好。

8.3.1 零极点匹配法

通过对式(8-10)中所描述的 s 平面和 z 平面关系进行推导，可以得出另一种被称为零极点匹配(MPZ)的方法。如果我们对采样函数 $x(k)$ 进行 z 变换，则 $X(z)$的极点与 $X(s)$ 的极点之间的关系为 $z=e^{sT}$。零极点匹配法就是将 $z=e^{sT}$ 应用到传递函数的零极点上，尽管，严格地讲，这种关系既不能用于传递函数也不能用于时间序列的零点。和所有的传递函数数字化方法一样，MPZ 法只是一种逼近；这里的逼近，一部分原因是$z=e^{sT}$实现了时间序列变换的极点从 s 到 z 的正确变换；一部分原因是用手工求取数字化传递函数时要求代数计算量最小，使得对计算机运算所得结果进行验证更加容易。

由于物理系统的极点通常多于零点，所以任意增加 $z=-1$ 处的零点可在 $D(z)$中得到一个 $1+z^{-1}$项，这是很有用的。像 Tustin 法一样，这样就产生了当前和过去的输入的一个平均值。我们选取 $D(z)$的低频增益以实现与 $D(s)$的低频增益的等价。

MPZ 法总结

(1) 用关系式 $z=e^{sT}$映射零极点。

(2) 如果分子的阶数小于分母的阶数，就在分子中加入$(z+1)$的幂项，直到分子分母的阶数相等。

(3) 令 $D(z)$的直流增益或低频增益与 $D(s)$的相等，则

$$D(s)=K_c\frac{s+a}{s+b} \tag{8-20}$$

的 MPZ 的逼近为

$$D(z)=K_d\frac{z-e^{-aT}}{z-e^{-bT}} \tag{8-21}$$

用连续系统和离散系统的终值定理求出 $D(s)$和 $D(z)$的直流增益，令二者相等就可得到 K_d，得到

$$K_c \frac{a}{b} = K_d \frac{1-e^{-aT}}{1-e^{-bT}}$$

或

$$K_d = K_c \frac{a}{b}\left(\frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}}\right) \tag{8-22}$$

对于 $D(s)$ 的分母阶数较高的，步骤 2 必须添加 $(z+1)$ 项。例如，

$$D(s) = K_c \frac{s+a}{s(s+b)} \Rightarrow D(z) = K_d \frac{(z+1)(z-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-bT})} \tag{8-23}$$

其中去掉极点 $s=0$ 和 $z=1$ 后，得到：

$$K_d = K_c \frac{a}{2b}\left(\frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}}\right) \tag{8-24}$$

在目前所讨论的数字化方法中，$D(z)$ 的分子和分母多项式中的 z 的幂次相等。这意味着差分方程在 k 时刻的输出要求 k 时刻输入的采样值。例如，式(8-21) 中的 $D(z)$ 可写作：

$$\frac{U(z)}{E(z)} = D(z) = K_d \frac{1-\alpha z^{-1}}{1-\beta z^{-1}} \tag{8-25}$$

其中，$\alpha = e^{-aT}$，$\beta = e^{-bT}$。通过观察我们可得到如下的差分方程：

$$u(k+1) = \beta u(k) + K_d[e(k+1) - \alpha e(k)] \tag{8-26}$$

例 8.2　空间站姿态数字控制器的仿真设计

空间站姿态控制动态系统的一个简化模型有如下的受控对象传递函数：

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

设计一个数字控制器，其闭环自然频率为 $\omega_n \approx 0.3$ rad/s，阻尼比为 $\zeta = 0.7$ 。

解：第一步是找出图 8-9 所定义的系统的合适的 $D(s)$。经过一些尝试，我们发现下列超前补偿可满足指标要求：

$$D(s) = 0.81 \frac{s+0.2}{s+2} \tag{8-27}$$

图 8-10 给出的根轨迹证实了用式(8-27)给出的 $D(s)$ 是满足要求的。

为了对 $D(s)$ 进行数字化，我们首先需要选择一个采样速率。对于一个 $\omega_n \approx 0.3$ rad/s 的系统，带宽也将约等于 0.3 rad/s，合适的采样速率约为 20 倍的 ω_n。因此，

$$\omega_s = 0.3 \times 20 = 6 \text{ rad/s}$$

6rad/s 的采样速率约为 1Hz；所以采用周期应为 $T = 1$s。式(8-27)的 MPZ 数字化，可根据式(8-21)和式(8-22)求出，得到：

$$D(z) = 0.389 \frac{z-0.82}{z-0.135} = \frac{0.389 - 0.319z^{-1}}{1-0.135z^{-1}} \tag{8-28}$$

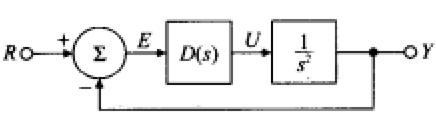


图 8-9　例 8.2 的连续设计定义

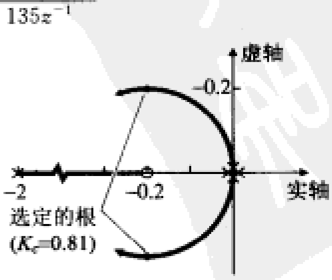


图 8-10　关于 K 的 s 平面根轨迹图

观察式(8-28)，可得差分方程：

$$u(k)=0.135u(k-1)+0.389e(k)-0.319e(k-1) \tag{8-29}$$

其中，

$$e(k)=r(k)-y(k)$$

这样数字算法设计就完成了。完整的数字系统如图 8-11 所示。

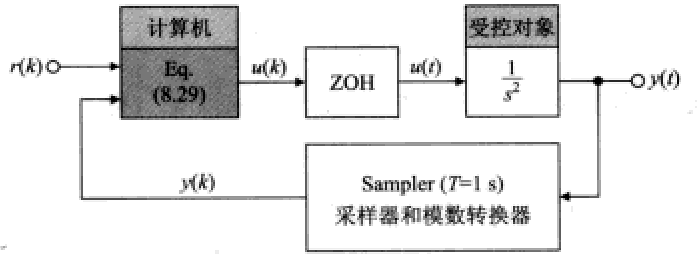


图 8-11 对图 8-9 进行仿真得到的数字控制系统

设计过程的最后一步是在计算机上实现该设计来验证其是否合理。图 8-12 将数字系统的阶跃响应与连续补偿的阶跃响应进行了比较。注意，数字系统的超调量更大、调整时间更长，这说明阻尼要下降。图 8-2 所示的 $T/2$ 的平均时延引起了阻尼的下降。为了更好地与连续系统匹配，要谨慎地增加采样速率。图 8-12 也显示了当采样快一倍时的响应，可以看出这个响应与连续系统更接近。注意，根据式(8-21)和式(8-22)要对这个更快的采样速率重新计算离散补偿。

$e(k+1)$ 的采样、$u(k+1)$ 的计算和输出不可能都在零延迟时间内完成，因此式(8-26)和式(8-29)不可能精确地实现。然而，如果方程足够的简单或计算机的速度足够快，则 $e(k+1)$ 采样和 $u(k+1)$ 输出之间的微小计算时延对系统的实际响应的影响，与初始设计的期望响应相比可以忽略不计。在粗略计算中，取计算时延为 T 的1/10次幂。通过确保读 A/D 和写 D/A 之间的计算量最小，同时将计算出的 $u(k+1)$ 立即送入零阶保持器中，可将这一延迟降低到最小；这可以通过改进实时代码和硬件结构来实现。

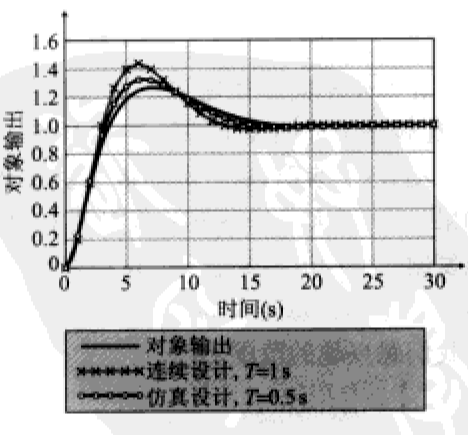


图 8-12 连续实现与数字实现的阶跃响应

8.3.2 修正的零极点匹配法

式(8-23)中的 $D(z)$ 可得到 $u(k)$，$u(k)$ 取决于在统一时间点上的输入 $e(k)$。如果计算机硬件的结构不能实现这种关系或是这种计算冗长，则最好能推导出一个 $D(z)$，其分子 z 的幂次比分母的 z 的幂次少 1。因此，计算机输出 $u(k)$ 只需前一时刻的输入

$e(k-1)$。为此,我们仅仅修改零极点匹配法中的第二步,使分子的阶数比分母的阶数少1。例如,如果

$$D(s)=K_c\frac{s+a}{s(s+b)}$$

我们跳过第二步直接得到

$$D(z)=K_d\frac{z-e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-bT})} \tag{8-30}$$

$$K_d=K_c\frac{a}{b}\left(\frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}}\right)$$

为了求出差分方程,我们将式(8-30)的分子分母同乘以 z^{-2},得

$$D(z)=K_d\frac{z^{-1}(1-e^{-aT}z^{-1})}{1-z^{-1}(1+e^{-bT})+z^{-2}e^{-bT}} \tag{8-31}$$

通过观察式(8-31),我们可以看出差分方程为

$$u(k)=(1+e^{-bT})u(k-1)-e^{-bT}u(k-2)+K_d[e(k-1)-e^{-aT}e(k-2)]$$

在这个方程中,在一个完整的采样周期内可执行完计算并输出 $u(k)$,因为 $u(k)$ 仅取决于 $e(k-1)$。因此,这个控制器的离散分析将更精确地诠释实际系统的特性。然而,由于该控制器使用的是持续时间为一个周期的数据,所以就出现随机扰动时期望系统输出的微分而言,修正的零极点匹配法(MMPZ)控制器的性能通常不及MPZ控制器好。

8.3.3　几种数字逼近法的比较

一阶滞后系统

$$D(s)=\frac{5}{s+5}$$

在两个不同采样速率下,对用三种数字逼近方法得到的频率响应的幅值进行比较,比较结果如图8-13所示。在图8-13中使用到的 $D(z)$ 的计算值列于表8-2。

图8-13表明,这三种逼近方法在频率小于1/4的采样速率或 $\omega_s/4$ 时都很理想。如果 $\omega_s/4$ 远大于滤波器的截止频率,即采样足够快,则滞后环节的截止特性将被精确地复制。Tustin法和两种MPZ法在 $\omega_s/2$ 处有凹口,因为它们都有从 $(z+1)$ 项得到的零点 $z=-1$。除了在 $\omega_s/2$ 处有较大的差异外,三种方法有相似的精度,而 $\omega_s/2$ 一般不在我们感兴趣的范围之内。

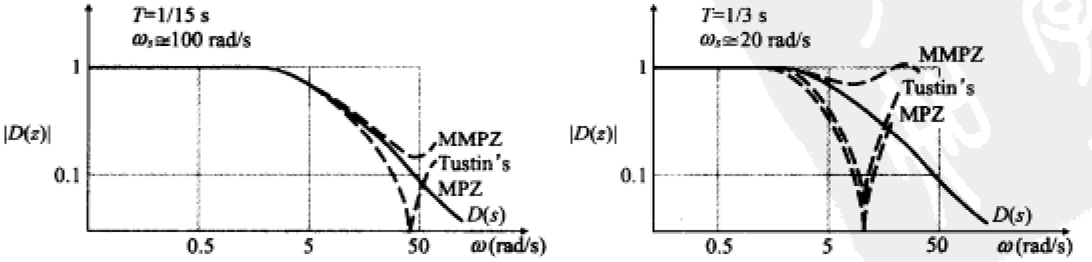


图8-13　三种离散逼近法频率响应的比较

表 8-2 比较 $D(z)$ 的几种数字逼近法，其中 $D(s)=\frac{5}{s+5}$

方 法	ω_s	
	100 rad/s	20 rad/s
零极点匹配法(MPZ)	$0.143\frac{z+1}{z-0.715}$	$0.405\frac{z+1}{z-0.189}$
修正的零极点匹配法(MMPZ)	$0.285\frac{1}{z-0.715}$	$0.811\frac{1}{z-0.189}$
Tustin 方法	$0.143\frac{z+1}{z-0.713}$	$0.454\frac{z+1}{z-0.0914}$

8.3.4 仿真设计法的应用范围

如果我们做了精确的离散分析或系统仿真，且决定了一个大范围的采样速率的数字化实现，则当采样速率低于 5 ω_n 时系统通常不稳定，采样速率低于 10 ω_n 时阻尼将明显降低。当采样速率大于或约等于 20 ω_n(或对于更复杂的系统采样速率大于或约等于 20 倍带宽)时，仿真设计将得到比较合理的结果，且当采样速率等于或大于 30 倍带宽时，仿真设计可以被放心地使用。

如图 8-2 所示，误差来源于该方法对零阶保持器(ZOH)滞后效应(通常为 $T/2$)的忽略。一种解决方法是用式(5-114)逼近 $T/2$ 延迟，再将其代入 ZOH 传递函数逼近表达式中：

$$G_{\mathrm{ZOH}}(s)=\frac{2/T}{s+2/T} \tag{8-32}$$

一旦执行了初步设计且选择了采样速率，我们可以通过将式(8-32)插入到受控对象初始模型中，并调整 $D(s)$ 以期出现采样延迟时能有理想的响应。因此，我们可以看到使用式(8-32)部分缓解了仿真法逼近特性的不足之处。

当采样速率小于约 10 ω_n 时，建议用一种严密的离散分析法来分析整个系统。如果离散分析表明采样使得系统性能严重恶化，则应采用更精确的离散法来改进设计。我们将在 8.6 节对此进行介绍。

8.4 硬件特征

在一个数字控制系统中，包括一些在连续控制系统中不存在的专有元件：**模数转换器(analog-to-digital converter)**，该设备采样传感器连续电压信号并将其转换成数字值；**数模转换器(digital-to-analog converter)**，该设备将计算机输出的数字值转换成一个模拟电压量，**抗混叠预滤器(anti-alias prefilter)**是一个模拟设备，用来减小混叠的影响；**计算机(computer)**是用来设计补偿 $D(z)$ 并执行计算的设备。本节将简要介绍每一种元件。

8.4.1　模数(A/D)转换器

正如在 8.1 节中讨论的那样,A/D 转换器是将传感器输出的电压转换成计算机能使用的数字值的设备。最基本的标准规定所有数字值都是由许多位组成的二进制数,这些位被设置成 1 或 0。因此,在每一采样时刻 A/D 转换的任务,就是将电压转换成一个正确的位形式并将其保持到下一个采样时刻。

在现有的众多 A/D 转换技术中,最常用的转化法是基于计数法或逐次逼近法。在计数法中,输入电压可能被转换成一系列频率与电压量成正比的脉冲。然后一个二进制计数器在一个固定的时间段内对这些脉冲进行计数,由此得到该电压的二进制表达式。该方法的一种改进是,与一个时域线性电压同时开始计数,当电压到达待转换输入电压幅值时停止计算。

逐次逼近法一般比计数法快得多。该方法是基于将输入电压与代表数字值中各位的参考电平逐次进行比较。输入电压首先与参考电平的最大峰值的一半进行比较。如果输入电压较大,则设定一个最高的位;然后将信号与一个 3/4 峰值的参考电平进行比较以确定下一个位,依次类推。要求一个时钟周期设定一个位,所以一个 n 位转换器需要 n 个周期。在同样的时钟频率条件下,基于计数器的转换器需要多达 2^n 个周期,所以这种计数器转换速度通常慢得多。

不管用哪种方法,位数越多,转换时间越长。A/D 转换器的价格通常随着速度和位数的增加而上涨。在 2005 年,一个 14 位(0.006%的分辨率)且具有 10 秒转换时间(每秒 1 亿次采样)的理想性能的转换器售价约为 65 美元。一个 12 位(0.025%的分辨率)且具有 1 微秒转换时间的转换器售价约为 8 美元。一个 8 位(0.4%的分辨率)且具有 1 微秒转换时间的转换器售价约为 2 美元。每年转换器的性能都有很大程度的改善。

若有多于一路的数据需要采样并转换成数字值,通常不用多个 A/D 转换器而用多路转换器来完成。多路转换器依次将转换器接入正在进行采样的通路中。

8.4.2　数模(D/A)转换器

D/A 转换器,正如在 8.1 节中提及的那样,用于将计算机输出的数字值转换成电压量,有时称为**采样保持(Sample and Hold)**设备。D/A 转换器提供计算机模拟输出来驱动执行器或是记录设备(如示波器或条形图形仪)。其操作背后的基本思想是用二进制位使开关(电子门)打开或关闭,从而将电流引入一个适当的电阻网络来产生正确的电压量。由于这种转换器不需要计算或迭代,所以通常比 A/D 转换器要快得多。事实上,采用逐次逼近法的 A/D 转换器元件中包括 D/A 转换器。

8.4.3　抗混叠预滤器

模拟的**抗混叠预滤器(anti-alias prefilter)**通常放在传感器与 A/D 转换器之间。其功

能是减小模拟信号中的高频的噪声成分来抑制混叠，即通过采样过程将噪声调制为低频信号。图 8-14 给出了一个混叠的例子，其中 60 Hz 的振荡信号正以 50 Hz 的频率进行采样。该图表明采样得到了一个 10 Hz 的信号并说明了信号频率 60 Hz～10 Hz 的混叠原理。只要采样速率不满足被采样信号任何频率至少两倍的要求时，混叠就会发生。因此，为了保护 60 Hz 的信号，采样速率必须高于 120 Hz，显然高于图中所示的 50 Hz。

混叠是奈奎斯特—香农采样定理(sampling theorem of Nyquist and shannon)的结论之一。该定理的基本表述为：要想根据采样准确地再现信号，信号中必须不含高于 1/2 采样速率($\omega_s/2$)的频率成分。该定理的另一个结论是能用离散采样值明确表示的最高频率为奈奎斯特频率($\omega_s/2$)，这一点我们已在 8.2.3 节中讨论过了。

混叠对一个数字控制系统产生的影响是很大的。在连续系统中，频率远大于控制系统带宽的噪声成分通常对系统的影响很小，这是因为系统不需要高频信号。然而，在数字系统中，噪声的频率可能会潜在地混叠在系统带宽附近的频率中，以至于闭环系统对噪声进行响应。因此，在一个设计得很差的数字控制系统中，噪声的影响可能比在用模拟电子器件实现的控制系统中要大得多。

解决方法是在采样器前串联一个模拟的预滤器。在许多情况下，一个简单的一阶低通滤波器就可以满足要求了：

$$H_p(s)=\frac{a}{s+a}$$

其中，选取拐点 a 应低于 $\omega_s/2$，这样任何高于 $\omega_s/2$ 频率的噪声都能被预滤器衰减。

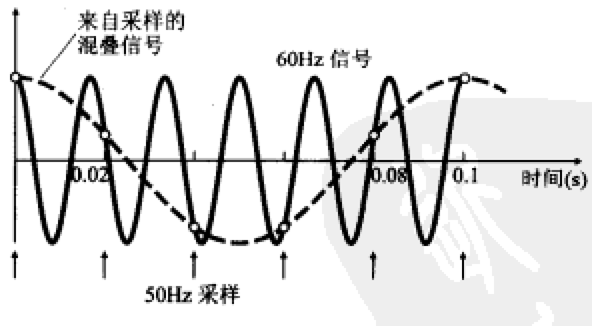


图 8-14 混叠的一个例子

拐点的频率选得越低，就会有越多高于 $\omega_s/2$ 的噪声被衰减。然而，拐点频率太低可能迫使设计者降低控制系统的带宽。预滤器并不能完全消除混叠；但合理选择预滤器的拐点和采样速率，使设计者有能力将混叠噪声的幅值减小到可以接受的限度。

8.4.4 计算机

计算机是处理所有计算的单元。今天所使用的大多数数字控制器，包括 A/D 和 D/A 转换器，都是围绕着一个微控制器构造的，该微控制器包括一个微处理器和大部分所需的其他函数。为了满足实验室发展的要求，数字控制器可以做成台式工作站或 PC 机。微处理器相对较低的成本是其被广泛用于数字控制系统的原因，这一现象始

于20世纪80年代，并一直持续到21世纪。

计算机包括一个中央处理器(CPU)，用来进行计算并提供系统逻辑；一个时钟，用于使系统同步；存储单元，负责存储数据和指令；电源，提供各种要求的电压。存储单元有三种基本类型：

(1) **只读存储器**(ROM)是最便宜的，但一经生产，它的内容就不能更改了。在批量生产的产品中，大部分的内存都是ROM。去掉电源时，其存储的内容被保留下来。

(2) **随机存储器**(RAM)是最贵的，但它的值可以通过CPU进行改动。它仅用来存储在控制过程中将被改变的值，且通常它在开发产品的整个内存中仅占一小部分。当去掉电源时，它会失去内存中的所有值。

(3) **可编程只读存储器**(EPROM)是ROM的一种，它的值可以被技术人员用一种特殊的设备进行改动。它通常是在产品开发阶段使用，以使设计者能够尝试不同的算法和参数值。去掉电源时，它保留其所存的数值。在一些产品中，有一定存储空间的EPROM是有帮助的，它们使得每一个单元可以独立进行校准。

用于控制的微处理器的数字值长通常为8位、16位或31位，有时还有12位的。字长越大，精度越高，但成本也相应增加。最经济的解决办法通常是用一个8位的微处理器，但在控制器领域中用两个数字值(**双精度(double precision)**)来存储一个值对系统来说是很重要的。许多数字控制系统是最初设计用来处理数字信号的，即所谓的DSP芯片。

8.5 采样速率的选择

为数字控制系统选择最佳的采样速率，是许多因素折中考虑的结果。采样太快会导致精度的损失，而降低采样速率 ω_s 的根本目的是为了降低成本。采样速率的降低意味着控制的计算将花费更多的时间；因此，稍慢的计算机可用于处理给定的控制任务或更多的控制能力可以从给定的计算机那里得到。无论哪一方面，每项任务的成本都降低了。对于含有A/D转换器的系统，转换速度的要求越低，成本就越低。这些经济上的考虑说明，最好的设计方案是以尽可能小的采样速率来满足所有的性能指标。

有几个因素限制了系统可以接受的最低采样速率：

(1) 跟踪速率，它以闭环带宽或上升时间和调整时间等时域响应指标来度量。

(2) 控制效率，它以对随机对象扰动的误差响应来度量。

(3) 误差，它是由测量噪声和相关的预滤波器设计法引起的。

运用仿真设计法时，会出现一个不真实的限定范围。当采样速率降低时，该方法中内在固有的逼近会恶化已下降的性能，甚至导致系统的不稳定。这将让设计者得出系统需要更快的采样速率的结论。然而，有两种解决方法：

(1) 更快的采样；

(2) 认识到这些逼近是无效的，用直接数字设计方法（将在后续章节中介绍）重新设计。

用快的采样速率和低成本的高效计算机来设计数字控制系统的便利，通常驱使设计者选择 $40\times\omega_{BW}$或更高的采样速率。对于采用定点运算的计算机来说，很快的采样速率会导致乘法误差，这些误差能在控制系统中产生明显的偏移和极限环（参见 Franklin et al. 1998）。

8.5.1 跟踪效率

采样速率的绝对下限是根据一个指标设定的，目的是跟踪某一频率（系统带宽）的指令输入。采样定理（参见 8.4.3 节和 Franklin et al. 1998）指出，为了从一个未知、限带且连续的信号的采样值中重构该信号，我们必须使采样速率至少为信号所包含的最高频率的两倍。因此，为了使闭环系统在某一频率跟踪其输入，系统的采样速率必须为两倍快；也就是说，ω_s 至少必须为系统带宽（$\omega_s \Rightarrow 2\times\omega_{BW}$）的两倍快。我们也能从 s 平面到 z 平面的映射结果中看出，离散系统所能表示的最高频率为 $\omega_s/2$，这也证明了该定理的结论。

注意，闭环带宽 ω_{BW} 与开环对象动态特性的最高频率之间的差别是很重要的，因为这两个频率是截然不同的。例如，在某些控制问题中，闭环带宽可能比开环谐振模低一个数量级。为了进行控制，有关受控对象谐振状态的信息可以在不满足采样定理的条件下从输出的采样中提取出来，因为有关这些动态的信息（尽管不精确）是可以事先得到的，而且系统不必跟踪这些频率。所以，可以将预先了解到的受控对象动态模型的信息包含在陷波滤波器形式的补偿中。

闭环带宽限制提供给采样速率一个基本的下限。但在实际中，考虑到期望时域响应的质量，采样速率的理论下限（即两倍于参考输入信号带宽）就不充分了。对于一个上升时间为 1 秒（由此得到闭环带宽为 0.5 Hz）的系统，采样速率的合理选择范围为 10 Hz～20 Hz，即 20～40 倍的 ω_{BW}。选择一个比带宽大得多的采样速率的目的是，减小控制信号与系统对控制信号的响应之间的延迟，同时使响应从 ZOH 出来的阶跃控制信号的系统输出平滑。

8.5.2 抑制扰动

对于任何控制系统，抑制扰动是一个重要的（如果不是最重要的）方面。扰动带着各种各样的频率特性进入系统，变化范围从阶跃到白噪声。高频随机扰动对采样速率的选择的影响最大。

带理想连续控制器的控制系统对扰动的抑制能力代表了对误差响应的下限，这正是我们实现控制器数字化时所期望的。事实上，相对于连续系统设计而言，必然会出现一些退化，因为除了恰好在采样时刻以外，其他所有时间上的采样都是不准确的。然而，如果与噪声扰动中所包含的频率相比，采样速率快很多的话，我们应认为与连续

控制器相比数字系统没有可评估的损失。在另一个极端，如果采样速率与噪声的特征频率相比非常慢，则噪声所引起的系统响应与我们在系统根本不存在控制的情况获得的响应是一样的。采样速率的选取应把系统响应置于这两个极端情况之间。因此，当选择采样速率时，其对于系统抑制扰动的能力的影响可能是需要考虑的一个非常重要的因素。

尽管以 ω_{BW} 倍数形式的采样速率的最佳选择取决于噪声的频率特性和随机扰动的抑制对控制器质量的重要程度，但通常采样速率都选为约 20 倍 ω_{BW} 或更高。

8.5.3　抗混叠预滤器的影响

正如在 8.4.3 节中讨论的那样，带模拟传感器的数字控制系统一般包含一个位于传感器和采样器之间的抗混叠预滤器。

这个抗混叠预滤器是低通的，其最简的传递函数为

$$H_p(s)=\frac{a}{s+a}$$

所以在预滤器拐点 a 之上的噪声就被衰减掉了。设计目标是在采样速率的一半（$\omega_s/2$）处提供足够的衰减；这样，当高于 $\omega_s/2$ 的噪声被采样器混叠进低频中时，不会损害控制的性能。

保守的设计步骤是将 ω_s 和拐点选得高于系统带宽，使得由预滤器引起的相位滞后不会严重地改变系统的稳定性。这将使得我们在基本控制系统设计中允许忽略预滤器。此外，为了在 $\omega_s/2$ 处有效地削减高频噪声，我们选择一个个混叠预滤器拐点约 5～10倍的采样速率。这种预滤器的设计方案需要比系统带宽快约 30～100 倍的采样速率。采用这种保守的设计方案，预滤器的影响很可能会给采样速率的选取提供一个下限。

另一种可供选择的方法是允许由预滤器引起的有效相位滞后在系统的带宽处。这就要求我们在进行控制设计时把模拟预滤器特性包含在受控对象模型中。这就允许使用较低的采样速率，但可能的代价是增加了补偿的复杂性，因为此时必须提供一个额外的超前相位来抵消预滤器的滞后相位。如果采用这一方法且允许降低预滤器的拐点，则采样速率对传感器噪声的影响就会很小，而且预滤器对采样速率也基本上没有什么影响。

这看起来似乎有悖于直觉：将滞后环节（模拟预滤器）放在控制器的某一部分中，将起抵消作用的超前环节（$D(z)$中的外加超前）放在控制器的另一部分中，会为整个系统提供积极的影响。净增益的产生，是因为滞后位于系统中存在高频的模拟部分这一事实。起抵消作用的超前位于系统的数字部分，这里不存在高于奈奎斯特速率的频率。结果是：在采样之前高频信号就衰减了，这些高频信号没有被起抵消作用的数字超前环节再放大，因此产生了高频信号的纯衰减。此外，由采样引起的混叠会使这些高频信号潜伏在数字控制器中。

8.5.4　异步采样

正如在前面章节中所提到的那样，将预滤器设计从控制规律设计中分离出来可能要求采样速率比其他情况快一些。同样的结论在其他类型的结构中也可能出现。例如，一个灵敏传感器计算机自身与主控计算机异步运行，这对于直接数字设计来说是不合适的，因为整个系统的传递函数取决于灵敏传感器与主控数字控制器之间的相位。这种情况类似于 8.6 节中讨论的数字化误差的情况。因此，若存在异步数字子系统，在任何模型中采用约为 $20\times\omega_{BW}$ 或更慢的采样速率时应谨慎，还要通过仿真或实验来检验系统的性能。

▲8.6　离散设计

将连续受控对象的采样值 $y(k)$ 与输入控制序列 $u(k)$ 联系在一起，获得一个精确的离散模型是可能的。这个受控对象模型可以被当作带补偿 $D(z)$ 的反馈系统离散模型的一部分。用这个离散模型来分析和设计称为**离散设计**(**discrete design**)或**直接数字设计**(**direct digital design**)。下面的章节将描述怎样求出离散模型(8.6.1 节)，用离散模型设计的反馈补偿是什么样的(8.6.2 节)及设计过程是如何进行的(8.6.4 节)。

8.6.1　分析工具

对带离散元件的系统进行离散分析的第一步是，找出连续部分的离散传递函数。对于一个类似于图 8-1b 所示的系统，我们希望找出 $u(kT)$ 与 $y(kT)$ 之间的传递函数。与在前面几节中所讨论过的情况不同，这类存在一个精确的离散等效模型，因为 ZOH 确切地给出了 $u(kT)$ 的采样之间的情况且输出 $y(kT)$ 仅取决于采样时刻上的输入 $u(kT)$。

前面串联一个 ZOH 的受控对象由 $G(s)$ 描述，其离散传递函数为

$$G(z)=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \tag{8-33}$$

其中，$\mathcal{Z}\{F(s)\}$ 为采样时间序列的 z 变换；该时间序列对应的拉普拉斯变换式为 $F(s)$，$F(s)$ 在表 8-1 的同一行给出。式(8-33)中有 $G(s)/s$ 项是因为控制信号在每个采样周期内以阶跃输入的形式从 ZOH 出来。$1-z^{-1}$ 项说明，可以将一个采样持续的间距看作是一个无穷持续间距再加上一个延迟了一个周期的负间距。要想了解更全面的推导过程请参见 Franklin 等人的相关著作(1998 年)。式(8-33)允许我们用图 8-15b 所示的等效纯离散系统替代图 8-15a 所示的混和(连续的和离散的)系统。

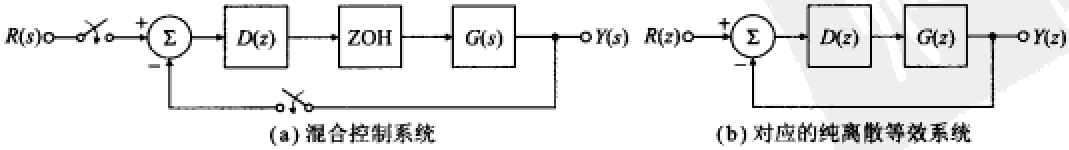


图 8-15　混合控制系统与对应的纯离散等效系统的比较

离散系统的分析和设计与连续系统的分析和设计类似：事实上，所有相同的规则都可以使用。图 8-15b 的闭环传递函数可用同样的框图简化得到，即

$$\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)} \tag{8-34}$$

为了求出闭环系统的特性，我们需要求出式(8-34) 分母的因式，即下面离散特征方程的根

$$1+D(z)G(z)=0$$

根轨迹在连续系统中用以求出一个 s 多项式的根，它同样可以应用到含 z 的多项式中，且不作任何改动；然而，所得结果的意义可能会大相径庭，正如我们在图 8-4 中看到的。其主要的差别在于稳定范围现在是单位圆而不是虚轴了。

例 8.3　离散根轨迹

对于图 8-15a 所示情况中的 $G(s)$

$$G(s)=\frac{a}{s+a}$$

且 $D(z)=K$，绘制关于 K 的根轨迹并将你的结果与连续系统形式的根轨迹进行比较。讨论你的根轨迹的含义。

解：由式(8-33)可得

$$\begin{aligned}G(z)&=(1-z^{-1})\mathbf{Z}\left[\frac{a}{s(s+a)}\right]\\&=(1-z^{-1})\left[\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}\right]\\&=\frac{1-\alpha}{z-\alpha}\end{aligned}$$

其中，

$$\alpha=e^{-aT}$$

为了分析闭环系统的性能，我们应用标准的根轨迹规则。离散情况的结果如图 8-16a所示，连续情况的结果如图 8-16b 所示。与系统对所有的 K 值均保持稳定的连续情况相比，在离散情况下当 z 从 0 变到 −1 时，随着阻尼比的下降，系统产生振荡并最终变得不稳定。这种不稳定是由 ZOH 的滞后效应引起的，在离散分析中已正确地解释了这一情况。

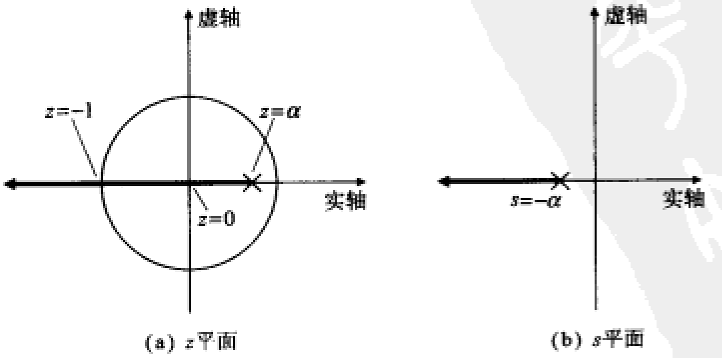


图 8-16　根轨迹

8.6.2 反馈特性

在连续系统中，我们一般用以下的基本设计元素来开始设计过程：比例、微分或积分控制规律，或它们的某种组合，有时还带一个滞后。同样的思想可用于离散设计。换言之，源于连续设计中 $D(s)$ 的数字化的 $D(z)$ 将产生这些基本的设计元素，这将作为离散设计的起点。离散控制规律如下。

比例控制

$$u(k)=Ke(k)\Rightarrow D(z)=K \tag{8-35}$$

微分控制

$$u(k)=KT_D[e(k)-e(k-1)] \tag{8-36}$$

其传递函数为

$$D(z)=KT_D(1-z^{-1})=KT_D\frac{z-1}{z}=k_D\frac{z-1}{z} \tag{8-37}$$

积分为

$$u(k)=u(k-1)+\frac{K_p}{T_I}e(k) \tag{8-38}$$

其传递函数为

$$D(z)=\frac{K}{T_I}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)=\frac{K}{T_I}\left(\frac{z}{z-1}\right)=k_I\left(\frac{z}{z-1}\right) \tag{8-39}$$

超前补偿

8.3 节中的例子表明一个连续超前补偿可得到如下形式的微分方程

$$u(k+1)=\beta u(k)+K[e(k+1)-\alpha e(k)] \tag{8-40}$$

其传递函数为

$$D(z)=K\frac{1-\alpha z^{-1}}{1-\beta z^{-1}} \tag{8-41}$$

8.6.3 离散设计举例

数字控制设计包括用式(8-35)～式(8-41)的基本反馈元素进行设计，并对设计参数反复选加、逐步逼近，直到所有的性能指标都满足要求。

例 8.4 空间站数字控制器的直接离散设计

用离散设计法设计一个数字控制器，该控制器满足与例 8.2 相同的性能指标。

解：前串一个零阶保持器(ZOH)的受控对象 $1/s^2$，其离散模型可用式(8-33)求得

$$G(z)=\frac{T^2}{2}\left[\frac{z+1}{(z-1)^2}\right]$$

若取 $T=1$ 秒，则上式为：

$$G(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{z+1}{(z-1)^2}\right]$$

在连续情况中，比例反馈产生了纯振荡运动，故在离散情况中所得结果会更糟糕。图 8-17 所示

的根轨迹验证了这一点。当 K 值很小时(对应的轨迹代表的根其频率与采样速率相比很低),对应的轨迹为单位圆的切线($\zeta \cong 0$,表示纯振荡运动),因此与连续的比例设计相匹配。

当 K 对应较大值时,图 8-16 表明由于 ZOH 和采样的影响,轨迹线发散到不稳定的区域内。为了对此进行补偿,给比例项加上一微分项,得到如下的控制规律:

$$U(z)=K[1+T_D(1-z^{-1})]E(z) \tag{8-42}$$

得到如下形式的补偿:

$$D(z)=K\frac{z-\alpha}{z} \tag{8-43}$$

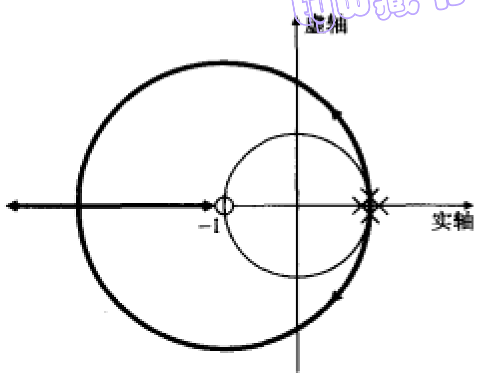


图 8-17　带比例反馈的 $1/s^2$ 受控对象的 z 平面根轨迹

其中 K 和 α 的新值代替了式(8-42)的 K 和 T_D。现在的任务是求出 K 和 α 的值以获得理想的性能。设计的性能指标为 $\omega_n=0.3\text{rad/s}$、$\zeta=0.7$。图 8-4 表明该 s 平面上的根映射到 z 平面上的期望位置 $z=0.78\pm0.18\text{j}$ 处。

图 8-18 为 α 取 0.85 时关于 K 的根轨迹。零点的位置($z=0.85$)是通过反复尝试直到根轨迹穿越 z 平面上的期望位置确定的。当根轨迹穿越 $z=0.78\pm0.18\text{j}$ 时,增益值为 $K=0.374$。式(8-43)现在变为

$$D(z)=0.374\frac{z-0.85}{z} \tag{8-44}$$

通常,匹配 z 平面根的特定位置不是十分有优势;相反,仅需选取 K 和 α(或 T_D)以获得满意的 z 平面的根,这就容易得多了。在本例中,我们想匹配一个特定的位置使我们能将所得结果与例 8.2 中的设计进行比较。

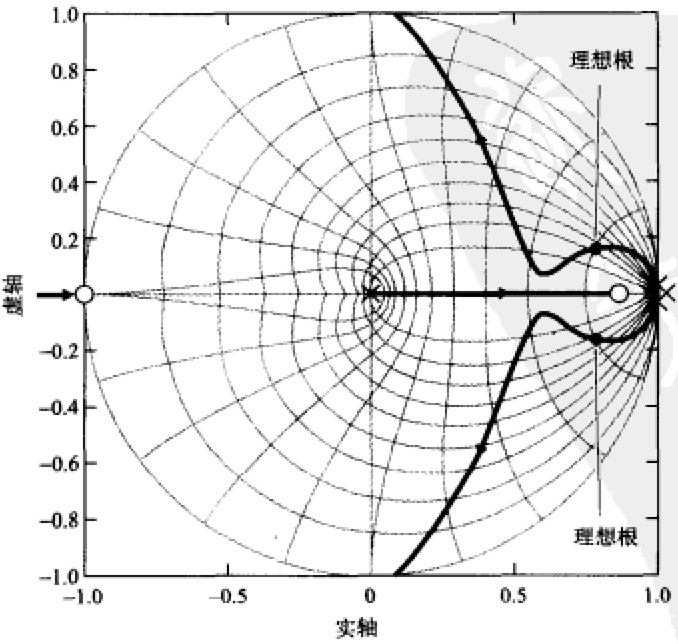


图 8-18　带 $D(z)=K(z-0.85)/z$ 的 $1/s^2$ 受控对象的 z 平面根轨迹

所得的控制规律为

$$U(z)=0.374(1-0.85z^{-1})E(z)$$

或

$$u(k)=0.374e(k)-0.318e(k-1) \tag{8-45}$$

这与先前得到的控制方程式(8-29)相似。

式(8-45)中的控制器与连续设计的控制器(式(8-29))的根本差别仅在于缺少$u(k-1)$项。式(8-29)中的$u(k-1)$项源于补偿(式(8-27))的滞后项$(s+b)$。该滞后项一般包含在模拟控制器中，这是因为它提供了噪声衰减而且纯模拟微分器很难构建。在离散设计中，一些等效滞后一般作为极点$z=0$出现（参考图8-17)且它在用一阶差分计算微分中代表一个采样延迟。为了使噪声衰减得更多，我们可将极点移到$z=0$的右侧，这样可产生更少的微分作用和更多的过滤特性；在连续控制系统设计中存在同样的折中。

8.6.4 设计的离散分析

任何数字控制器，不论是用仿真法设计的还是直接在z平面内设计的，都可用离散分析法进行分析，包括以下几个步骤：

(1) 用式(8-33)求出对象和ZOH的离散模型；

(2) 构建包含$D(z)$的反馈系统；

(3) 分析所得的离散系统。

我们能用一条根轨迹决定系统的根，正如在8.6.3节中描述的，或者我们能决定离散系统的(在采样时刻上的)时间序列。

例8.5 数字设计与连续设计的阻尼和阶跃响应

用离散分析法来求出例8.2和例8.4中数字设计的等效s平面阻尼和阶跃响应，并把你所得的结果与例8.2中连续设计的阻尼和阶跃响应进行比较。

解：计算例8.2中连续情况的阻尼和阶跃响应的MATLAB语句为：

```
sysGs = tf(1,[1  0  0]);
sysDs = tf(0.81 * [1  0.2],[1  2]);
sysGDs = series(sysGs,sysDs);
sysCLs = feedback(sysGDs,1,1);
step(sysCLs)
damp(sysCLs)
```

为了分析数字控制情况，前边串联ZOH的受控对象的模型用下述语句求得：

```
T = 1;
sysGz = c2d(sysGs,T,'zoh')
```

对例8.2中用仿真法设计的数字控制系统（式(8-29)）的分析是用下述语句执行的：

```
sysDz = tf( [.389 -.319],[1 -.135])
sysDGz = series(sysGz,sysDz)
sysCLz = feedback(sysDGz,1)
step(sysCLz,T)
damp(sysCLz,T)
```

同样，式(8-44)的离散设计 $D(z)$ 可以用相同的指令序列进行分析。

得到的阶跃响应如图 8-19 所示。计算出闭环系统的阻尼系数 ζ 和复根的自然频率 ω_n 如下。

连续情况：$\zeta=0.705$，$\omega_n=0.324$

离散等效：$\zeta=0.645$，$\omega_n=0.441$

离散设计：$\zeta=0.733$，$\omega_n=0.306$

该图显示了仿真法得到的增大的超调量，超调量的增大是由该情况的阻尼比减小引起的。在离散设计中超调量几乎没有增大，因为在离散设计中要特别地调整补偿使得离散系统的等效 s 平面阻尼系数近似等于期望的阻尼系数值 $\zeta=0.7$。

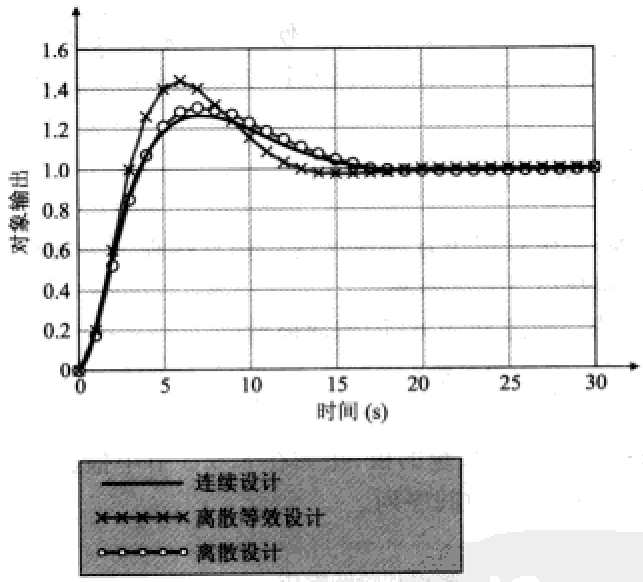


图 8-19 例 8.2 和例 8.4 中连续系统与数字的系统的阶越响应

尽管分析表明用两种方法设计的数字控制器的性能之间存在一些差别，但性能和控制方程(式(8-29)和式(8-45))的差别都不是很大。这种相似性的产生是因为与 ω_n 相比采样速率太快，即 $\omega_s \cong 20\times\omega_n$。若降低采样速率，则补偿中的数字值的差别将变得越来越大，尤其对仿真设计而言性能将严重恶化。

总之，若采样频率低于 $10\times\omega_n$，应采用离散设计。最起码，对于采样速率较慢($\omega_s < 10\times\omega_n$)的仿真设计应该用离散分析或 4.4.1 节介绍的仿真对其进行验证，且如果需要，应该适当调整补偿。在任何情况中对数字控制系统进行仿真都是一个好主意。如果仿真结果正确地解释了所有的延迟和不同模型可能存在的不同步行为，系统就可能暴露不稳定性；这些不稳定性是不可能通过连续或离散线性分析检测得到的。8.5 节将更加全面地讨论采样速率对设计的影响。

▲8.7 状态空间设计方法

我们在前面的章节中已经看到一个线性常系数连续系统可以用如下形式的一组一阶矩阵微分方程表示

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{G}u \tag{8-46}$$

其中 u 为系统的控制输入。输出方程可表示为

$$y=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+Ju \tag{8-47}$$

这些方程的解(参看 Franklin et al. 1998)为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(t-\tau)}\boldsymbol{G}u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8-48}$$

用式(8-48)来获得系统的一个离散状态空间表达式是可能的。由于一个采样周期的解能得到一个差分方程,因此我们将符号稍微改一下(令 $t=kT+T$,$t_0=kT$)就可得到式(8-48)的一种特别有用的形式

$$\boldsymbol{x}(kT+T)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}T}\boldsymbol{x}(kT)+\int_{kT}^{kT+T}\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}(kT+T-\tau)}\boldsymbol{G}u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8-49}$$

这个结果不依赖保持器的类型,因为在采样间隔内 u 固定取它的连续时间序列 $u(\tau)$。为了求出一个连续系统的离散模型,该系统的输入 $u(t)$ 是一个 ZOH 的输出,我们令 $u(\tau)$ 为一个在整个采样间隔内的常量,即

$$u(\tau)=u(kT),\quad kT\leqslant\tau<kT+T$$

对于 ZOH,为了方便求式(8-49)的解,我们令

$$\eta=kT+T-\tau$$

将式(8-49)变为

$$\boldsymbol{x}(kT+T)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}T}\boldsymbol{x}(kT)+\left(\int_0^T\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}\eta}\mathrm{d}\eta\right)\boldsymbol{G}u(kT)$$

若我们令

$$\boldsymbol{\Phi}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}T}$$

且

$$\boldsymbol{\Gamma}=\left(\int_0^T\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}\eta}\mathrm{d}\eta\right)\boldsymbol{G} \tag{8-50}$$

式(8-49)和式(8-47)就化简为如下标准形式的差分方程

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{\Gamma}u(k) \tag{8-51}$$

$$y(k)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(k)+Ju(k) \tag{8-52}$$

这里,$\boldsymbol{x}(k+1)$ 为 $\boldsymbol{x}(kT+T)$ 的简化表达式,$\boldsymbol{x}(k)$ 代表 $\boldsymbol{x}(kT)$,$u(k)$ 代表 $u(kT)$。序列展开式为

$$\boldsymbol{\Phi}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{F}T}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}T+\frac{\boldsymbol{F}^2T^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{F}^3T^3}{3!}+\cdots$$

也可写作

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}T\boldsymbol{\Psi} \tag{8-53}$$

其中,

$$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{F}T}{2!}+\frac{\boldsymbol{F}^2T^2}{3!}+\cdots$$

式(8-50)的积分 $\boldsymbol{\Gamma}$ 可以逐项计算得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{F}^kT^{k+1}}{(k+1)!}\boldsymbol{G}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{F}^kT^k}{(k+1)!}T\boldsymbol{G}\\&=\boldsymbol{\Psi}T\boldsymbol{G}\end{aligned}\tag{8-54}$$

我们用下列形式的序列计算 $\boldsymbol{\Psi}$：

$$\boldsymbol{\Psi}\cong\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{F}T}{2}\left\{\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{F}T}{3}\left[\boldsymbol{I}+\cdots\frac{\boldsymbol{F}T}{N-1}\left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{F}T}{N}\right)\right]\right\}$$

这比用直接序列具有更好的数值特性。我们接下来就可根据式(8-54)求出 $\boldsymbol{\Gamma}$，根据式(8-53)求出 $\boldsymbol{\Phi}$。要想了解各种确定 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}$ 数值的方法，请参看Franklin等人的(1998)及 Moler 和先驱 Loan(1978)的有关著作。$\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}$ 矩阵的实际计算是用 MATLAB 的 c2d 函数的。

为了将这种表示受控对象的方法与离散传递函数进行比较，我们取式(8-51)和式(8-52)的 z 变换，并令 $J=0$ 来得到

$$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{X}(z)=\boldsymbol{\Gamma}U(z)\tag{8-55}$$

$$Y(z)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}(z)\tag{8-56}$$

因此，

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=G(z)=\boldsymbol{H}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\tag{8-57}$$

例 8.6　$1/s^2$ 受控对象的离散空间表达式

用本节中的关系式验证前边串联 ZOH 的 $1/s^2$ 受控对象的离散模型与在例 8.4 的解答中给出的结果一样。

解：$\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}$ 矩阵可采用式(8-53)和式(8-54)求得。

例 7.1(I—1)指出 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 矩阵的值为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

因为在这种情况下 $\boldsymbol{F}^2=\boldsymbol{0}$，我们得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}T+\boldsymbol{F}^2\frac{T^2}{2!}+\cdots\\&=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}T=\begin{bmatrix}1&T\\0&1\end{bmatrix}\\\boldsymbol{\Gamma}&=\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}\frac{T}{2!}\right)T\boldsymbol{G}\\&=\left(\begin{bmatrix}T&0\\0&T\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\frac{T^2}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T^2/2\\T\end{bmatrix}\end{aligned}$$

因此，用式(8-57)，我们得到：

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\left(z\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&T\\0&1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}T^2/2\\T\end{bmatrix}$$

$$=\frac{T^2}{2}\left[\frac{z+1}{(z-1)^2}\right] \tag{8-58}$$

我们将例 8.4 的结果用式(8-33)及 z 变换表进行变换得到的结果与式(8-58)一致。

注意,为了计算 Y/U,我们发现式(8-58)的分母多项式为 $\det(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi})$,这是由式(8-57)中矩阵求逆产生的。这个行列式是传递函数的特征多项式,行列式的零点就是受控对象的极点。在本例中,我们有两个极点为 $z=1$,它们在该受控对象运动方程中对应于两个积分项。

再观察变换公式[式(8-55)和式(8-56)],我们进一步探索零极点和状态空间描述问题。从相应的差分方程角度理解传递函数的一种方法是,认为极点是这样的一个 z 值:当强迫输入为零时,方程有非平凡解。根据式(8-55),这种理解意味着线性方程 $(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{X}(z)=\boldsymbol{0}$ 有一个非平凡解。众所周知,根据矩阵代数可知存在非平凡解的必要条件为 $\det(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi})=0$。采用例 8.6 中的系统,我们得到:

$$\begin{aligned}\det(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi})&=\det\left(\begin{bmatrix}z&0\\0&z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&T\\0&1\end{bmatrix}\right)\\&=\det\begin{bmatrix}z-1&-T\\0&z-1\end{bmatrix}\\&=(z-1)^2\\&=0\end{aligned}$$

该式是特征方程,正如我们看到的。在 MATLAB 中,系统的极点可用P = eig(Phi)求出。

依此类推,系统的零点是这样一个 z 值:即使有一个非零的状态和输入同时存在,系统的输出仍为零。因此,如果我们能为 $\boldsymbol{X}(z_0)$ 和 $U(z_0)$ 找到一个非平凡解,使得 $Y(z_0)$ 恒为零,则 z_0 为系统的一个零点。将式(8-55)和式(8-56)联立,我们必须满足下列要求:

$$\begin{bmatrix}z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi}&-\boldsymbol{\Gamma}\\\boldsymbol{H}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}(z)\\U(z)\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

再次重申,非平凡解存在的条件为系统系数方阵的行列式为零。对例 8.6,计算过程为:

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}z-1&-T&-T^2/2\\0&z-1&-T\\1&0&0\end{bmatrix}&=\det\begin{bmatrix}-T&-T^2/2\\z-1&-T\end{bmatrix}\\&=T^2+\frac{T^2}{2}(z-1)\\&=\frac{T^2}{2}z+\frac{T^2}{2}\\&=\frac{T^2}{2}(z+1)\end{aligned}$$

因此,正如我们从传递函数中看出的那样,有单极点 $z=-1$。在 MATLAB 中,用 Z=tzero(Phi,Gam,H,J)计算零点。

离散状态空间控制设计的大部分计算都与第 7 章介绍的连续时间域的情况相同。用如下的线性状态变量反馈可将离散系统的极点移动到期望的位置处:

$$u=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

若系统是能控的，则

$$\det(zI-\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Gamma K})=\alpha_c(z) \tag{8-59}$$

系统是能控的，只有能控性矩阵

$$C=[\boldsymbol{\Gamma}\quad \boldsymbol{\Phi\Gamma}\quad \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{\Gamma}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\Phi}^{n-1}\boldsymbol{\Gamma}]$$

是满秩的。

离散的全阶观测器有如下形式：

$$\bar{x}(k+1)=\boldsymbol{\Phi}\bar{x}(k)+\boldsymbol{\Gamma}u(k)+\boldsymbol{L}[y(k)-\boldsymbol{H}\bar{x}(k)]$$

其中，$\bar{x}$ 是状态估计。误差方程：

$$\tilde{x}(k+1)=(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{LH})\tilde{x}(k)$$

可以实现任意的动态 $\alpha_e(z)$，若系统是能观测的。若系统的能观性矩阵：

$$\vartheta=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{H\Phi}\\ \boldsymbol{H\Phi}^2\\ \vdots\\ \boldsymbol{H\Phi}^{n-1}\end{bmatrix}$$

是满秩的，则系统具有能观性。

连续时域的情况也是如此，若开环传递函数为：

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b(z)}{a(z)}$$

则可以设计一个状态空间补偿器使得：

$$\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{K_s\gamma(z)b(z)}{\alpha_c(z)\alpha_e(z)}$$

其中，r 为参考输入。多项式 $\alpha_c(z)$ 和 $\alpha_e(z)$ 由设计者选取，方法与第 7 章介绍过的用于连续系统的方法完全相同。由 $\alpha_c(z)$ 得到的一个控制增益 $\boldsymbol{K}$ 满足 $\det(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Gamma K})=\alpha_c(z)$，由 $\alpha_e(z)$ 得到的一个观测器增益 $\boldsymbol{L}$ 满足 $\det(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{LK})=\alpha_e(z)$。如果根据图 7-48a 构造观测器，则系统的零点 $\gamma(z)$ 将与观测器极点 $\alpha_e(z)$ 相同，因此就将观测器的响应从闭环响应中消去了。然而，若愿意，我们可以从参考输入处提供恰当的前馈，这样就能任意选取多项式 $\gamma(z)$。更多细节请参看 Franklin 等人的相关著作(1998)。

例 8.7　数字控制器的状态空间设计

为 $1/s^2$ 的受控对象设计一个数字控制器，使其满足例 8.2 给出的性能指标。采用状态空间设计法并包含使用一个观测器，用按照以下两种方式构建参考输入：

(a) 用图 7-48b 中给出的误差信号。

(b) 用图 7-48a 和图 7-15 中给出的状态信号。

解：我们用 MATLAB 语句求解面串联一个 ZOH 的 $1/s^2$ 受控对象的状态空间模型：

```
sysSSc = ss([0 1;0 0], [0; 1], [1 0], 0);
T = 1;
sysSSd = c2d(sysSSc, T);
[Phi,Gam,H] = ssdata(sysSSd);
```

用例 8.4 的离散分析法，我们发现期望的 z 平面根为 $z=0.78\pm0.18j$。求解离散的极点配

置问题就是要按式(8-59)配置 $\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{\Gamma K}$ 的特征值。同样,连续系统的极点配置问题的求解是按式(7-72)配置 $\boldsymbol{F}-\boldsymbol{GK}$ 的特征值。这两项工作是一致的,我们在 MATLAB 中对连续和离散的情况应用相同的函数。因此,控制系统反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可从下列语句求得

```
pc = [0.78 + 0.18*j; 0.78 - 0.18*j];
K = acker(Phi,Gam,pc);
```

得到

$$\boldsymbol{K}=[0.0808 \quad 0.3996]$$

为确保观测器的根比控制器的根快得多,(这样观测器的根对输出的影响将会很小),我们选观测器的根为 $z=0.2\pm0.2\mathrm{j}$。因此,观测器的反馈矩阵 $\boldsymbol{L}$ 可从下列语句求得

```
pe = [0.2 + 0.2*j; 0.2 - 0.2*j];
L = acker(Phi', H', pe');
```

得到

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1.6\\0.68\end{bmatrix}$$

对 $r=0$,补偿方程(控制到 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=[0 \quad 0]$)为:

$$\bar{\boldsymbol{x}}(k+1)=\boldsymbol{\Phi}\bar{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{\Gamma}u(k)+\boldsymbol{L}[y(k)-\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{x}}(k)] \tag{8-60}$$

$$u(k)=-\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{x}}(k) \tag{8-61}$$

(a) 对于图 7-48b 所示的将补偿器置于前馈通路中的误差信号结构,式(8-60)中的 $y(k)$ 用 $y(k)-r$ 代替,所以受控对象加观测器(这是一个四阶系统,其状态变量为$[\boldsymbol{x} \quad \bar{\boldsymbol{x}}]^T$)的状态描述为

```
A = [Phi    - Gam*K; L*H    Phi - Gam*K - L*H];
B = [0; 0; -L];
C = [1 0 0 0];
D = 0;
step(A,B,C,D).
```

其阶跃响应如图 8-20 所示,该响应过程与前面图 8-19 所示的阶跃响应过程相似。

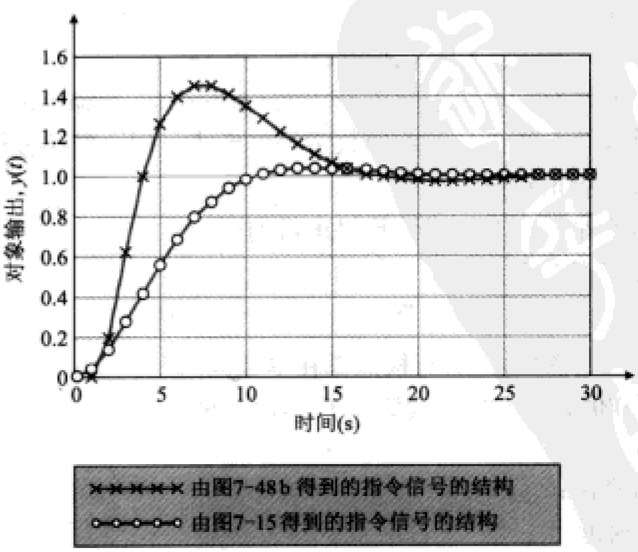


图 8-20 例 8.7 的阶跃响应

(b) 对7.9节中介绍的状态指令结构，我们希望控制状态变量的位置元素使得

$$N_x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

对常值输出 y，$1/s^2$ 受控对象不要求稳定的控制输入，因此有 $N_u=0$。为了分析带这类信号结构的系统，我们需要用上述的MATLAB语句修改矩阵 B，以正确地按图7-15引入参考输入 r。MATLAB的语句为：

```
B = [Gam•K•Nx; Gam•K•Nx];
```

将 r 同时引入受控对象和观测器，这样就不会激发观测器的动态。得到的阶跃响应如图8-20所示，该响应曲线表明采用这种结构超调量会大大减小。事实上，现在的超调量约为5%，这是 $\zeta\cong0.7$ 的二阶系统所要求的。由于额外零极点的影响，先前的设计都有相当大的超调量。

小结

- 最简单和最有效的设计方法是将一个连续控制器设计转换成其离散形式——也就是说，用**离散方程法**(**discrete equivalent**)。
- **仿真法设计法**的具体步骤为：(a)用第1章～第7章介绍的思想找出一个连续的补偿 $D(s)$；(b)(cc)基于欧拉法、Tustin法或零极点匹配法来用差分方程逼近 $D(s)$。
- 为了分析离散控制器设计或任何离散系统，z 变换被用来寻找系统特性。时域序列 $f(k)$ 的 z 变换为：

  $$\mathcal{Z}\{f(k)\}=F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}$$

  其主要性质为：

  $$\mathcal{Z}\{f(k-1)\}=z^{-1}F(z)$$

  这个性质使我们可以求出差分方程(difference equation)的离散传递函数，差分方程是连续系统微分方程的数字等效形式。用 z 变换进行分析与用拉普拉斯变换进行分析很相似。
- z 变换通常都是用表8-1或计算机求得的。
- 离散函数的终值定理：

  $$\lim_{k\to\infty}x(k)=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})X(z)$$

  条件为 $(1-z^{-1})X(z)$ 的所有极点都在单位圆内。
- 对于一个采样值为 $f(k)$ 的连续信号 $f(t)$，$F(s)$ 的极点与 $F(z)$ 的极点之间的关系为

  $$z=e^{sT}$$
- 最常用的仿真法：

  (1) Tustin逼近

  $$D(z)=D(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

(2) 零极点匹配法

- 按 $z=e^{sT}$ 映射零极点。
- 给分子加上$(z+1)$的幂项直到分子与分母的阶数相等或分子的阶数比分母的小1。
- 令 $D(z)$的低频增益等于 $D(s)$的低频增益。
- 若用仿真法进行设计，推荐**采样速率**(**sample rate**)的最小值取20倍的带宽。显然，更快的采样对于获取理想的系统性能很有用。
- 模拟**预滤器**(**prefilter**)通常放在**采样器**(**sampler**)的前边以减小高频测量噪声的影响。采样器将信号中所有高于采样频率一半的频率都**混叠**(**alias**)到低频中；因此，预滤器拐点的选取应使得不重要的频率成分不高于采样速率的一半。
- 前边串联ZOH的连续对象的离散模型：

$$G(z)=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

  这个离散受控对象模型加上其离散控制器可用 z 变换分析或用Simulink模拟。
- **离散设计**(**discrete design**)是一种精确的设计方法，能克服离散等效固有的近似。其设计过程包括：(a)寻找受控对象 $G(s)$的离散模型；(b)应用离散模型直接以离散形式设计补偿器。该设计过程较离散等效设计更为繁琐，在设计开始前需要选定采样速率。一个实用的方法是，设计开始时使用离散等效，然后用离散设计精调设计结果。
- 用 $G(z)$进行离散设计与连续设计十分相似，但稳定域及 z 平面根的位置的含义不同。图8-5总结了响应特性。
- 微分方程的连续状态空间形式为

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}\mathbf{x}+\mathbf{G}u$$
$$y=\mathbf{H}\mathbf{x}+Ju$$

  对应的差分方程的离散形式为

$$\mathbf{x}(k+1)=\boldsymbol{\Phi}\mathbf{x}(k)+\boldsymbol{\Gamma}u(k)$$
$$y(k)=\mathbf{H}x(k)+Ju(k)$$

  其中，

$$\boldsymbol{\Phi}=e^{\mathbf{F}T}$$
$$\boldsymbol{\Gamma}=\left(\int_0^T e^{\mathbf{F}\eta}\mathrm{d}\eta\right)\mathbf{G}$$

  这些矩阵可用MATLAB的语句[Phi, Gam] = c2d(F,G,H,J)求得，且可用于状态空间**离散设计法**中。
- 极点配置和估计的思想在连续域与离散域内是一致的。
- 若用离散设计法，**采样**(**sampling**)速率为两倍的带宽时就可在理论上保证系统稳定。然而，为了获得良好的瞬时性能和抑制随机扰动，采样速率为10倍的闭环带宽或更快时可获得最理想的结果。在一些复杂的振荡模型情况下，更快的采样是很有用的。

复习题

1. 什么是奈奎斯特频率？它有什么特点？
2. 描述仿真设计过程。
3. 若采样速率为 $30\times\omega_{BW}$，试说明如何得到 $D(z)$？
4. 若系统带宽为 1 rad/s，试说明采用不同的采样速率有何影响？
5. 给出选用数字处理器代替模拟电路实现控制器的两个优势。
6. 给出选用数字处理器代替模拟电路实现控制器的两个不利之处。

▲7. 若采样速率为 $5\times\omega_{BW}$，试说明如何得到 $D(z)$？

习题

8.2 节习题：离散系统的动态分析

8-1 采样速率为 1Hz 时离散时间滤波器 $h(k)$ 的 z 变换为：

$$H(z)=\frac{1+(1/2)z^{-1}}{[1-(1/2)z^{-1}][1+(1/3)z^{-1}]}$$

(a) 令 $u(k)$ 与 $y(k)$ 分别为该滤波器的离散输入和输出。求与 $u(k)$ 和 $y(k)$ 相关的差分方程。

(b) 求滤波器极点的自然频率和阻尼系数。

(c) 该滤波器稳定吗？

8-2 用 z 变换求解下面的差分方程

$$y(k)-3y(k-1)+2y(k-2)=2u(k-1)-2u(k-2)$$

其中，

$$u(k)=\begin{cases}k, & k\geqslant 0\\ 0, & k<0\end{cases}$$

$$y(k)=0,\qquad k<0$$

8-3 单边 z 变换的定义为：

$$F(z)=\sum_{0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

(a) 证明：$f(k+1)$ 的单边 z 变换为 $\mathbf{Z}\{f(k+1)\}=zF(z)-zf(0)$。

(b) 用单边 z 变换求解由差分方程 $u(k+2)=u(k+1)+u(k)$ 得到的斐波那契数(Fibonacci number)的变换式。令 $u(0)=u(1)=1$[提示：你需求出用 $f(k)$ 的变换表示的 $f(k+2)$ 的变换的一般表达式]。

(c) 求出斐波那契数的变换的极点位置。

(d) 求出斐波那契数的逆变换。

(e) 若用 $u(k)$ 表示第 k 个斐波那契数，证明：$u(k+1)/u(k)$ 将接近 $(1+\sqrt{5})/2$。这就是希腊人高度评价的黄金比。

8-4 证明在 8.2.3 节中列出的 s 平面到 z 平面映射的第七条特性。

8.3 节习题：仿真设计

8-5 一个单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{250}{s[(s/10)+1]}$$

将下面的滞后补偿器与受控对象串联，得到 50° 的相对裕度：

$$D(s)=\frac{s/1.25+1}{50s+1}$$

用零极点匹配逼近法求该补偿器的一个等效数字实现。

8-6 下面的传递函数为一个超前网络，设计它是为了在 $\omega_1=3\text{rad/s}$ 处增加约为 60° 的相位：

$$H(s)=\frac{s+1}{0.1s+1}$$

(a) 假定采样周期为 $T=0.25$ 秒，用(1) Tustin 法和(2)零极点映射法求出 $H(s)$ 的数字实现，计算并绘制该实现的 z 平面零极点的位置。对每种情况计算出网络在 $z_1=e^{j\omega_1 T}$ 处提供的超前相位的数值。

(b) 对从 $\omega=0.1$ 到 $\omega=100\text{rad/s}$ 的频率范围，用 log-log 坐标为(a)中求出的每个等效数字系统绘制幅值 Bode 图并与 $H(s)$ 进行比较[提示：Bode 图由 $|H(z)|=|H(e^{j\omega T})|$ 给出]。

8-7 下面的传递函数是一个滞后网络，设计它是为了在 $\omega=3$ rad/s 处引入一个大小为 10 (−20db)的增益衰减。

$$H(s)=\frac{10s+1}{100s+1}$$

(a) 假定采样周期为 $T=0.25$ 秒，用(1) Tustin 法和(2)零极点映射法求出 $H(s)$ 的数字实现，计算并绘制该实现的 z 平面零极点的位置。对每种情况计算出网络在 $z_1=e^{j\omega_1 T}$ 处提供的增益衰减数值。

(b) 对(a)中求出的每个等效数字系统绘制幅值 Bode 图曲线，从 $\omega=0.01$ 到 $\omega=10$ rad/s 的频率范围。

8-8 考虑一个如图 8-21 所示的系统结构：

$$G(s)=\frac{40(s+2)}{(s+10)(s^2-1.4)}$$

(a) 假设系统前边串联零阶保持器(ZOH)，当 $T=1$ 时球传递函数 $G(z)$。

(b) 用 MATLAB 绘制系统关于 K 的根轨迹。

(c) 求使闭环系统稳定的 K 的取值范围。

(d) 将(c)的结论与使用模拟控制器的情况进行比较(也即采样开关总处于闭合状态的情况)。哪个系统 K 的允许值更大?

(e) 用 MATLAB 计算连续系统和离散系统的阶跃响应，对连续系统选取 K 使阻尼系数为 $\zeta=0.5$。

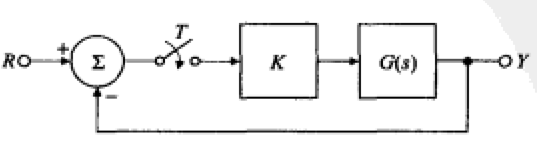


图 8-21 习题 8-8 的控制系统

8.5 节习题：采样速率的选择

8-9　如图 8-22 所示的系统，求 K、T_D 和 T_I 使得闭环极点满足 $\zeta>0.5$，$\omega_n>1$ rad/s。用下列方法将 PID 控制器离散化：

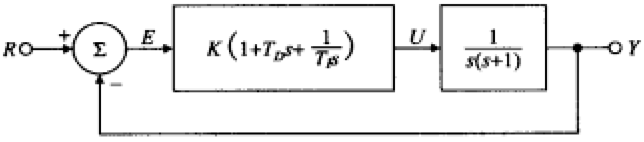


图 8-22　习题 8-9 的控制系统

(a) Tustin 法；

(b) 零极点匹配法。

采样时间取 $T=1$、0.1、0.01 秒，用 MATLAB 对每一种数字实现的阶跃响应进行仿真。

▲8.6 节习题：离散设计

8-10　单轴卫星姿态控制：卫星常常要进行姿态控制以使天线和传感器相对于地球有正确的方位。图 2-7 为一个通信卫星的三轴姿态控制系统。为了研究三轴问题，通常一次只考虑一个轴。图 8-23 描述了这种情况，图中运动只允许围绕着一个垂直于纸面的轴进行。系统得运动方程为：

$$I\ddot{\theta}=M_C+M_D$$

其中，

I＝卫星相对于质心的转动惯量；

M_C＝助推器产生的控制力矩；

M_D＝扰动力矩；

θ＝卫星轴相对于一个没有角加速度的惯性参考面的角度。

定义

$$u=\frac{M_C}{I},\qquad w_d=\frac{M_D}{I}$$

我们将运动归一化得

$$\ddot{\theta}=u+w_d$$

进行拉普拉斯变换得

$$\theta(s)=\frac{1}{s^2}[u(s)+w_d(s)]$$

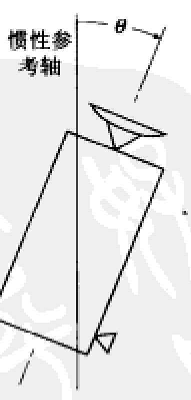


图 8-23　习题 8-10 的卫星控制系统

若上式不存在扰动，则有

$$\frac{\theta(s)}{u(s)}=\frac{1}{s^2}=G_1(s)$$

在离散的情况下 u 作用于零阶保持器(ZOH)，用本章介绍的方法可得到离散传递函数：

$$G_1(z)=\frac{\theta(z)}{u(z)}=\frac{T^2}{2}\left[\frac{z+1}{(z-1)^2}\right]$$

(a) 假设用比例控制，试手工绘制该系统的根轨迹。

(b) 用 MATLAB 绘制根轨迹验证手工绘制的图形。

(c) 给你的控制器加一个超前网络使得主导极点的 $\zeta=0.5, \omega_n=3\pi/(10T)$。

(d) 当 $T=1$ 秒时，反馈增益是多少？$T=2$ 秒呢？

(e) $T=1$ 秒时绘制闭环阶跃响应及相关的时域控制序列。

8-11 可以用电磁铁将一个磁性材料的质体悬挂起来，电磁铁的电流靠质体的位置控制（由 Woodson 和 Melcher 于 1968 年提出）。一种可能的结构图如图 8-24 所示。在斯坦福大学使用的该工作系统的照片如图 9-2 所示。运动方程为

$$m\ddot{x}=-mg+f(x,I)$$

其中电磁铁施加在球上的力由 $f(x,I)$ 给出。处于平衡时磁铁力与重力平衡。假设令 I_0 表示平衡点的电流。若 $I=I_0+i$，将 f 在 $x=0$ 和 $I=I_0$ 处展开并忽略高阶项就可得到线性化方程：

$$m\ddot{x}=k_1x+k_2i \tag{8-62}$$

式(8-62)中常数的合理数值为 $m=0.02\text{kg}, k_1=20\text{N/m}, k_2=0.4\text{N/A}$。

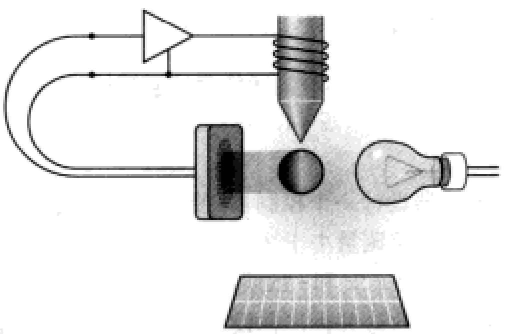


图 8-24 习题 8-11 和习题 8-16 中磁悬浮设备的结构图

(a) 计算从 I 到 x 的传递函数，对于简单的反馈 $i=-Kx$ 绘制（连续的）根轨迹。

(b) 假设输入作用在零阶保持器(ZOH)上，令采样周期为 0.02 秒。计算等效离散时间受控对象的传递函数。

(c) 为磁悬浮设备设计一个数字控制系统，使闭环系统满足如下的性能指标：$t_r\leqslant0.1$ 秒、$t_s\leqslant0.4$ 秒、超调量≤20%。

(d) 为你设计的系统绘制关于 k_1 的根轨迹，并讨论能否用你设计的闭环系统平衡各种质量的球。

(e) 假定一个初始扰动位移作用于小球，为你设计的系统绘制阶跃响应并标出 x 和控制电流 i。如果传感器仅能测量±1/4cm 范围内的 x，放大器仅能提供 1A 的电能且忽略 $f(x,I)$ 中的非线性项，那么可能控制的最大位移是多少？

8-12 重做习题 5-29，画出离散根轨迹，直接在 z 平面内进行设计。假设对输出 y 采样，输入 u 作用于一零阶保持器(ZOH)后施加于受控对象，采样速率为 15Hz。

8-13 为图 3-53 和图 3-52 所示的及在习题 3-29 种讨论过的天线伺服系统设计一数字控制器。该设计的阶跃响应应满足：超调量低于 10%，上升时间小于 80 秒。

(a) 采样速率应取多少？

(b) 用零极点匹配法与仿真法进行设计。

(c) 用离散设计和 z 平面根轨迹。

8-14 系统

$$G(s)=\frac{1}{(s+0.1)(s+3)}$$

用一数字控制器来控制，数字控制器的采样周期为 $T=0.1$ 秒。用 z 平面根轨迹设计一个补偿，其阶跃响应满足上升时间 $t_r\leqslant 1$ 秒、超调量 $M_p\leqslant 5\%$。欲减小稳态误差应采取什么措施？

8-15 纯微分控制的传递函数为：

$$D(z)=KT_D\frac{z-1}{T_z}$$

其中位于 $z=0$ 的极点产生了一些不稳定的相位滞后。这一滞后相位能用下述形式的微分控制消除吗？

$$D(z)=KT_D\frac{z-1}{T}$$

要求用差分方程证明你的结论并讨论实现该微分控制的必要条件。

▲8.7 节习题：状态空间设计法

8-16 习题 8-11 我们处理了由式(8-62)描述的磁性悬浮试验，将式(8-62)化简为

$$\ddot{x}=1000x+20i$$

令采样周期为 0.01 秒。

(a) 用极点配置法为磁悬浮器设计一个控制器，使闭环系统满足如下的性能指标：调整时间 $t_s\leqslant 0.25\text{s}$，对 x 的某一初始偏移的超调量小于 20%。

(b) 对 x 的某一初始偏移，绘制 x、$\tilde{x}$ 和 i 的阶跃响应。

(c) 改变受控对象增益绘制根轨迹并标出你设计的系统的极点位置。

(d) 引入一个参考控制输入 r(如在 7.9 节中讨论过的)。该输入不影响 x 的估计。测量或计算从 r 到系统误差 $r-x$ 的频率响应并给出使误差的幅值小于控制信号幅值的 20%的最高频率。

8-17 天线仰角控制伺服机构：假设该机构是用来控制天线仰角的，而天线是用来跟踪卫星的。这类系统的照片如图 8-25 所示，系统图在图 8-26 中给出。天线和驱动部分的转动惯量为 J、阻尼系数为 B；它们在一定程度上是由轴承摩擦和空气动力摩擦引起的，但大部分是源于直流驱动电机的反电动势。运动方程为：

$$J\ddot{\theta}+B\dot{\theta}=T_c+T_d$$



图 8-25 卫星跟踪天线

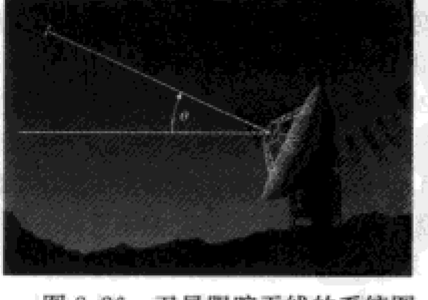


图 8-26 卫星跟踪天线的系统图

其中，

T_c＝驱动电机的净力矩 (8-63)

T_d＝由风引起的扰动方程 (8-64)

如果我们定义

$$\frac{B}{J}=a,\quad u=\frac{T_c}{B},\quad w_d=\frac{T_d}{B}$$

则方程简化为

$$\frac{1}{a}\ddot{\theta}+\dot{\theta}=u+w_d$$

经过拉普拉斯变换后，我们得到

$$\theta(s)=\frac{1}{s(s/a+1)}[u(s)+w_d(s)]$$

若不存在扰动，则有：

$$\frac{\theta(s)}{u(s)}=\frac{1}{s(s/a+1)}=G_2(s)$$

若 $u(k)$ 作用在零阶保持器(ZOH)上，则一个等效离散时间系统的传递函数为

$$G_2(z)=\frac{\theta(z)}{u(z)}=K\frac{z+b}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

其中，

$$K=\frac{aT-1+e^{-aT}}{a},\quad b=\frac{1-e^{-aT}-aTe^{-aT}}{aT-1+e^{-aT}}$$

(a) 令 $a=0.1$，$x_1=\dot{\theta}$，写出该系统的连续时间状态方程。

(b) (s)令 $T=1$ 秒，求等效离散时间系统得状态反馈增益 $\boldsymbol{K}$，使闭环极点对应于下述的 s 平面上的点：$s=-1/2\pm j(\sqrt{\frac{3}{2}})$，绘制所得设计的阶跃响应。

(c) 设计已观测器：选取 $\boldsymbol{L}$ 使 $\alpha_e(z)=z^2$。

(d) 将(b)和(c)中求得的 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 值作为复合观测器/控制器的增益，引入一个不干扰状态估计的参考输入。绘制由参考输入的阶跃变化引起的闭环系统的响应曲线。绘制系统响应阶跃风阵扰动的曲线。

(e) 绘制闭环系统关于受控对象增益的根轨迹并标出闭环极点的位置。

8-18 容器液体温度控制：流入和流出速率固定的一容器液体，其温度是通过调整流入液体的温度控制的。通过一个混合阀来控制流入液体的温度，该阀用来调整液体冷热供应相对数量(见图 8-27)。阀与液体流入容器的点之间的距离产生了一个时间延迟，该时间延迟时混合阀处温度变化的产生与改变了温度的流体流入到容器二者之间的延迟。控制容器温度的微分方程为

$$\dot{T}_e=\frac{1}{cM}(q_{in}-q_{out})$$

其中，

T_e＝容器温度；

c＝液体的比热；

M＝容器中的液体质量；

$q_{in}=c\dot{m}_{in}T_{ei}$；

$q_{out}=c\dot{m}_{out}T_e$；

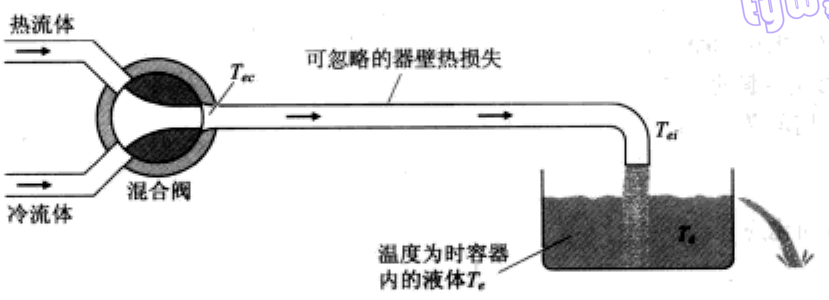


图 8-27　容器温度控制

$\dot{m}$ = 质量流速($\dot{m}_{in}=\dot{m}_{out}$)；

T_{ei} = 流入容器中的液体的温度。

然而，在时间 t 时容器入口处的温度等于 τ_d 秒前的控制温度。这一关系可用下式表达：

$$T_{ei}(t)=T_{ec}(t-\tau_d)$$

其中，

τ_d = 延迟时间；

T_{ec} = 控制阀后面的且可由阀直接控制的液体的温度。

将这些常式联立，我们得

$$\dot{T}_e(t)+aT_e(t)=aT_{ec}(t-\tau_d)$$

其中，

$$a=\frac{\dot{m}}{M}$$

因此，系统的传递函数为：

$$\frac{T_e(s)}{T_{ec}(s)}=\frac{e^{-\tau_d s}}{s/a+1}=G_3(s)$$

为求前串一零阶保持器(ZOH)的 G_3 的等效离散传递函数，必须计算下式

$$G_3(z)=\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{e^{-\tau_d s}}{s/a+1}\right)\right\}$$

我们假设对某一整数 l 有 $\tau_d=lT-mT$，其中 $0\leqslant m<1$，则有

$$\begin{aligned}
G_3(z)&=\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\left(\frac{e^{-slT}e^{msT}}{s/a+1}\right)\right\}\\
&=(1-z^{-1})z^{-l}\mathcal{Z}\left\{\frac{e^{msT}}{s(s/a+1)}\right\}\\
&=(1-z^{-1})z^{-l}\mathcal{Z}\left\{\frac{e^{msT}}{s}-\frac{e^{msT}}{s+a}\right\}\\
&=\frac{z-1}{z}\left(\frac{1}{z^l}\right)\mathcal{Z}\{1(t+mT)-e^{-a(t+mT)}1(t+mT)\}\\
&=\frac{z-1}{z}\left(\frac{1}{z^l}\right)\left(\frac{z}{z-1}-\frac{e^{-amT}z}{z-e^{-aT}}\right)\\
&=\frac{1}{z^l}\left[\frac{(1-e^{-amT})z+e^{-amT}-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}\right]\\
&=\left(\frac{1-e^{-amT}}{z^l}\right)\left(\frac{z+\alpha}{z-e^{-aT}}\right)
\end{aligned}$$

和

$$\alpha=\frac{e^{-amT}-e^{-aT}}{1-e^{-amT}}$$

零点位置$-\alpha$的变化范围为$m=0$时$\alpha=\infty$到$m\to1$时$\alpha=0$。注意对所有的a、m和l都有$G_3(1)=1.0$。对特殊值$\tau_d=1.5$，$T=1$，$a=1$，$l=2$和$m=1/2$，传递函数为：

$$G_3(z)=0.3935\,\frac{z+0.6065}{z^2(z-0.3679)}$$

(a) 写出状态空间形式的系统离散时间方程。

(b) 设计一状态反馈增益使得$\alpha_c(z)=z^3$。

(c) 设计一带$\alpha_e(z)=z^3$的状态观测器。

(d) 绘制系统关于受控对象增益的根轨迹。

(e) 绘制系统的阶跃响应。

8-19 现有方程$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中$\boldsymbol{A}$为$n\times n$矩阵。若$\boldsymbol{b}$给定，一种求解$\boldsymbol{x}$的方法是使用下述的离散时间递推公式：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=(\boldsymbol{I}+c\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(k)-c\boldsymbol{b}$$

其中，c为待定的标量。

(a) 证明$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解为该离散时间系统的平衡点$\boldsymbol{x}^*$。离散时间系统$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k))$的平衡点$\boldsymbol{x}^*$满足关系式$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$。

(b) 定义误差为$\boldsymbol{e}(k)=\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^*$。写出有关$\boldsymbol{e}(k+1)$与$\boldsymbol{e}(k)$的线性方程。

(c) 假设$|1+c\lambda_i(\boldsymbol{A})|<l$，$i=1,\cdots n$，其中$\lambda_i(\boldsymbol{A})$表示$\boldsymbol{A}$的第$i$个特征值。试证明：从任意初始估计值$\boldsymbol{x}_0$出发，该算法都收敛到$\boldsymbol{x}^*$[提示：对任意矩阵$\boldsymbol{B}$都有$\lambda_i(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})=1+\lambda_i(\boldsymbol{B})$]。

8-20 单位反馈系统的开环对象具有如下形式的传递函数：

$$G(s)=\frac{1}{s(s+2)}$$

当采用周期为1秒时，求等效数字受控对象的传递函数，并为离散时间系统设计一个比例控制器使得主导闭环极点的阻尼比$\zeta=0.7$。

8-21 编写一个根据$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$和采样周期T来计算$\boldsymbol{\Phi}$和$\boldsymbol{\Gamma}$计算机程序，可以用MATLAB，但不要用C2D。用本章介绍的关系式计算离散矩阵的MATLAB代码。用你编写的程序来计算$\boldsymbol{\Phi}$和$\boldsymbol{\Gamma}$，当：

(a) $\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$， $T=0.2\text{s}$

(b) $\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$， $T=0.2\text{s}$

8-22 考虑如下离散时间系统的状态空间形式：

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 10\end{bmatrix}u(k)$$

用状态反馈将系统所有的极点重新设置为0.5。

8-23 令

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad 和\quad \boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix}T^2/2\\ T\end{bmatrix}$$

(a) 求一个变换矩阵$\boldsymbol{T}$，使得$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Tw}$能将$\boldsymbol{w}$的状态方程化为能控标准形。

(b) 求增益$\boldsymbol{K}_w$，使得$u=-\boldsymbol{K}_w\boldsymbol{w}$得到的特征方程为$\alpha_c(z)=z^2-1.6z+0.7$。

(c) 用(a)中求得的 $\boldsymbol{T}$ 计算 $\boldsymbol{K}_z$，$\boldsymbol{K}_z$ 为由 $\boldsymbol{x}$ 的状态方程获得期望特征多项式所要求的反馈增益。

8-24　考虑一个受控对象传递函数为 $1/s^2$ 的系统，该系统有如下形式的分段常值输入：

$$u(t)=u(kT),\quad kT\leqslant t<(k+1)T$$

(a) 证明：若我们将注意力放在 kT 时刻上，$k=0,1,2,\cdots$，则相应的数据采样系统可由下述方程描述：

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\T&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}T\\T^2/2\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=[0\quad 1][x_1(k)\quad x_2(k)]^T$$

(b) 能否设计一个二阶观测器，它在 $2T$ 或更短的时间内能迫使初始状态变量估计中的误差为零。

(c) 能否只用一个一阶观测器估计初始状态？验证你的结论。

8-25　在本题中，你需要说明通过改变状态使系统矩阵为对角阵时如何计算 $\boldsymbol{\Phi}$。

(a) 取 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}$$

用无穷序列展开式计算 e^{AT}。

(b) 证明：对某非奇异变换阵 $\boldsymbol{T}$，若 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{TAT}^{-1}$，则有：

$$e^{FT}=\boldsymbol{T}e^{AT}\boldsymbol{T}^{-1}$$

(c) 证明：若

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-3&1\\-2&0\end{bmatrix}$$

则存在一个 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{TAT}^{-1}=\boldsymbol{F}$（提示：写 $\boldsymbol{TA}=\boldsymbol{FT}$，为 $\boldsymbol{T}$ 中的元素假设四个未知值并求解。然后证明 $\boldsymbol{T}$ 的列为 $\boldsymbol{F}$ 的特征变量）。

(d) 计算 e^{FT}。

第 9 章　非线性系统

非线性系统介绍

所有系统都是非线性的，当将大信号考虑进来时，更是如此。另一方面，如果是小信号，几乎所有的物理系统都能很好地用线性模型来逼近。比如说，如果 θ 很小，那么 $\sin(\theta)\approx\theta$ 且 $\cos(\theta)\approx 1$。同样地，在模拟电子设备中（如放大器），如果信号相对于输入电压来说很小，则这个操作几乎可以看作是线性的。最后，正如我们将在本章后的选读章节中考虑的问题那样，李雅普诺夫指出：如果一个系统的线性逼近在一个平衡点附近稳定，那么实际的非线性系统将在这个平衡点的某个邻域内稳定。基于所有这些理由，到目前为止本书中所谈到的分析和设计方法只考虑了各种用于线性模型的实用方法。尽管如此，如果信号使设备饱和，或系统含有那些对小信号很敏感的非线性部分（比如有些摩擦力），那么当解释系统行为时，非线性影响因素必须被考虑进来。在本章中，将会介绍一些可用来达到这个目标的工具。

全章概述

由于每一个非线性系统在许多方面都具有特殊性，所以有相当数量的方法可用于非线性控制的设计。我们在此描述的分析和设计非线性系统的方法可以分为四类。第一类是在 9.2 节中将讨论的如何把非线性问题转化成线性模型的方法。在大多数情况下，考虑小信号的逼近是适当的。在某些情况下，存在可求出其反向的非线性，且在物理非线性环节前放置该反向非线性，可使整个系统的响应呈现线性特性。但在其他情况下，通过巧妙地运用反馈，有些非线性模型可以被转化成精确的线性形式，这种技巧在机器人研究领域被称作“计算力矩法”。

第二类是一种启发式的方法，它的出发点是把非线性看作一个可变增益。9.3 节将讨论那些没有记忆性的非线性情况，比如带有一个放大器的情况，当信号增大时，放大器的输出达到饱和。这种思路认为，随着信号增大，放大器的增益是逐渐减小的。因为根轨迹(root locus)是建立在当增益变化时估计系统特征根的基础上的，这就启发我们：当输入信号的大小改变时，用根轨迹来预测系统的响应。9.4 节将论述在哪些情况下非线性将有动态性和记忆性；这时根轨迹法就不适用了。1950 年由 Kochenburger 引

入的描述方程可处理上述情况。为了应用这种方法，对系统的非线性部分施加正弦信号，并计算周期响应的一次谐波。于是，输入一输出比率可以应用，就犹如它是线性的、而不是可变的频率响应。因此，奈奎斯特图就成了研究系统行为的自然领域。

尽管这种启发式的方法对于我们深入认识系统性能或许是非常有用的，但它们不能用来判断系统的稳定性。基于此，正如在控制理论中所学习到的，我们必须转到系统稳定性的分析上。这其中最著名的理论是由李雅普诺夫提出的内稳定性。作为将系统响应看作一条空间轨迹这一思想的介绍，9.5节描述了相平面分析，然后提出了稳定性理论。最后，一些应用稳定性理论来指导控制器设计的例子被列举出来；在这些例子中，如果不改变对系统所作的初始假设，系统将保证稳定。应用这些方法，控制工程师开始踏上了有效理解和设计实际控制问题的征途。

9.1　引言和动机：为什么学习非线性系统

很显然，当信号强度在某个等级时任何物理系统都将是非线性的，而有些系统在任何信号等级上都是非线性的。另一方面，我们通过建立线性逼近模型开始我们的学习。目前我们的设计方法都是建立在“设备可以用线性传递函数来表示”这一假设之上的。在本章中我们将会给出一些理由来说明所有花在学习线性方法上的时间并不是浪费了，也将解释为什么说理解如何考虑非线性因素的影响对于控制系统的设计是非常重要的。

我们首先要展示的是，把根轨迹法（root locus technique，即把特征方程看作是可变增益的函数，画出特征方程的根的方法）和许多非线性元素可以被看作是一个随信号等级变化而变化的增益这一观察结论结合起来。尽管，在这一点上，这种方法完全是探索性的，但模拟结果表明还是非常有前景的。许多含有这种零记忆非线性元素的系统的特性可以通过在非线性点画一条随增益变化的根轨迹被预测出来。然而，正如所展示的那样，这种方法缺乏坚实的基础，设计者要自己考虑在潜伏着危机的实际空间或信号空间中是否有未研究过的区域。毕竟模型是一种近似。无论模拟的范围多么广泛，也不可能涵盖每一种情况。

继根轨迹法之后，我们转向学习基于频率响应的一些方法。频率响应的主要优点之一是在很多情况下我们能用实验方法获得实际系统的传递函数。最基本的方法之一是给系统施加一个正弦信号，然后测量输出正弦信号的振幅和相位。然而，噪声和不可避免的非线性干扰使得输出信号比一个正弦信号复杂得多，所以设计者应抽取基本的组成单元，把它当作一个整体。如果用频谱分析法来计算传递函数，也将得到同样的结果。这里所得的函数就是被 Kochenburger 称为**描述函数（describing function）**。从这种观点出发，一个描述函数可以被用来定义含有记忆功能的非线性元素。同样，这种模拟也是很有前景的，很多实用的设计正是应用了这一方法。但是，正如应用根轨迹法设计非线性系统一样，描述函数也缺乏坚实的理论基础。

因此,针对这种情况我们能做什么呢?唯一的可能就是直面事实,接受非线性。幸运的是,当李雅普诺夫出版他关于动态稳定性的著作时,一个坚实的数学基础已被建立起来。这部著作于1970年被译成法文,于1960年被Kalman和Bertram在一篇有关控制的文章中重新论述。李雅普诺夫给出了研究系统稳定性的两种方法。第一种方法是,他考虑基于线性逼近的稳定性;线性逼近在本书中是验证我们在那种方法上的注意力的合适方式。他证明了一个显著的结论:如果其线性逼近是严格稳定的,即所有的根在左半平面,那么非线性系统将在应用线性逼近的平衡点的某个邻域内稳定。此外,他还证明了另一个结论:如果线性逼近至少有一个根在右半平面,那么这个非线性系统不可能在平衡点的任何邻域内稳定。状态空间中稳定区域的大小不是来自于线性项,而是包含在用于验证的结构中,这种结构确立了他的第二种方法。李雅普诺夫的第二种方法,旨在寻找一个描述系统内能量的标量函数的数学等价形式。他证明了:如果这样一个函数被建立起来,且在运动方程轨迹上该函数的导数为负,那么该函数及它所决定的状态将最终消失,且这种状态将终止于平衡点。一个具有这些特征的函数被称作李雅普诺夫函数。当然,这种简单的描述省去了很多麻烦;比如说,稳定性的定义就有好多种。尽管如此,这个概念仍能说明如果可以找出一个李雅普诺夫函数,那么基于该函数的系统就是稳定的。正如所描述的那样,这个理论给出了稳定性的一个充分条件。如果没找出一个李雅普诺夫函数,设计者将不知道是否存在李雅普诺夫函数,或是这种研究方法是否恰当。大量的研究是直接针对寻找不同类别非线性系统李雅普诺夫函数的。

李雅普诺夫的方法是建立在一般微分方程或状态微分方程的形式上的,因此它专注于内稳定性。另一方面,频率响应法是外部度量,已经有对系统外部响应引起的稳定性结果感兴趣的研究了。这其中的一种方法就是圆判据,我们也将在这一章中讨论。这种方法可以被描述为考查在系统终端观察到的能量,并且注意能量是否总是流入终端的。如果是,有理由猜想最终所有的能量将被消耗,系统将达到稳定。为了得到这种方法的一个正式的证明,研究者们想到了用李雅普诺夫的第二种方法,但结果是以外部特征的形式表达的,比如面对非线性元素系统线性部分的奈奎斯特图。同样,这个工具为针对一类特殊非线性系统的设计方法建立了坚实的基础。

应该清楚的是,非线性控制理论是一个广泛复杂的课题,在这本书中我们只能给出其中一小部分的简短介绍。然而,控制系统设计的基础都建立在这些理论之上,设计者对这个理论理解得越多,他或她对问题的局限性和机遇就理解的越好。我们希望通过思考这些学习材料,将激发学生们以促进他们对于这一迷人课题的有价值的学习。

9.2 线性化分析

在这一节中,将介绍把非线性系统转化成合适的线性模型的三种方法。几乎所有的被选作控制过程的动态微分方程都是非线性的。另一方面,目前我们所讨论过的分

析和控制设计方法对线性模型来说比非线性模型要简单得多。**线性化**(linearization) 是指找出一个用来逼近非线性模型的线性模型的过程。幸运的是，正如李雅普诺夫在100多年前所证明的那样，如果一个小信号的线性模型在平衡点附近有效且稳定，那么存在一个区域(当然可能很小) 包含平衡点，使得非线性系统在这个区域内稳定。所以我们能放心地说这样建立一个线性模型和设计一个线性控制系统，至少在平衡点附近，我们的设计是稳定的。因此反馈控制的一个非常重要的角色是维持过程在平衡点附近变化。这种小信号线性模型通常是控制设计的起点。

用来获得一个线性模型作为控制系统设计基础的另一种可供选择的方法，是使用部分控制作用去消除非线性项，然后运用线性理论设计控制的其余部分。这种方法(通过反馈实现线性化) 在机器人领域很时兴，被称作计算力矩法。这也是飞行器设计的一个研究课题。9.2.2节将简短地介绍这种方法。最后，一些非线性函数是这种情况，即存在反向非线性同非线性的串联，以致于这种组合是线性的。这种方法经常被用于校正在使用中存在小变化的传感器(sensor) 和激励(actuator) 的微小非线性特征，正如在9.2.3节中将要讨论的。

9.2.1　小信号分析的线性化

对于一个有连续导数的平稳的非线性系统，我们可以计算出一个对小信号有效的线性模型。在很多情况下，这些模型可用以设计。一个非线性微分方程是这样一个方程，其状态的倒数和控制状态本身存在非线性关系。换句话说，微分方程不能写成如下形式①

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

但必须写成这种形式

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{9-1}$$

对于小信号线性化，我们首先决定 x_0 和 u_0 的平衡值，即$\dot{x}_0 = 0 = f(x_0,u_0)$，令 $x = x_0 + \delta x$ 和 $u = u_0 + \delta u$。

然后根据这些平衡值展开成混合形式的非线性方程，得到

$$\dot{x}_0 + \delta\dot{x} \cong f(x_0,u_0) + F\,\delta x + G\,\delta u$$

其中 F 和 G 是非线性方程 $f(x,u)$ 在 x_0 和 u_0 处的最优线性搭配(fit)，计算如下：

$$F = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x_0,u_0},\quad G = \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{x_0,u_0} \tag{9-2}$$

减去平衡解，方程简化为

$$\delta\dot{x} = F\,\delta x + G\,\delta u \tag{9-3}$$

这是一个关于平衡点的逼近运动动力学的线性微分方程。通常，符号δ被省略，且 x 和 u 是指距离平衡态的偏移值。

在目前为止本书所讨论过的模型的建立过程中，我们已经好几次遇到非线性方

---

① 该方程假设系统为时不变的。更通用的表达方式为 $\dot{x} = f(x,u,t)$。

程:例 2.5 中的钟摆,例 2.18 中的悬挂起重机,2.3 节中的 AC 感应发电机,例 2.16 中的水池流量,以及例 2.17 中的水压泵。在每种情况下,我们要么假设运动很小,要么假设从某些操作点开始的运动很小,这样就可以用线性函数来逼近非线性函数了。这些例子中的步骤本质上包括求出 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$,这是为了将微分方程线性化以转化成式(9-3)的形式。在下面的一些例子中将说明这一过程。

例 9.1　非线性钟摆的线性化

考虑例 2.5 中的简单钟摆的运动非线性方程。求系统的平衡点和相应的小信号线性模型。

解:动态方程是

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\sin\theta=\frac{T_c}{m\ell^2} \tag{9-4}$$

我们用状态变量形式重写运动方程,且 $\boldsymbol{x}=[x_1\quad x_2]^T=[\theta\quad\dot{\theta}]^T$,

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}x_2\\-\omega_0^2\sin x_1+u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(\boldsymbol{x},u)\\f_2(\boldsymbol{x},u)\end{bmatrix}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)$$

其中 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ 和 $u=\dfrac{T_c}{m\ell^2}$。为了计算平衡状态,假定(规格化)输入力矩有一个标称值 $u_0=0$,则

$$\dot{x}_1=\dot{\theta}=0$$

$$\dot{x}_2=\ddot{\theta}=-\frac{g}{\ell}\sin\theta=0$$

所以,这些平衡情况对应于 $\theta_0=0,\pi$(也就是在静止时的向下的和反向的钟摆)。平衡状态和输入分别为 $\boldsymbol{x}_0=[\theta_0\quad 0]^T$,$u_0=0$,且状态空间矩阵为:

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}&\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}&\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{x_0,u_0}=\begin{bmatrix}0&1\\-\omega_0^2\cos\theta_0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial u}\\\dfrac{\partial f_2}{\partial u}\end{bmatrix}_{x_0,u_0}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

线性系统对应于 $\theta_0=0$ 和 π 的特征值分别为 $\pm j\omega_0$ 和 $\pm\omega_0$,且正如所期望的那样,后者的反例就不稳定。

例 9.2　悬浮球运动的线性化

图 9-1 描绘了一个用于大型涡轮机械中的磁轴承。用反馈控制法来给这个磁体加电以使得轮轴总在中心且决不会碰到磁体,因此可保持一个几乎没有摩擦的水平。一个可在实验室实现的磁性轴承的简化模型如图 9-2 所示,其中一个电磁石浮起一个金属球。浮体的物理布置如图 9-3 所示。根据牛顿定律,式(2-1),悬浮球的运动方程为

$$m\ddot{x}=f_m(x,i)-mg \tag{9-5}$$

其中,力 $f_m(x,i)$ 是由电磁石的磁场引起的,理论上,来自电磁石的力按照离磁体的距离的反平方关系下降,但由于

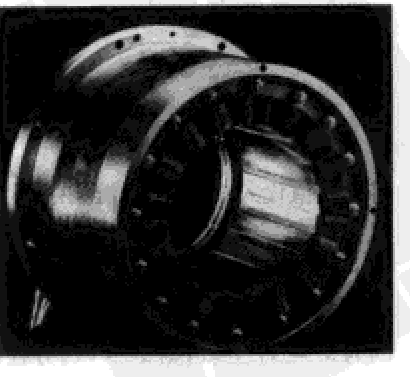


图 9-1　磁性轴承(磁性轴承的照片得到 Magnetic Bearings 公司许可)

磁场的复杂性，这个实验浮体的精确关系很难从物理学原理中得到。然而，力是可度量的。图 9-4 显示了直径为 1 cm，质量为 8.4×10^{-3} kg 的球的实验曲线。当电流 $i_2=600$ mA，图中所示的位移 x_1 时，磁力 f_m 仅抵消了重力 $mg=82\times10^{-3}$ N。（球的质量为 8.4×10^{-3} kg，且重力加速度为 9.8 m/s²。）因此点(x_1, i_2)代表一个平衡点。用这些数据，求出关于该平衡点的运动线性化方程。

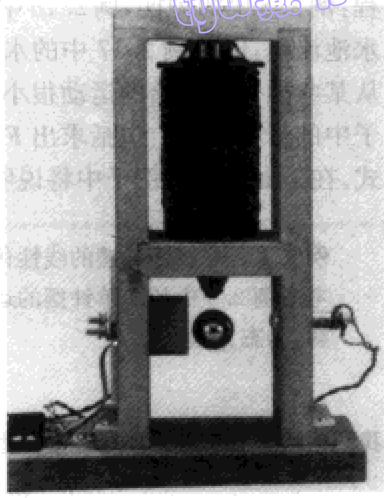


图 9-2　实验室的磁球浮体

解：首先，我们将背离平衡值 x_1 和 i_2 的力写成展开式

$$f_m(x_1+\delta x, i_2+\delta i)\cong f_m(x_1, i_2)+K_x\,\delta x+K_i\,\delta i \qquad (9\text{-}6)$$

求出的线性增益如下：K_x 是力相应于 x 沿着曲线 $i=i_2$ 的斜率，如图 9-4 所示，且其值大约为 14 N/m。K_i 是力的变化值，此时电流为固定 $x=x_1$ 时的电流值。

我们求出在 $x=x_1$ 处对于 $i=i_1=700$ mA，力大约为 122×10^{-3} N，而对于 $i=i_3=500$ mA，力大约为 42×10^{-3} N。因此，

$$K_i\cong\frac{122\times10^{-3}-42\times10^{-3}}{700-500}=\frac{80\times10^{-3}\text{N}}{200\text{mA}}\cong400\times10^{-3}\text{N/A}$$
$$\cong0.4\text{N/A}$$

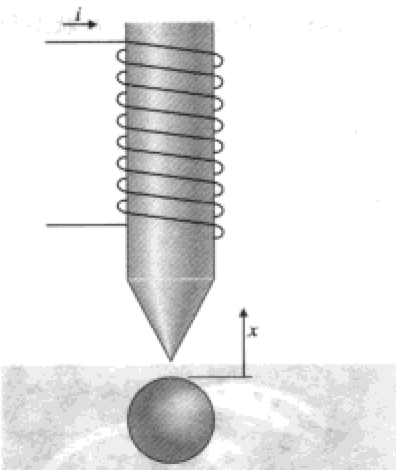


图 9-3　悬浮球的模型

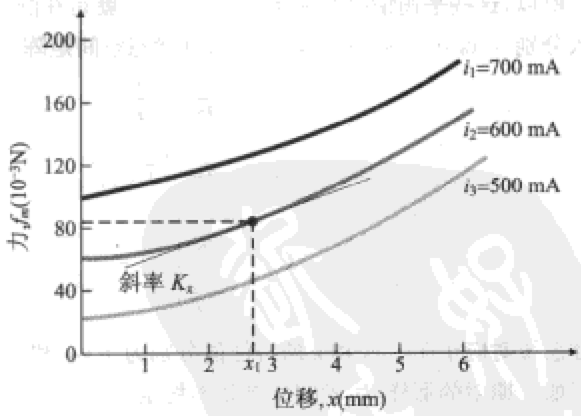


图 9-4　实验所得的力的曲线

将这些值代入式(9-6)，导出在平衡邻域中的力的线性近似如下：

$$f_m\cong82\times10^{-3}+14\,\delta x+0.4\,\delta i$$

将上式代入式(9-5)，且用质量和重力的数值，我们得到其线性化模型：

$$(8.4\times10^{-3})\ddot{x}=82\times10^{-3}+14\,\delta x+0.4\,\delta i-82\times10^{-3}$$

因为 $x=x_1+\delta x$，则 $\ddot{x}=\delta\ddot{x}$。方程以δx 的形式表达为：

$$(8.4\times10^{-3})\,\delta\ddot{x}=14\,\delta x+0.4\,\delta i$$
$$\delta\ddot{x}=1667\,\delta x+47.6\,\delta i \qquad (9\text{-}7)$$

这就是关于平衡点的理想运动线性化方程。一个逻辑状态向量为 $\boldsymbol{x}=[\delta x\quad \delta\dot{x}]^T$，导出标准矩

阵为：

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1667 & 0\end{bmatrix} \quad 和 \quad G=\begin{bmatrix}0\\ 47.6\end{bmatrix}$$

且控制为 $u=\delta i$。

例 9.3　再看水箱的线性化

用本节所阐述的概念重做例 2.16 的线性化。

解：式(2-68) 可写作：

$$\dot{x}=f(x,u) \tag{9-8}$$

其中，$x\stackrel{\Delta}{=}h, u\stackrel{\Delta}{=}w_{in}$ 且

$$f(x,u)=-\frac{1}{RA\rho}\sqrt{p_1-p_a}+\frac{1}{A\rho}w_{in}=-\frac{1}{RA\rho}\sqrt{\rho gh-p_a}+\frac{1}{A\rho}w_{in}$$

线性化方程为：

$$\delta\dot{x}=F\,\delta x+G\,\delta u \tag{9-9}$$

其中，

$$[F]_{x_o,u_o}=\frac{\partial f}{\partial x}=\left[\frac{\partial f}{\partial h}\right]_{h_o,u_o}=\frac{\partial}{\partial h}\left[-\frac{1}{RA\rho}\sqrt{\rho gh-p_a}\right]_{h_o,u_o} \tag{9-10}$$

$$=-\frac{g}{2AR}\frac{1}{\sqrt{\rho gh_o-p_a}}=-\frac{g}{2AR}\frac{1}{\sqrt{p_o-p_a}} \tag{9-11}$$

且，

$$[G]_{x_o,u_o}=\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial w_{in}}=\frac{1}{A\rho} \tag{9-12}$$

然而，注意到为了维持系统的平衡，要求有一定的流量，所以式(9-9) 是有效的；特别地，我们可以从式(2-68) 看出

$$u_o=w_{in_o}=\frac{1}{R}\sqrt{p_o-p_a},\qquad \dot{h}=0 \tag{9-13}$$

且式(9-9) 中的 δu 为 δw_{in}，其中 $w_{in}=w_{in_o}+\delta w_{in}$。因此，式(9-9) 变成

$$\delta\dot{h}=F\,\delta h+G\,\delta w_{in}=F\,\delta h+Gw_{in}-G\frac{1}{R}\sqrt{p_o-p_a} \tag{9-14}$$

这个结果与前面的式(2-71) 一致。

9.2.2　通过非线性反馈进行线性化

采用反馈的线性化，是通过减去运动方程中的非线性项，并将它们加到控制上而实现的。所得结果是一个线性系统，该系统证明了计算机实现的控制有足够的能力来快速地计算非线性项且其得到的控制不会引起执行器饱和。若要更深入地理解这种方法，可通过下面的例子。

例 9.4　非线性单摆的线性化

考虑例 2.5(式(2-21)) 中的简单单摆的方程，用非线性反馈进行系统的线性化。

解：运动方程为

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = T_c \tag{9-15}$$

若我们计算转矩

$$T_c = mgl\sin\theta + u \tag{9-16}$$

则运动可描述为

$$ml^2\ddot{\theta} = u \tag{9-17}$$

不论 θ 角如何变化，式(9-17) 都是一个线性方程。我们把它作为控制设计的模型，因为它让我们可以运用线性分析的方法。得到的线性控制将在测量 θ 的基础上提供 u 的值；然而，实际送达平衡的转矩值将来自式(9-16)。对于有两个或三个硬性链接的机器人，这个计算所得的转矩近似可产生有效控制。在航天器的控制中也有这种研究，其中线性模型为适合飞行体制作了相当大的改变。

9.2.3　通过反向非线性进行线性化

在控制设计中引入非线性的最简单的情况是**反向非线性**(**inverse nonlinearity**)的情况。有时将某些非线性的作用反过来是可能的。例如，假定我们有一个系统，输出是我们所感兴趣信号的平方：

$$y = x^2 \tag{9-18}$$

一个聪明且相当明显的方法是，在物理非线性到来之前采用平方根非线性来消除系统的非线性，

$$x = \sqrt{(.)} \tag{9-19}$$

这将在下个例子中得到演示。因此整个级联系统将是线性的。

例 9.5　快速热处理系统的线性化

考虑用一个非线性灯作为执行器的快速热处理系统(RTP)，如图 9-5 所示。假定进入灯的输入是电压 V，且输出为功率 P，它们的关系为

$$P = V^2$$

设计一个反向非线性来线性化系统。

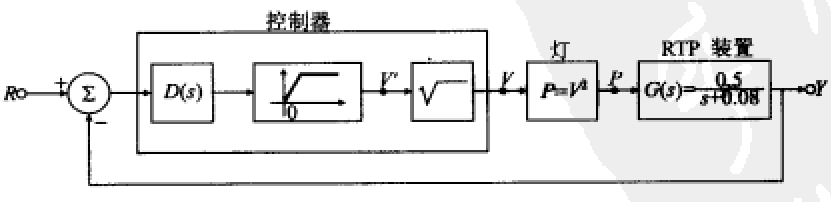


图 9-5　通过反向非线性实现线性化

解：我们仅仅在电灯输入非线性前取一个非线性的平方根

$$V = \sqrt{V'}$$

现在，整体开环层叠系统对于电压的任何值都是线性的：

$$Y = G(s)P = G(s)V^2 = G(s)V'$$

因此，我们可以用线性控制设计方法来设计动态补偿 $D(s)$。注意到，一个非线性元素被插入在平

方根元素前，以确保这个方框的输入总是非负的。控制器的实现如图 9-5 所示。关于这种控制设计方法的更具体的应用，我们建议读者参考 10.6 节的 RTP 实例的学习。

9.3 用根轨迹法进行等效增益分析

正如我们努力要弄清楚的，每个实际控制系统都是非线性的；目前我们所讨论的线性分析和设计方法都是用线性逼近来取代实际模型。但有一类重要的非线性系统，对它进行线性化是不恰当的，但是做一些有意义的分析（和设计）还是可以的。这类系统包括不含有动态非线性项且其非线性可以用一个随着输入信号大小变化而变化的增益来很好地逼近的系统。图 9-6 列出了一些这样的非线性系统元素及他们通常的名称。

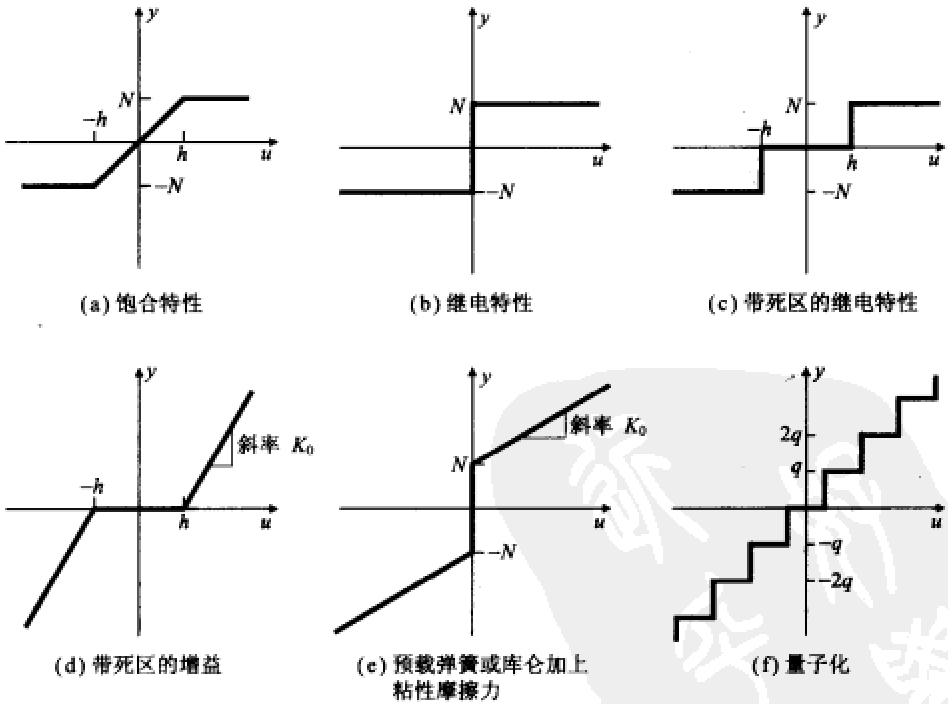


图 9-6 不带动态项的非线性元素

带有无记忆非线性项的系统的稳定性可以用根轨迹法进行启发式的学习。方法是用一个等效增益 K 来替换无记忆非线性项，且相对于这个增益画出一条根轨迹。对于输入信号幅度的一个区间，等效增益也将在一个区间内取值；且如果增益固定，则闭环系统的根也将在这个区间内。以下的一些例子将证明这一点。

例 9.6　变超调量和饱和非线性

考虑图 9-7 所示的带饱和的系统。用根轨迹法求系统的稳定特性。

解：图 9-8 给出了带有饱和消除的系统相对于 K 的根轨迹。当 $K=1$ 时，阻尼比为 $\zeta=0.5$。当增益减小的时候，根轨迹表明这些根以越来越小的阻尼移向 s 平面的原点。系统阶跃响应曲线可用 Simulink 程序来获得。将一系列的阶跃输入 r 引入系统，其幅值为 $r_0=2,4,6,8,10$ 和 12；所得结果如图 9-9 所示。只要进入饱和的信号小于 0.4，系统将是线性的，且其行为与当阻尼比为 $\zeta=0.5$ 时一致。然而，注意到，当输入增大时，响应呈现出更大的超调量和更慢的恢复时间。这种现象可以得到解释：注意到越来越大的输入信号对应于越来越小的有效增益 K，如图 9-10 所示。从图 9-8 中的根轨迹，我们看出当 K 下降时，闭环极点移向离原点更近的地方且阻尼比 ζ 更小。这导致更长的上升和稳定时间，增加的超调量和更大的震荡响应。

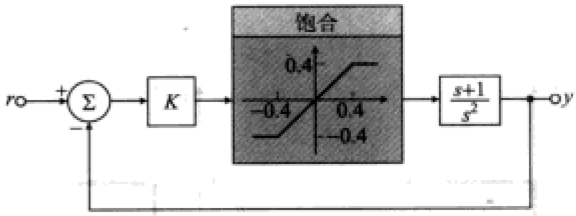


图 9-7　带饱和的动态系统

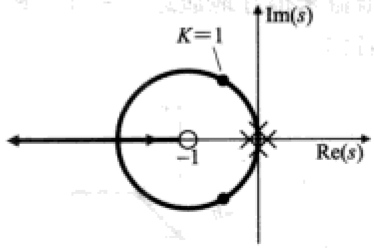


图 9-8　如图 9-7 所示的带饱和消除的系统 $(s+1)/s^2$ 的根轨迹

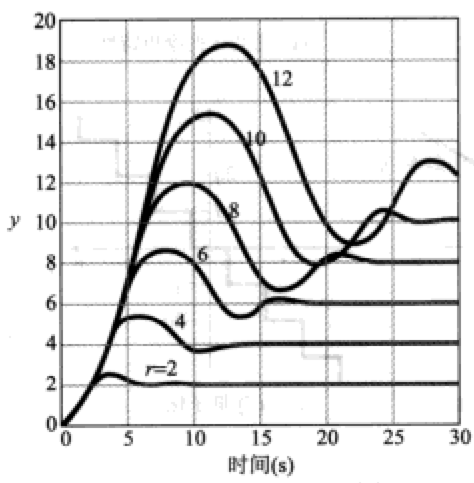


图 9-9　图 9-7 中的系统对不同阶跃输入的阶跃响应

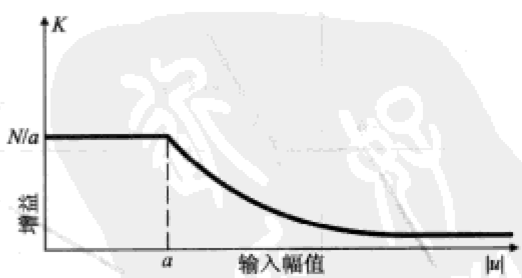


图 9-10　饱和的有效的一般形状

例 9.7　用根轨迹法求有条件稳定系统的稳定性

作为用信号相关增益描述非线性响应的第二个例子，考虑如图 9-11 所示的带饱和非线性的系统。判断系统是否稳定。

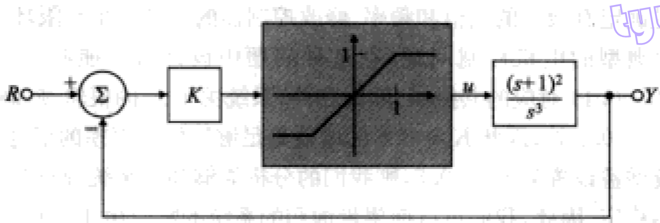


图 9-11 一个有条件稳定系统的框图

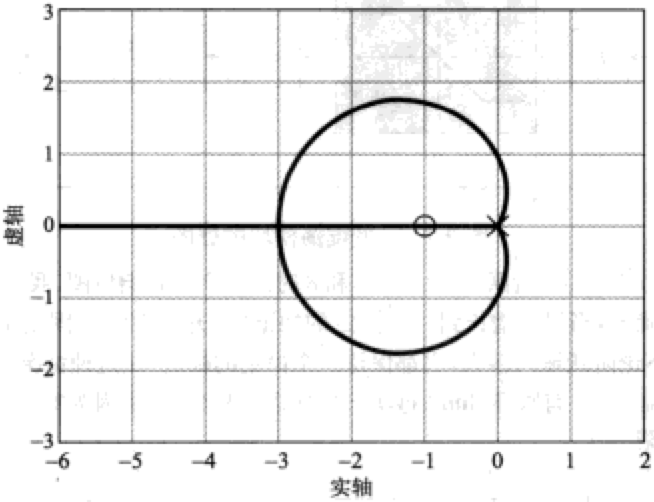


图 9-12 图 9-11 中的系统 $G(s)=(s+1)^2/s^3$ 的根轨迹

解:除饱和外,系统的根轨迹,画在图 9-12 中。从这个轨迹我们可以容易地计算出当$\omega_0=1$和 $K=1/2$ 时与虚轴的交点。这样的系统,即对相对大的增益是稳定的但对更小的增益则不稳定的系统,称为**有条件的稳定系统(conditionally stable system)**。若 $K=2$,对应于轨迹上 $\zeta=0.5$,系统的期望响应与 $\zeta=0.5$ 对小参考输入信号的响应一致。然而,当参考输入增大时,其等效增益将由于饱和特性而变得更小,且系统将会较弱的好阻尼。最后,当输入大信号时,系统将在一些点处变得不稳定。图 9-13 显示了当输入阶跃 $r_0=1.0, 2.0, 3.0$ 和3.4 时,$K=2$ 的系统的非线性模拟的阶跃响应。这些响应证实了我们的预言。此外,边际稳定的情况表明震荡接近 1 rad/s,这是可以从根轨迹与 RHP 的交点的频率预测到的。

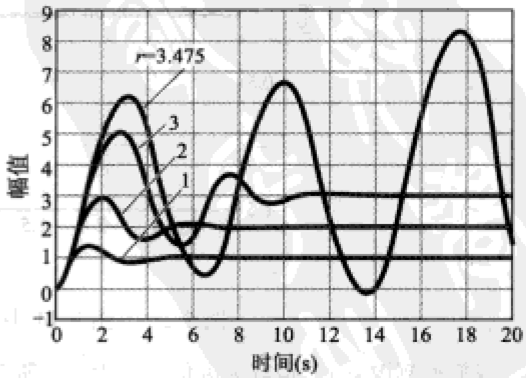


图 9-13 图 9-11 中的系统的阶跃响应

例 9.8 用根轨迹分析和设计带有限环的系统

使用根轨迹定性地描述非线性系统响应的最终图示说明,是基于如图 9-14 所示的框图的。判

断系统是否稳定，且确定有限环的幅值和频率。修改控制器的设计使得有限环的震荡影响最小。

解：这个系统是典型的电机控制问题，在这种问题中设计者可能起初不知道分母项 $s^2+0.2s+1$，($\omega=1,\zeta=0.1$) 对应的共振模。除饱和外，系统关于 K 的根轨迹，画在图 9-15 中。虚轴的交点在 $\omega_0=1,K=0.2$ 处；因此 $K=0.5$ 的增益是足够迫使共振模的根进入 RHP 的，在图中用点表示。如果系统增益设置为 $K=0.5$，则我们的分析能够预测系统：起初不稳定，但是随着增益的下降，系统变得稳定。因此，我们可以期望带饱和的系统的响应由于不稳定性而增大，直到幅值充分大使得有效增益降至 $K=0.2$，然后停止增长。

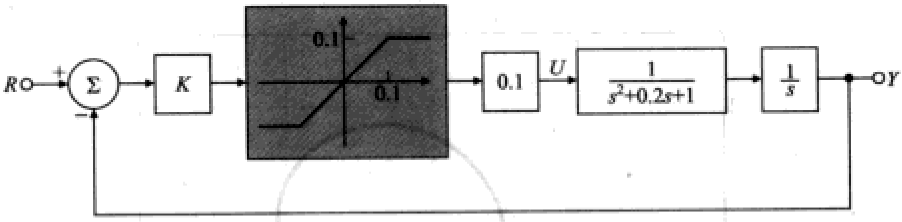


图 9-14 带震荡模块的框图

图 9-16 给出了 $K=0.5$，阶跃为 $r_0=1,4$ 和 8 时的三个阶跃响应图。我们的启发式分析再一次被证明是完全正确的：当误差增长到一个固定的幅值时，开始在一个固定值处震荡。震荡的频率约为 1 rad/s，且不论阶跃输入多大，它都保持一个恒定的幅值。在这种情况下，响应总是到达一个固定幅值的周期解 —— **有限环(limit cycle)**，之所以这样命名，是因为响应是环状的，且当时间增大时响应达到极限。

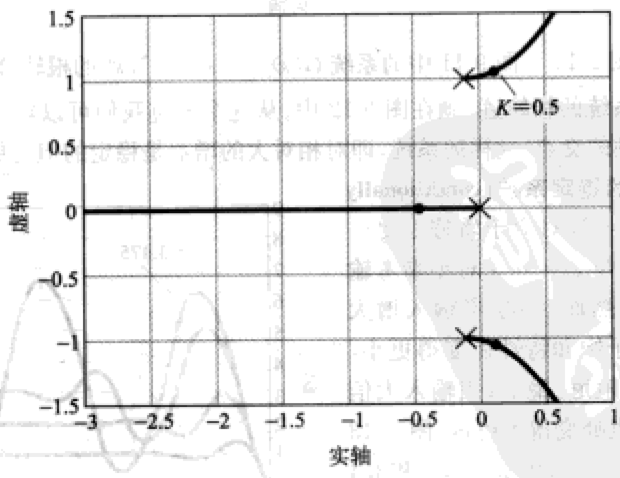


图 9-15 图 9-14 中所示系统的根轨迹

我们回到图 9-13，很容易确信幅值为 3 的阶跃输入一阶瞬态近似一条正弦曲线。我们可以预测到当根轨迹与右半平面相交时，系统处在稳定的边界，这时等效增益响应对应于 1/2 的根轨迹增益。为了防止有限环的出现，用补偿来修改根轨迹以保证没有分支进入右半平面。针对一个轻阻尼振荡模式，一个通常的方法是于某一个频率出在极点附件设置补偿零点，以实现根轨迹分支偏离这些极点的角度朝向左半平面，即早期被称作相位稳定的过程。关于配置机械运动的例 5.7

证明了:以这种方式定位的一对零-极点将经常导致轨迹分支从极点出发到达零点,绕向左,且因此远离 RHP。图 9-17 给出了系统 $1/[s(s^2+0.2s+1.0)]$ 的根轨迹图,包含一个带有定位零点的**陷波补偿(notch compensation)**,正如刚讨论过的一样。另外,该补偿还包括使得补偿能够物理实现的两个极点。在这种情况下,两个极点都位于 $s=-10$,它们快到不会引起系统的稳定性问题,但慢到高频噪声将不会被放大太多。因此,用于根轨迹的补偿为:

$$D(s)=123\frac{s^2+0.18s+0.81}{(s+10)^2}$$

其中,增益值 123 是选来使补偿的直流增益等于单位 1 的。这个陷波滤波器补偿能将输入减弱在 $\omega_n^2=0.81$ 或 $\omega_n=0.9\text{rad/s}$ 的领域内。

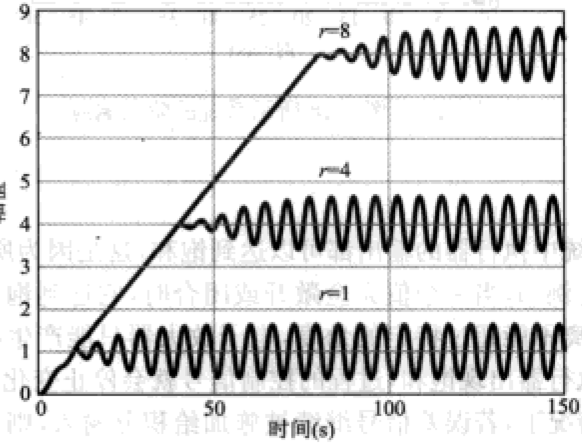


图 9-16 图 9-14 中所示系统的阶跃响应

所以任何来自对象共振的输入都被削弱了,也因此防止了其对系统稳定性的减损。图 9-18 显示了包括凹性滤波器的系统,图 9-19 给出了这两个阶跃输入的时间响应。这两个输入,$r_0=2$ 和 4,都充分大,使得非线性在初始时刻就达到饱和;然而,因为系统是无条件稳定的,所以饱和仅导致增益的降低,这正如我们通过分段线性分析法所预计的。在两种情况下,非线性最终变为不饱和,且系统稳定于其新的期望值 r。

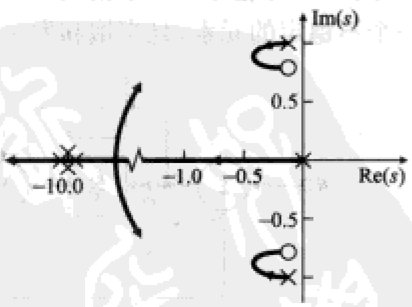


图 9-17

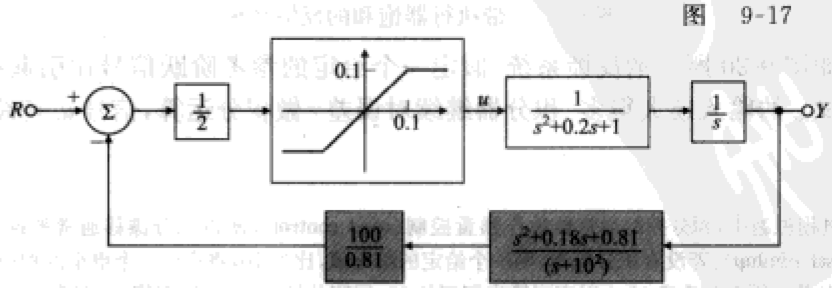


图 9-18 带凹性滤波器的系统框图

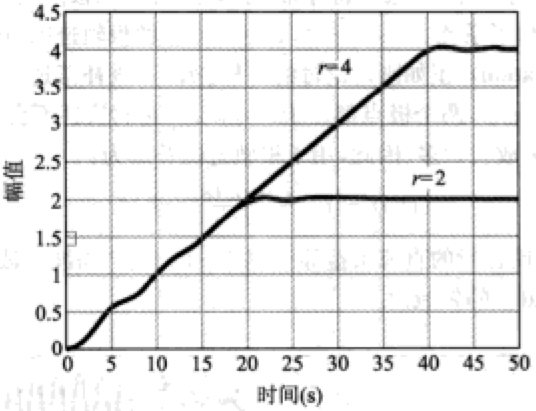


图 9-19 图 9-18 所示系统的阶跃响应

积分器抗漂移

在任何控制系统中执行器的输出都可以达到饱和，这是因为所有实际执行器的动态区间都是有限的。例如，当一个值完全敞开或闭合时，它达到饱和；航天器的操纵面从其标称位置的偏离不能超过特定的角度，电子放大器只能产生有限的电压输出，等等。不论什么时候执行器出现饱和，过程的控制信号就会停止变化，且反馈回路也有效地敞开了。在这些情况下，若误差信号继续被施加给积分输入，则积分输出将增加（漂移）直到误差信号变化，且积分作用回转。随着输出增加以致于产生必要的回溯误差时，这结果可能导致一个很大的超调量和很差的瞬态响应。在开环中，实际上积分器是一个不稳定的元素，且当饱和发生时，又必须使其稳定①。

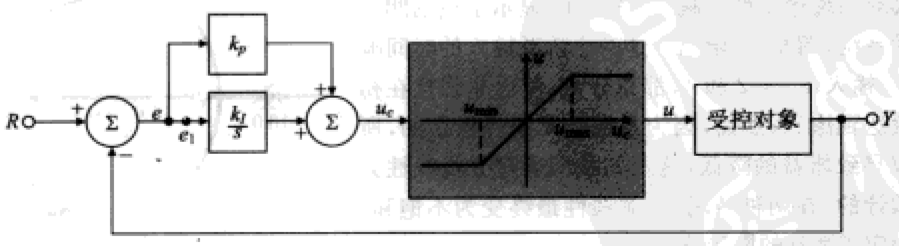


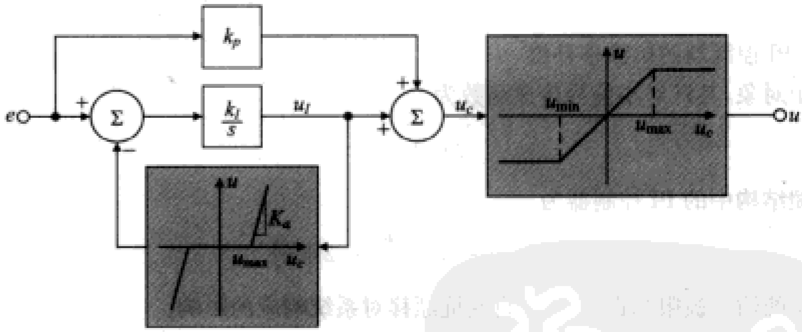
图 9-20 带执行器饱和的反馈系统

考虑如图 9-20 所示的反馈系统。假定一个给定的参考阶跃信号比引起执行器达到饱和值 u_{max} 的输入还大得多。积分器继续对误差 e 做积分运算，信号 u_c 持续增大。然

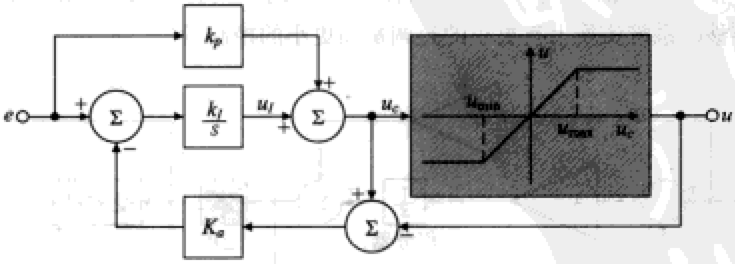
① 在过程控制中，积分控制通常被称作预置控制(reset control)，所以积分漂移通常被称作预置漂移(reset windup)。若没有积分控制，则一个给定的给定值，比如 10，将产生一个更小的响应，比如 9.9。操作者必须重新设置 10.1 以实现输出期望的 10。用积分控制，对于给定值 10，控制器可以自动输出 10；因此，积分器是自动预置的。

而，受控对象的输入被锁定在其最大值，即 $u=u_{max}$，所以误差仍然很大，直到受控对象的输出超出参考值，误差值改变符号。而 u_c 的增加是不利的，因为进入受控对象的输入没有变化，但如果饱和持续很长一段时间，u_c 可能会变得非常大。这将导致一个相当大的负误差 e，而且产生的很差的瞬态响应将把积分器输出带回到控制不饱和的线性段。

这个问题的解决办法就是一个**积分器抗漂移**（**integrator antiwindup**）电路，当执行器饱和时，它可以"关掉"积分作用。（若控制器是用数字电路实现的，则用逻辑很容易实现这个功能，即通过包括一个像"if $|u|=u_{max}$, $k_I=0$"的语句，参看第 8 章。）图 9-21a 和图 9-21b 给出了给一个 PI 控制器配置的两个等效的抗漂移方案。图 9-21a 所示的方法更容易理解一些，而图 9-21b 所示的方法更容易实现，因为它不需要一个独立的非线性项而只是利用饱和本身。[①] 在这些方案中，只要执行器饱和，积分器附近的反馈回路就开始激活，且保持在 e_1 处的积分器输入较小。这时，积分器本质上变成了一个快速的一阶滞后。为了看出这一点，注意到我们重画图 9-21a 中从 e 到 u_c 这部分的方框，如图 9-21c 所示。则积分器变成了图 9-21d 所示的一阶滞后。抗漂移增益 K_a 应选得足够大，以使得抗漂移电路在所有误差情况下保持进入积分器的输入都很小。



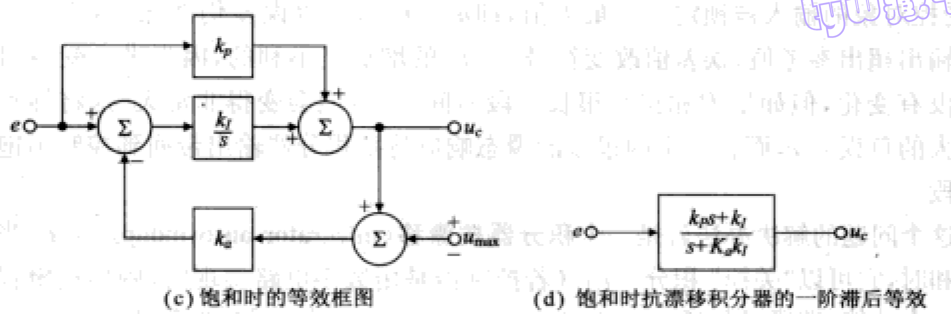
(a) 带抗漂移的PI控制器



(b) 带单非线性的抗漂移实现

图 9-21 积分抗漂移方法

① 在某些情况下，尤其是带机械执行器的，比如航天器操纵面或流量控制阀，是不令人满意的，可能会给物理设备的停止冲击造成损坏。在这样的情况下，通常的做法是包含一个比物理设备有更低限制的电子饱和装置，于是系统就能在物理设备饱和前达到电气上的停止。



(c) 饱和时的等效框图　　　(d) 饱和时抗漂移积分器的一阶滞后等效

图 9-21 （续）

抗漂移的作用是在反馈系统中降低超调量和控制量。这种抗漂移方案的实现，在任何实际的积分控制应用中都是必须的，忽略这种方法可能导致系统响应的严重退化。从稳定性的角度来说，饱和的作用是打开反馈回路并将留下的常量输入的开环对象和控制器当作以系统误差为输入的开环系统。

抗漂移的目的是当主环被信号饱和打开时，提供一个局部的反馈来仅仅使得控制器稳定，且任何实现这个功能的电路都将具有与抗漂移相同的表现。①

例 9.9　PI 控制器的抗漂移补偿

考虑一个对象，其针对小信号传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s}$$

且在单位反馈结构中的 PI 控制器为

$$D_c(s)=k_p+\frac{k_I}{s}=2+\frac{4}{s}$$

受控对象的输入被限制在 ±1.0。研究抗漂移对系统响应的影响。

解：假定我们用一个反馈增益为 $K_a=10$ 的抗漂移电路，如图 9-22 所示的 Simulink 框图所示。图 9-23a 给出了系统有抗漂移元素和没有抗漂移元素时的阶跃响应。图 9-23b 给出了相应的控制量。注意，带抗漂移的系统实质上有更小的超调量和更小的控制量。

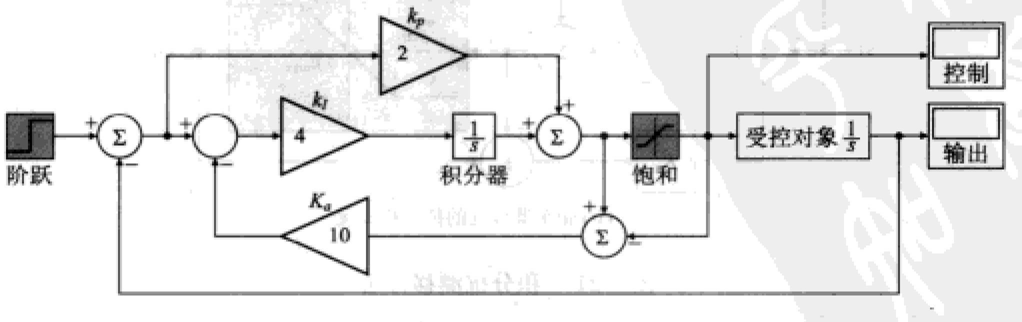


图 9-22　抗漂移的例子

① 一个更复杂的方案可能会在比强加给执行结构更低的饱和级别上使用抗漂移反馈，所以 PD 控制将在积分控制停止后仍继续一段时间。任何这样的方案都需要仔细的分析，以平局它的性能并保证其稳定性。

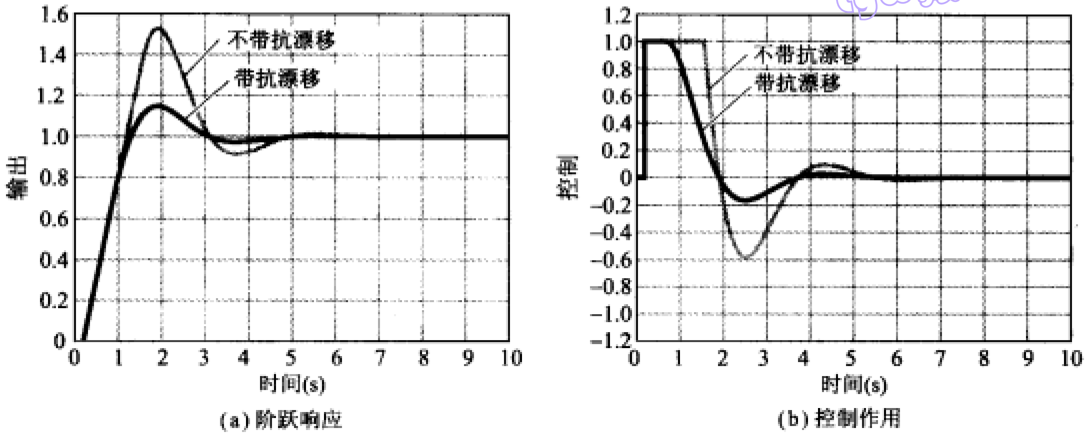


图 9-23 积分器抗漂移

9.4 用频率响应分析等效增益:描述函数

如图 9-6 所示,包含任何非线性的系统行为都可以通过把非线性元素看作一个可变的信号相关增益来等效地描述。例如,带饱和元素的情况(如图 9-6a 所示),很显然,对于幅值小于 h 的输入信号,带有增益 N/h 的非线性可看作是线性的。然而,对于大于 h 的信号来说,输出的大小被 N 限制,而输入的大小可以比 h 大得多;所以,一旦输入超过 h,输出一输入比就会下降。因此,饱和具有图 9-10 所示的增益特性。所有执行器都会达到某种程度的饱和。若这些执行器没有达到饱和,则它们的输出将无限增长,这在物理上是不可能的。控制系统设计的一个重要方面是**筛分执行器(sizing the actuator)**,这意味着选择执行器的大小、重量、所要求的功率,成本和设备的饱和程度。通常,越高的饱和程度,就要求越大、越重且更贵的执行器。从控制的角度来说,筛分执行器的关键因素是饱和对控制系统性能的影响。

一种非线性分析方法 —— **描述函数(describing function)**,建立在假设非线性部分的输入为正弦曲线的基础上,它可以用于预测一类非线性系统的性能。非线性元素没有传递函数。然而,对某一类非线性元素,为了分析的方便,用一个频率相关等效增益来代替非线性部分是可能的。这样,我们就能研究环的特性了,比如其稳定性。描述函数法通常是一种启发式的方法,它旨在尝试着为非线性元素求出一个类似于传递函数的东西。这种思想是,作为对正弦激励的响应,大多数非线性元素会产生一个周期信号(不一定是正弦信号),其频率是输入频率的谐波。因此,可以把描述函数看作是频率响应对非线性的扩展。我们假定在许多情况下可以仅用一阶谐波来逼近输出,其余部分可以被忽略。这个基本的假设意味着,对象的行为可逼近为一个低通滤波器,且幸运的是,在大多数实际情况中这是一个很好的假设。描述函数背后隐藏的其他假设是:非线性是时变的且系统中存在一个单一的非线性元素。的确,描述函数是更复杂的谐波平衡分析的一个特殊情况。

它可追溯至苏联及其他的早期研究。该方法是 Kochenburger1950 年在美国介绍的。他建议用傅里叶级数定义一个等效增益 K_{eq}（Truxal，1995，第 566 页）。这种思想在实际中被证明是非常有用的。尽管这种方法是启发式的，但人们也做了一些试图创建这种方法的理论依据的尝试（Bergen 和 Franks，1997；Khalil，2002；Sastry，1999）。事实上，这种方法比现存理论所证明的更有用。

考虑图 9-24 所示的非线性元素 $f(u)$。若输入信号 $u(t)$ 为振幅为 a 的正弦信号，或

$$u(t)=a\sin(\omega t) \tag{9-20}$$



图 9-24　非线性元素

则输出信号 $y(t)$ 将是周期性的，其基本周期等于输入的基本周期，因此用傅里叶级数描绘为：

$$\begin{aligned} y(t) &= a_0+\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cos(i\omega t)+b_i\sin(i\omega t) \\ &= a_0+\sum_{i=1}^{\infty}Y_i\sin(i\omega t+\theta_i) \end{aligned} \tag{9-21}$$

其中，

$$a_i=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y(t)\cos(i\omega t)\mathrm{d}(\omega t) \tag{9-22}$$

$$b_i=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y(t)\sin(i\omega t)\mathrm{d}(\omega t) \tag{9-23}$$

$$Y_i=\sqrt{a_i^2+b_i^2} \tag{9-24}$$

$$\theta_i=\tan^{-1}\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \tag{9-25}$$

Kochenburger 建议：非线性元素可以用这个级数的第一个基本成分来描述，就好像它是增益为 Y_1、相位为 θ_1 的线性系统。若振幅可变，那么因为元素的非线性特性，所以傅里叶系数和相应的相位将会作为输入信号振幅的函数变化。他称这种逼近为一个**描述函数**（DF）。描述函数被定义为一个（复杂的）数量，即非线性元素输出的基本成分的振幅对正弦输入信号的比，其本质上是一个"等效频率响应"函数：

$$\mathrm{DF}=K_{eq}(a,\omega)=\frac{b_1+\mathrm{j}a_1}{a}=\frac{Y_1(a,\omega)}{a}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}=\frac{Y_1(a,\omega)}{a}\angle\theta_1 \tag{9-26}$$

因此，描述函数只定义在 $\mathrm{j}\omega$ 轴上。在存在无记忆的非线性部分时，也即为一个奇函数［如，$f(-a)=-f(a)$］，傅里叶级数余弦项的系数都为零，且其描述函数仅为

$$\mathrm{DF}=K_{eq}(a)=\frac{b_1}{a} \tag{9-27}$$

其独立于频率 ω。这是控制中的通常情况，饱和、滞后和死区都会产生这种描述函数。如图 9-6 所示，描述函数的非线性特性的计算是简单而繁琐的。它要么可解析或数字实现，要么可能由一个实验决定。我们现在将重点放在一些很常用的非线性元素的描述函数的计算上。

例 9.10　饱和非线性的描述函数

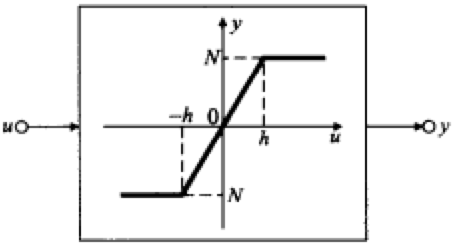
一个饱和非线性如图 9-25a，这是控制系统最常见的非线性。该饱和函数被定义为：

$$\operatorname{sat}(x)=\begin{cases}+1, & x>1\\ x, & |x|\leqslant 1\\ -1, & x<-1\end{cases}$$

如果线性区域的斜率为 k，且饱和最终值为 $\pm N$，则函数为

$$y=N\operatorname{sat}\left(\frac{k}{N}x\right)$$

求出这个非线性的描述函数。



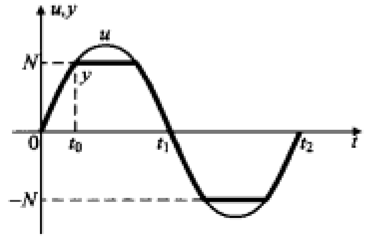


图 9-25

解：考虑图9-25所示的饱和元素的输入和输出信号。对于一个振幅 $a\leqslant\frac{N}{k}$ 的输入正弦信号 $u=a\sin\omega t$，输出是这样的：DF 只是一个单位增益。当 $a\geqslant\frac{N}{k}$ 时，我们需要计算输出的基本成分的振幅和相位。因为饱和是一个奇函数，式(9-21)中所有的余弦项都为零且 $a_1=0$。根据式(9-27)

$$K_{eq}(a)=\frac{b_1}{a}$$

所以，

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}N\operatorname{sat}\left(\frac{k}{N}a\sin\omega t\right)\sin\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)$$

因为系数 b_1 在区间 $\omega t=[0,\pi]$ 内的积分是其在区间 $\omega t=[0,\pi/2]$ 内积分的两倍，所以，

$$b_1=\frac{4N}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sat}\left(\frac{k}{N}a\sin\omega t\right)\sin\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)$$

我们现在可以将积分分成相应的线性部分和饱和部分。我们定义饱和时间 t_s 为当下式成立的时间：

$$t_s=\frac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(\frac{N}{ak}\right)\quad 或\quad \omega t_s=\sin^{-1}\left(\frac{N}{ak}\right)\tag{9-28}$$

则，

$$\begin{aligned}b_1&=\frac{4N\omega}{\pi a}\left(\int_0^{\omega t_s}\operatorname{sat}\left(\frac{k}{N}a\sin\omega t\right)\sin\omega t\,\mathrm{d}t+\int_{\omega t_s}^{\frac{\pi}{2}}\sin\omega t\,\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{4N\omega}{\pi a}\left(\int_0^{\omega t_s}\frac{k}{N}a\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t+\int_{\omega t_s}^{\frac{\pi}{2}}\sin\omega t\,\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{4N\omega}{\pi a}\left(\int_0^{\omega t_s}\frac{k}{2N}a(1-\cos2\omega t)\mathrm{d}t+\int_{\omega t_s}^{\frac{\pi}{2}}\sin\omega t\,\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{4N\omega}{\pi a}\left(\frac{k}{2N}at\Big|_0^{t_s}-\frac{k}{2N}a\sin2\omega t\Big|_0^{t_s}-\frac{1}{\omega}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos t_s\right)\right)\end{aligned}$$

但利用式(9-28)，我们有

$$\sin\omega t_s = \frac{N}{ka} \quad \text{和} \quad \cos\omega t_s = \sqrt{1-\left(\frac{N}{ka}\right)^2}$$

最终得到

$$K_{eq}(a) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(k\sin^{-1}\left(\frac{N}{ak}\right)+\frac{N}{a}\sqrt{1-\left(\frac{N}{ka}\right)^2}\right) & , \frac{ka}{N}>1 \\ k & , \frac{ka}{N}\leqslant 1 \end{cases} \tag{9-29}$$

图9-26所示的$K_{eq}(a)$图表明它是一个独立于频率的实函数，并没有产生相移。可以看出，描述函数最初为一个常数，然后作为输入信号振幅a倒数的一个函数逐渐衰减。

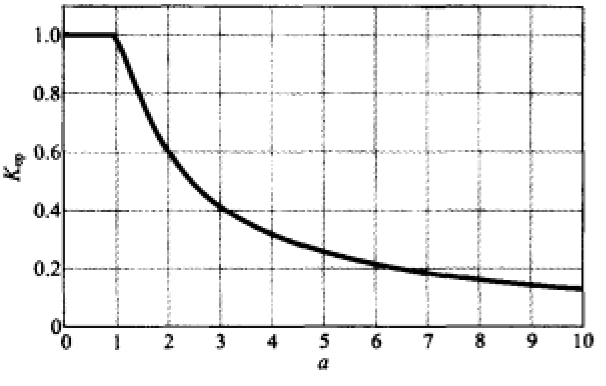


图9-26　$k=N=1$的饱和非线性的描述函数

例9.11　滞后非线性的描述函数

求图9-6b所示的滞后或sgn函数的描述函数，且定义

$$\mathrm{Sgn}(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ x\text{的符号} & \text{其他} \end{cases}$$

解：对每个尺度的输入来说，输出是振幅N的一个方波；因此$Y_1=\frac{4N}{\pi}$且$K_{eq}(a)=\frac{4N}{\pi a}$。如果我们令$k\to\infty$，则也可以从式(9-29)中得到解。对小角度值来说

$$\sin^{-1}\left(\frac{N}{ak}\right)\simeq\frac{N}{ak}$$

于是从式(9-27)，我们有

$$K_{eq}(a)=\frac{2}{\pi}\left(k\left(\frac{N}{ak}\right)+\frac{N}{a}\right)=\frac{4N}{\pi a} \tag{9-30}$$

前两个非线性是无记忆的。下面我们考虑一个带记忆的非线性。带记忆电路的非线性存在于许多应用，包括磁性记录设备，机械系统的间隙和各种电子电路中。考虑如图9-27所示的双稳态电子电路，即被称作施密特触发器(Sedra和Smith，1991)，该电路具有记忆功能。参考图9-28，如果电路处在$v_{out}=+N$的状态，则v_{in}的正值不会改变这种状态。为了"触发"电路至$v_{out}=-N$的状态，我们必须使v_{in}达到足够的负值，才能使得v变负。其阈值值为$h=\frac{NR_1}{R_2}$。施密特触发电路通常应用于太空船的控制(bryson，

1994)。我们接下来求解一个迟滞非线性的描述函数。

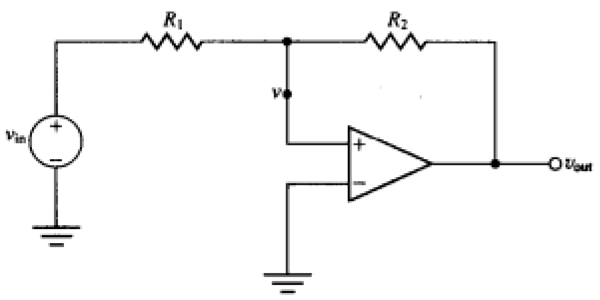


图 9-27 施密特触发电路

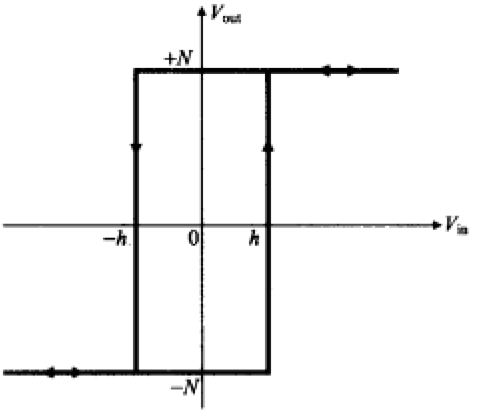
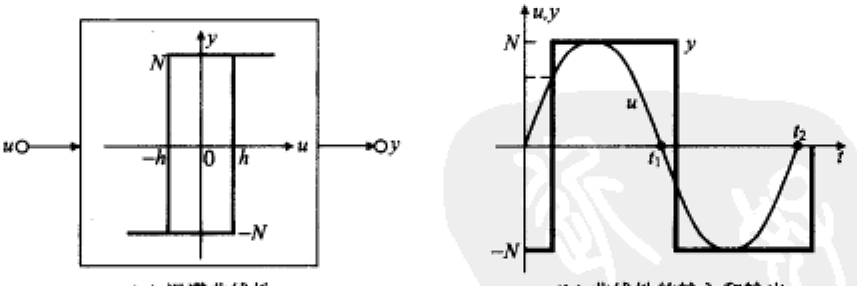


图 9-28 施密特触发电路的迟滞非线性

例 9.12 带迟滞非线性的滞后环节的描述函数

考虑图 9-29a 所示的带迟滞的滞后函数，求这个非线性的描述函数。

解：带迟滞的系统趋向于停留在当前的状态。要在不知道其历史的情况下确定输出的唯一值时不可能的，除非符号函数的输入越过值 h。这意味着我们有一个带记忆的非线性。只要输入的振幅 a 大于磁滞值 h，输出就是振幅 N 的一个方波。



(a) 迟滞非线性 (b) 非线性的输入和输出

图 9-29

从图 9-29b 可以看出方波在时间上滞后于输入。滞后时间可以由下计算：

$$a\sin\omega t = h \qquad 或 \qquad \omega t = \sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right) \tag{9-31}$$

因为所有频率的相位角都已知，所以

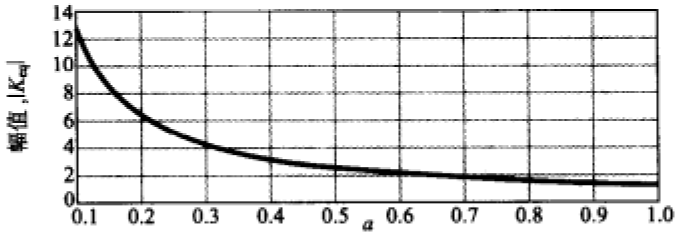
$$K_{eq}(a) = \frac{4N}{\pi a}\angle -\sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right) = \frac{4N}{\pi a}e^{-j\sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)} \tag{9-32}$$

$$= \frac{4N}{\pi a}\left(\sqrt{1-\left(\frac{h}{a}\right)^2} - j\frac{h}{a}\right) \tag{9-33}$$

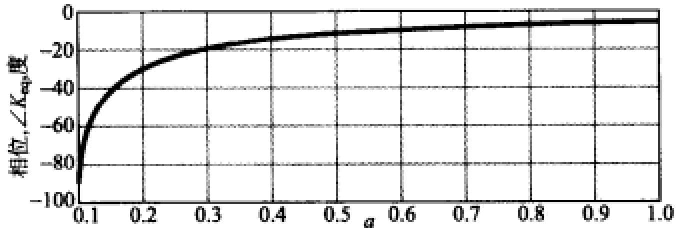
于是，描述函数为：

$$K_{eq}(a)=\begin{cases}\frac{4N}{\pi a}\left(\sqrt{1-\left(\frac{h}{a}\right)^2}-j\frac{h}{a}\right), & a\geqslant h\\ 0, & a<h\end{cases} \tag{9-34}$$

描述函数如图 9-30 所示。其大小与输入信号振幅的倒数成正比，且其相位在 $-90^\circ \sim 0^\circ$ 间变化。



(a) 幅值



(b) 相位

图 9-30　$h=0.1$ 和 $N=1$ 的迟滞非线性的描述函数

用描述函数分析稳定性

奈奎斯特理论可以被扩展来处理那些其非线性已被 DF 函数逼近过的非线性系统。在标准的线性系统分析中，特征方程为 $1+KL=0$，其中环增益为 $L=DG$，且

$$L=-\frac{1}{K} \tag{9-35}$$

正如在 6.3 节中描述过的，我们观察点 $-1/K$ 周围的环绕来决定稳定性。一个用描述函数 $K_{eq}(a)$ 代表的非线性，其特征方程是 $1+K_{eq}(a)L=0$ 的形式，且满足

$$L=-\frac{1}{K_{eq}(a)} \tag{9-36}$$

现在我们必须观察 L 和 $-1/K_{eq}(a)$ 的交点。如果曲线 L 与 $-1/K_{eq}(a)$ 相交，则系统将会在交点以振幅 a_1、频率 ω_l 振荡；记住描述函数的近似特性。然后我们观察这些环绕来判断对于增益的特殊值，系统是否会稳定，就好像这是一个线性系统。若是稳定的，我们推导出非线性系统是稳定。否则，我们推断出非线性系统不稳定。

图 9-31 给出了有别于单一非线性的另外一个线性系统的例子。非线性元素可能有产生有利的作用的一面，且可能限制振荡的幅度。DF 分析可用来决定极限环的振幅和频率。严格地讲，极限环的轨迹被限制在状态空间

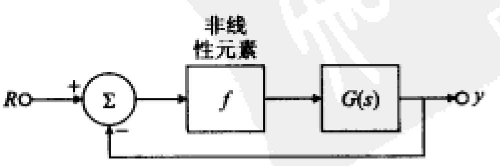


图 9-31　带非线性的闭环系统

的一个有限区域内。如果这个区域在可允许的性能范围内，则响应是可以接受的。在某些情况下，极限环带来有利的影响（参考 10.4 节中的例子）。该系统不具有渐近稳定性，因此系统不会在状态空间的原点停留。DF 有利于确定不稳定性产生的条件，甚至提出修正建议来消除不稳定性，正如接下来的例子所介绍的那样。在下个例子中，线性环路增益 L 的奈奎斯特图和描述函数的负倒数 $-1/K_{eq}(a)$ 的奈奎斯特图重叠。他们穿过的点对应于极限环。为了决定极限环的振幅和频率，我们将式(9-36) 重写为以下形式：

$$\operatorname{Re}\{L(j\omega)\}\operatorname{Re}\{K_{eq}(a)\}-\operatorname{Im}\{L(j\omega)\}\operatorname{Im}\{K_{eq}(a)\}+1=0 \tag{9-37}$$

$$\operatorname{Re}\{L(j\omega)\}\operatorname{Im}\{K_{eq}(a)\}+\operatorname{Im}\{L(j\omega)\}\operatorname{Re}\{K_{eq}(a)\}=0$$

然后我们求解这两个方程，得到极限环频率 ω_l 和相应的振幅 a_l 的可能的未知值，正如后面的例子那样。

例 9.13　条件稳定系统

考虑图 9-14 所示的反馈系统。用奈奎斯特图求解极限环的振幅和频率。

解：如图 9-32 所示，系统的奈奎斯特图在 $-1/K_{eq}(a)$ 处重叠。用式(9-29)，注意到描述函数的负倒数为

$$-\frac{1}{K_{eq}(a)}=-\frac{1}{\frac{2}{\pi}\left(k\sin^{-1}\left(\frac{N}{ak}\right)+\frac{N}{a}\sqrt{1-\left(\frac{N}{ka}\right)^2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{\frac{2}{\pi}\left(\sin^{-1}\left(\frac{0.1}{a}\right)+\frac{0.1}{a}\sqrt{1-\left(\frac{0.1}{a}\right)^2}\right)}$$

这是一条与负实轴巧合的直线，可看作输入信号振幅 a 的函数的参数。两条曲线在 -0.5 处的交点对应于极限环频率 $\omega_l=1$。$k=1, N=0.1$ 的描述函数如图 9-33 所示，模 $K_{eq}=0.2$ 对应于输入振幅 $a_l=0.63$。

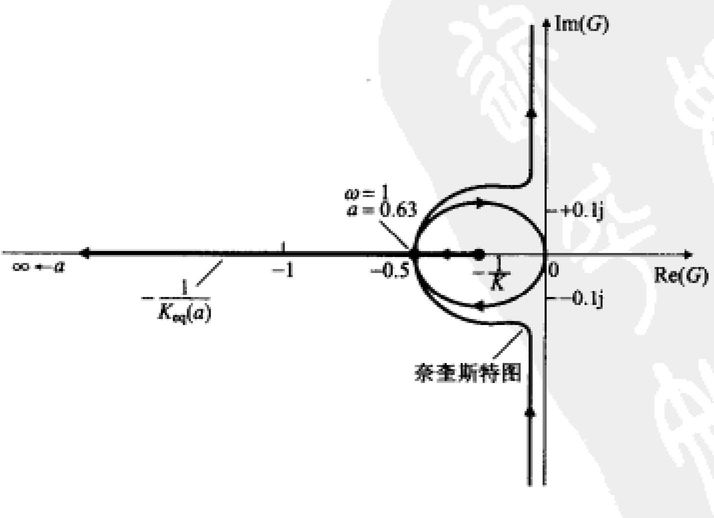


图 9-32　决定极限环的奈奎斯特图和描述函数

另一个选择是可以从我们该例的图 9-15 的根轨迹中找到：与虚轴相交处的增益为 0.2。因

此，根据式(9-29)，我们有

$$K_{eq}=\frac{2}{\pi}\left(\sin^{-1}\left(\frac{0.1}{a}\right)+\frac{0.1}{a}\sqrt{1-\left(\frac{0.1}{a}\right)^2}\right)=0.2$$

如果我们以其变量来逼近反正弦函数为

$$\sin^{-1}\left(\frac{0.1}{a}\right)\approx\frac{0.1}{a}$$

则，

$$\frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{0.1}{a}\right)+\frac{0.1}{a}\sqrt{1-\left(\frac{0.1}{a}\right)^2}\right)=0.2$$

由此，导出多项式方程：

$$\pi^2a^4-2\pi a^3+(0.1)^2=0$$

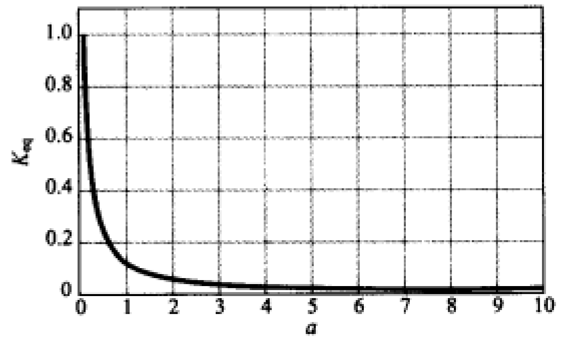


图 9-33　$N=0.1,k=1$ 时的饱和非线性的描述函数

且我们求出其相关解为 $a=0.63$。通过度量图 9-16 所示的时间，振荡的振幅为 0.62，这与我们的预期是一致的。

对于带记忆的含非线性的系统，我们也能用奈奎斯特法，如下例所示。

例 9.14　确定带迟滞非线性的稳定性

考虑如图 9-34 所示的带迟滞非线性的系统。判断系统是否稳定，并求出极限环的振幅和频率。

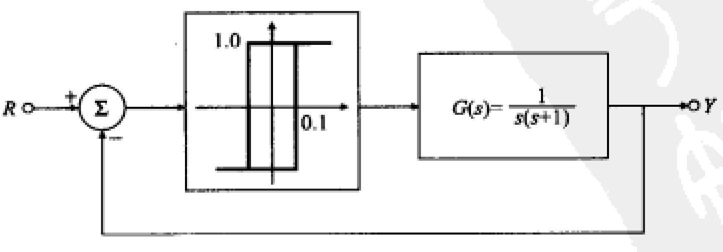


图 9-34　带迟滞非线性的反馈系统

解：系统的奈奎斯特图绘制于图 9-35。带迟滞非线性的描述函数的负倒数为

$$-\frac{1}{K_{eq}(a)}=-\frac{1}{\frac{4N}{\pi a}\left(\sqrt{1-\left(\frac{h}{a}\right)^2}-j\frac{h}{a}\right)}=-\frac{\pi}{4N}\left[\sqrt{a^2-h^2}+jh\right]$$

在这种情况下，$N=1$ 且 $h=0.1$，我们有

$$-\frac{1}{K_{eq}(a)}=-\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{a^2-0.01}+j0.1\right]$$

这是一条平行于实轴的直线，且可看作输入信号振幅 a 的函数的参数，如图 9-35 所示。从这条曲线和奈奎斯特图的相交，可得到稳定极限环的频率和相应的振幅。我们还可以解析地得到极限环信息：

$$-\frac{1}{K_{eq}(a)}=-\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{a^2-0.01}+j0.1\right]=G(j\omega)=\frac{1}{j\omega(j\omega+1)}$$

消去上面方程中的分母，我们有

$$\frac{\pi}{4}\sqrt{a^2-0.01}\omega^2+\frac{0.1\pi}{4}\omega-1+j\left[\frac{0.1\pi}{4}\omega^2-\frac{\pi}{4}\sqrt{a^2-0.01}\omega\right]=0$$

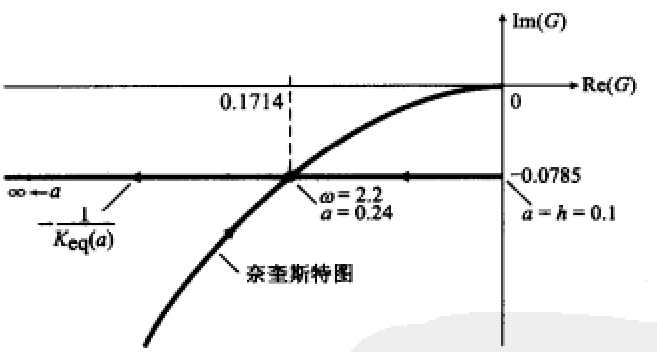


图 9-35 决定极限环特性的奈奎斯特图和 DF

将实部和虚部分别置零，得到两个方程和两个未知数。相关的解为 $\omega_l=2.2$ rad/s 和 $a_l=0.24$。闭环系统的 Simulink 实现如图 9-36 所示。系统的阶跃响应如图 9-37 所示，极限环的振幅为 $a_l=0.24$，频率为 $\omega_l=2.2$ rad/s，跟我们预测的一样。

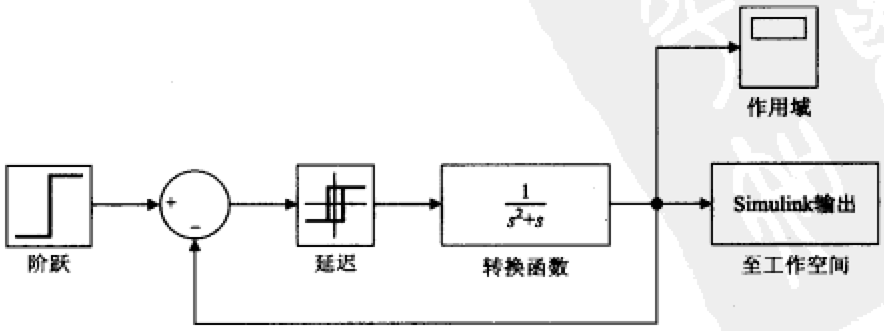


图 9-36 带迟滞的系统的 Simulink 图

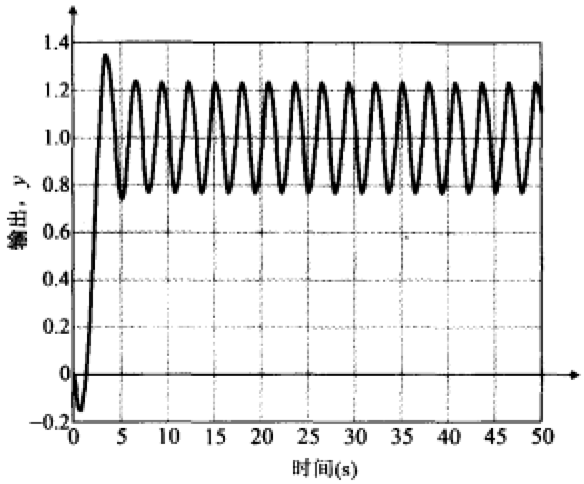


图 9-37　阶跃响应呈现极限环振荡

▲9.5　基于稳定性的分析和设计

任何控制系统的核心要求都是稳定性，且我们所研究过的设计方法都是基于这个事实。根轨迹是闭环极点在 s 平面上的图，且设计者必须要清楚这样一个事实：如果一个根进入右半平面，系统将不稳定。基于状态表示的设计包含极点配置，即极点的理想位置当然应选在稳定区域内。同样，奈奎斯特证明了基于频率响应的稳定性条件，设计者应清楚曲线，等价于增益的环形要求和 Bode 图中稳定边界的相位边界。在这两种方法之前，数学家们曾研究一般微分方程的稳定性，这些方法以及其他高级的方法都不可避免地要面对非线性系统的问题。我们从一般微分方程(ODE) 相平面解的图形表示开始，并引入李雅普诺夫法和其他一些方法，作为控制设计中的这个领域的介绍。

9.5.1　相平面

尽管根轨迹法和频率响应法要么通过传递函数的零极点要么通过频率响应增益和相位来间接地考虑系统响应，而相平面法则通过绘制状态变量的轨迹来直接地考虑时间响应。尽管直观视觉将该方法限制在了只有两个状态变量的二阶系统，但它在处理非线性、以及给予线性系统新的理解方面的能力，让我快速浏览一下非常值得的。

为了说明相平面的思想，考虑如图 9-38 所示的一个虚构的电机系统，其开环传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s(Ts+1)}$$

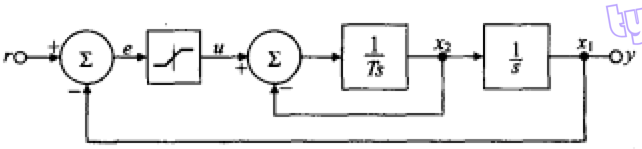


图 9-38 带非线性执行器的单元位置反馈系统

若我们假设 $T=1/6$，放大器(此刻)未饱和且增益为 K，其中 $K=5T$，则闭环系统的状态方程可写做

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{9-38}$$

$$\dot{x}_2 = -5x_1 - 6x_2 \tag{9-39}$$

$$y = x_1 \tag{9-40}$$

因为这些方程是时不变的，通过用式(9-39)除以式(9-38)来消去时间，结果为

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{-5x_1 - 6x_2}{x_2} \tag{9-41}$$

这个方程的解给出 x_2 对 x_1 的一个图，或者说是相平面中坐标(x_1, x_2)的一条轨迹。①在绘制式(9-41)的图之前，首先将系统方程考虑成矩阵形式 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$ 是非常有用的，其中，

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

若在这个方程中我们假定 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \mathrm{e}^{st}$，其中 s 和 $\boldsymbol{x}_0$ 都是常数，则 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_0 s\mathrm{e}^{st}$，且方程可如下化简为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} \tag{9-42}$$

$$\boldsymbol{x}_0 s\mathrm{e}^{st} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_0\mathrm{e}^{st} \tag{9-43}$$

$$[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}]\boldsymbol{x}_0 \mathrm{e}^{st} = \boldsymbol{0} \tag{9-44}$$

$$[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}]\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0} \tag{9-45}$$

这里需要指出的是式(9-45)为矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的特征向量方程，其分解形式为

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9-46}$$

正如附录 C 中讨论的那样，式(9-46)当且仅当系数矩阵为零时有一个解，即

$$s(s+6)+5=0 \tag{9-47}$$

$$(s+1)(s+5)=0 \tag{9-48}$$

s 的两个值，即方程的解，为特征值 $s=-1$ 和 $s=-5$。若我们将 $s=-1$ 带入式(9-46)，得到

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -1+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9-49}$$

从中可得初始状态向量的解为 $x_{02} = -x_{01}$。状态空间中的这条直线对应于特征值 $s=-1$ 的特征向量。若我们用 $s=-5$ 来重复这个过程，则结果为

① 若设置斜率 $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1$ 为一个常量，则 x_2 和 x_1 的关系为一条直线。若沿着这些线标注斜率的已知值族，则可容易地大致绘出其轨迹。例如，沿着 x_1 轴，这里 $x_2=0$，斜率是 ∞ 且轨迹是垂直的。这种方法被称为等倾线法。

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 5 & -5+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9-50}$$

且在这里特征向量的解为 $x_{02}=-5x_{01}$。

思考所有这些意味着什么。我们开始假设这个状态的时间解是一个常量乘以时间指数。我们发现只有当指数为 e^{-t} 或 e^{-5t} 时，假设才是可能的。第一种情况，状态必须沿着向量 $x_{02}=-x_{01}$，第二种情况时，状态必须沿着向量 $x_{02}=-5x_{01}$。有了这些已知信息，我们就可以计算式(9-38)和式(9-39)的解来得到微分初始状态，并绘制如图 9-39 所示的 $x_1(t)$ 对 $x_2(t)$ 的图。在图中，可以分辨出两个特征向量。当我们观察这些曲线时，很显然，所有的轨迹都平行地开始朝向 $s=-5$ 的特征向量(很快)，且快速移至 $s=-1$ 的特征向量(很慢)。所有轨迹在状态空间的原点渐近于平衡点。

若放大器饱和，则这个图将完全改变。例如，若放大器在 $u=0.5$ 处饱和，则速度 x_2 将快速地接近这个值且将停留在这里，直到位置达到一个足以让放大器退出饱和状态的新值。新的曲线如图 9-40 所示。

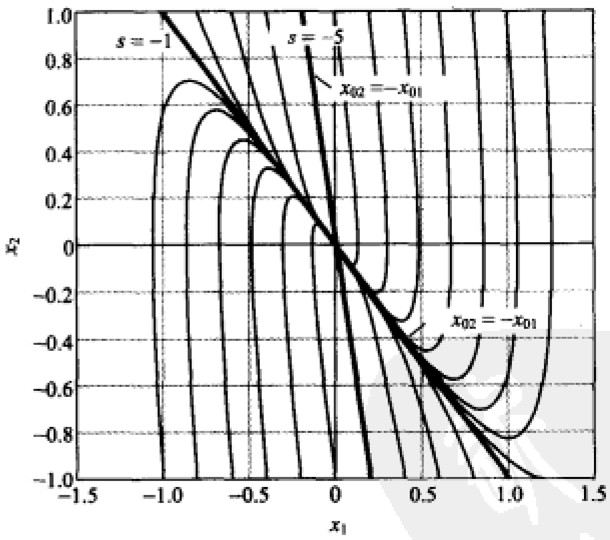


图 9-39 极点为 $s=-1$ 和 $s=-5$ 的节点的相平面图

注意，在线性区域内的运动几乎完全沿着慢的特征向量。最后，我们注意到，当极点为复数时相平面的图像改变了。在这种情况下，状态变量的运动由阻尼正弦曲线组成且 $x_1(t)$ 对 $x_2(t)$ 图呈螺旋状。各种初始条件下的一系列曲线如图 9-41 所示。

这几个例子只涉及了相平面分析的表面，但却给出了应用这种形式来帮助设计者直观化动态响应的思想。

Bang-Bang 控制

基于相平面设计非线性系统的一个例子是面对控制饱和时的最优的最小时间控制。为了这个目的，这种广泛使用的方法的最简单的形式为：受控对象 $1/s^2$ 的这种形式。方程为

$$\ddot{y} = u \tag{9-51}$$

$$e = y - y_f \tag{9-52}$$

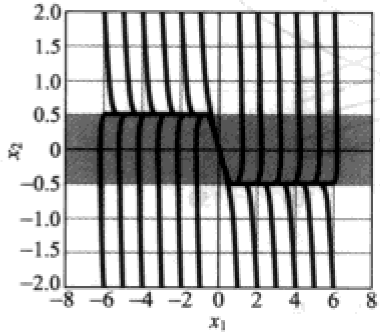


图 9-40 带饱和的相平面图

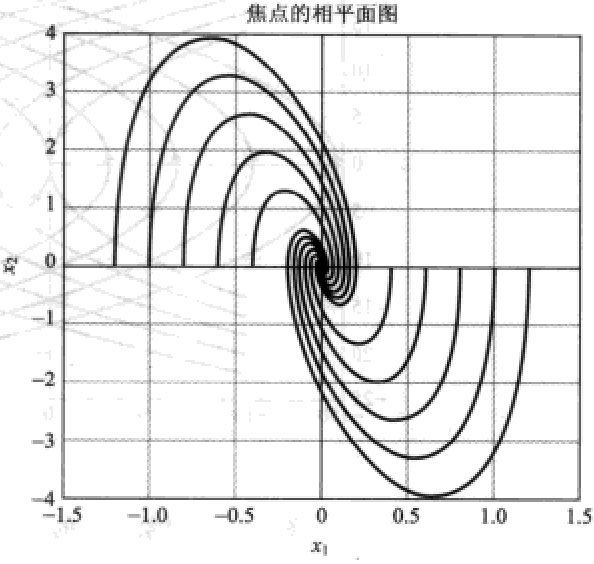


图 9-41 带复极点系统的相平面图

其中 $y(0) = \dot{y}(0) = 0$，y_f 是一个常量，且控制被限制于 $|u| \leqslant 1$。这个问题是使误差在最小的时间内等于零。若我们定义状态变量为 $x_1 = e$ 和 $x_2 = \dot{e} = \dot{y}$，方程化简为

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{9-53}$$

$$\dot{x}_2 = u \tag{9-54}$$

$$x_1(0) = -y_f \tag{9-55}$$

$$x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0 \tag{9-56}$$

且要求解的问题就是使 t_f 最小。直观地，这是那些急切的司机希望在最小时间内从一个停靠加速到下一个停靠的问题。她将会踩一段时间的踏板，然后换踩刹车使汽车恰好在正确的地方停下。最优控制理论的一个基本理论证明了这个直观的想法：该问题的解是，若 $y_f > 0$，用一段时间的完全正控制，然后在恰当的时间换作完全负控制使得误差达到原点并停在那里。

为了研究这种情况，对象在 $u = 1$ 和 $u = -1$ 两种情况下在相平面内轨迹如图 9-42 所示。对于 $u = +1$，其轨迹开始于第四象限，然后移向第一象限。对于 $u = -1$，其轨迹开始于第二象限，然后移向第三象限。

这个曲线簇的两段特别有趣：它们穿过原点。一旦路径到达它们中的一条，则常量控制将把其状态带入最终的期望静止位置。因此，对于任何的初始条件，一旦轨迹到达这两条穿越原点的曲线之一，正确的动作是开关控制（从 $u = +1$ 至 -1，或从 $u = -1$ 至 $+1$），于是该轨迹就跟随那条曲线到达原点。"开关曲线" 如图 9-43 所示。

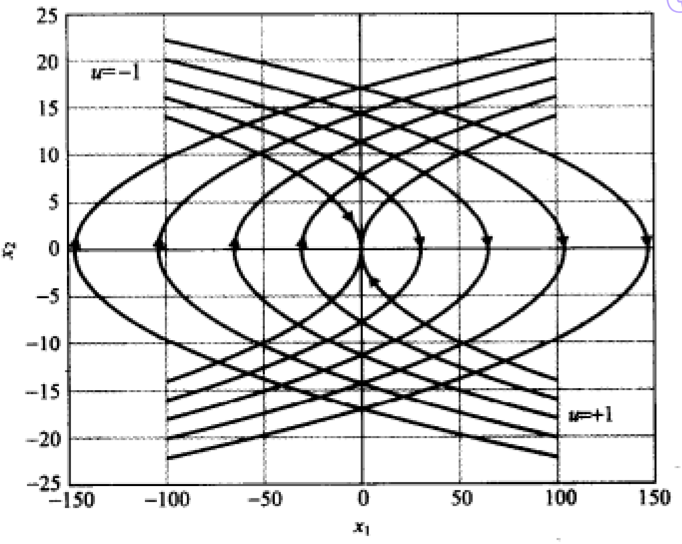


图 9-42 对象 $1/s^2$ 的 ±1 控制的相平面

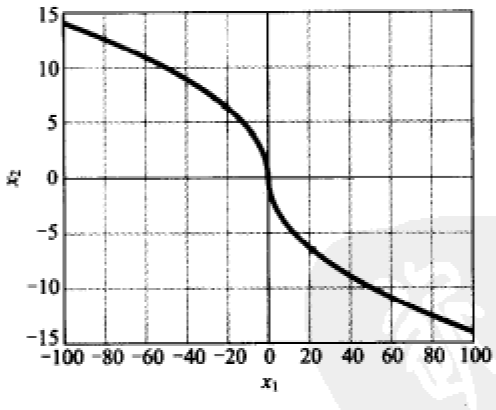


图 9-43 受控对象 $1/s^2$ 的开关曲线

对一个二阶的受控对象，可通过在运动方程中的换向时间求出开关曲线，设初始状态为零并应用最大控制。这个过程可用最小控制反复进行以清除曲线的其他分支。

对曲线上方的任何初始条件，用 $u=-1$；对曲线下方的任何初始条件，用 $u=+1$。正如所讨论的，结果将是一个最小时间响应。注意到，曲线在原点具有垂直的斜率；因此，在这个邻域内的实现是相当敏感的。一个改进的形式，即用于计算机磁盘驱动器工业的近似时间最优系统（PTOS）在1987年由Workman进行了研究。改进包括稍微移动曲线，将线性控制区域原点处的无限斜率换作有限斜率。这个结论已广泛应用于硬盘驱动器及其相似的系统。

时间最优系统的典型响应如图 9-44 所示，用 Simulink 得到的 PTOS 系统的典型响应如图 9-45 所示。注意，响应时间几乎都一样，但时间最优系统控制在末端有剧烈的抖动，因为末端的开关曲线的斜率无穷大，PTOS 系统的输出平滑地滑向终值。要更完整地学习，我们需要转向非线性方程。

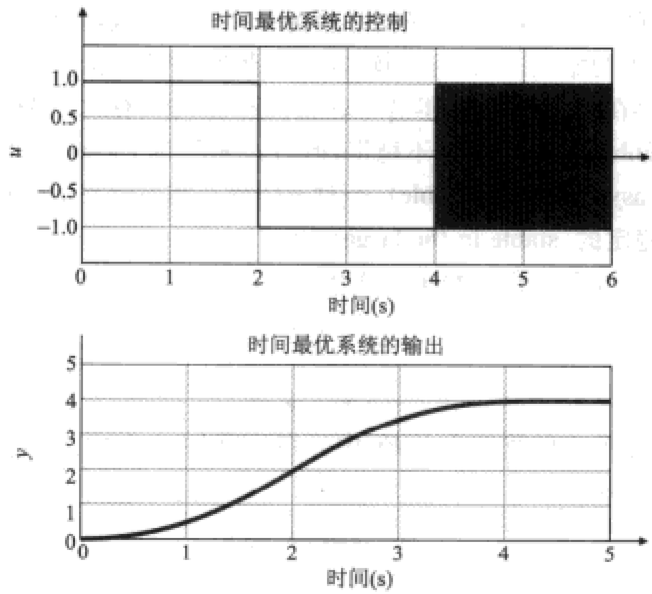


图 9-44　一个时间最优系统的响应

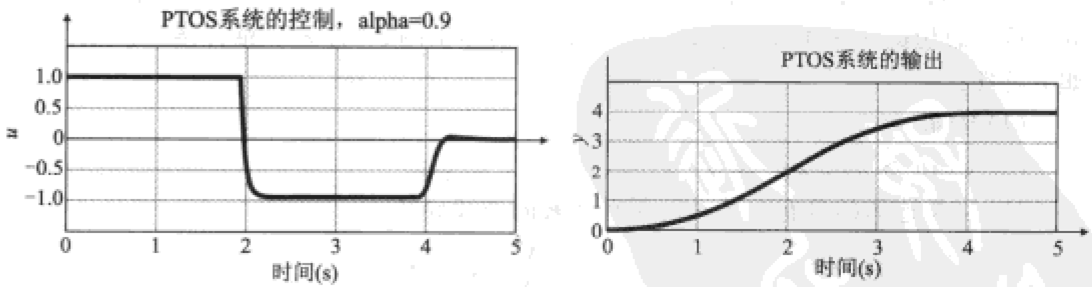


图 9-45　一个 PTOS 系统的响应

9.5.2　李雅普诺夫稳定性分析

李雅普诺夫所研究的运动稳定性涉及了超出本书范围的高级数学知识。这里我们将以探讨的方式给出这个理论的特点并陈述一些最基本的结论。李雅普诺夫介绍了两种研究用一般微分方程描述系统的运动稳定性的方法。他的间接的或**第一种方法**（**first method**）是基于方程线性化的，通过考虑线性逼近的稳定性来得出非线性系统的稳定性。他用其直接的或**第二种方法**（**second method**），即直接考虑非线性方程的方法，证明了第一种方法得出的结论。关于间接法的讨论中介绍了这两种方法。这个问题要求对

向量矩阵方程的稳定性给予新的定义。直观地，如果中等尺寸的初始条件导致一个中等尺寸的响应，则我们说系统是稳定的。为了用数学语言表示这个结论，首先我们需要一个“尺寸”的定义。这是一个向量的范数，其符号为 $\|x\|$。在很多可能的定义中，我们在这里选择最熟悉的欧几里德度量，用其平方值定义为 $\|x\|^2 = x^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$。在这种思想下，稳定性的定义为：若给定任意半径为 ϵ 的一个区域，存在半径为 δ 的一个更小的区域，以致于如果初始状态在 δ 内，则轨迹将一直在 ϵ 内。更正式的定义为：，若对于任意给定的 $\epsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$ 使得若 $\|x(0)\| < \delta$，对所有的 t 都有 $\|x(t)\| < \epsilon$，则系统是**稳定的**(**stable**)。若这个状态不稳定，但当 $t \to \infty$ 时，$\|x(t)\| \to 0$，则系统被称为是**渐近稳定的**(**asymptotically stable**)。若对于任意 ϵ，都可能找出任意大的 δ，则系统被称为**在大范围是稳定的**(**stable in the large**)。

从下面的时变 ODE 方程开始研究这些内容：

$$\dot{x} = f(x) \tag{9-57}$$

其线性逼近为

$$\dot{x} = Fx + g(x) \tag{9-58}$$

在这个方程中，假定所有的线性项在 Fx 中且高阶项在 $g(x)$ 中。在这个意义上，当 x 越小，$g(x)$ 越快地变小，如下：

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0 \tag{9-59}$$

李雅普诺夫的第二种方法开始于这个直观的概念，即物理系统状态尺寸的一种度量是在任何时刻系统内储存的所有能量，当储存的能量不再变化时，系统一定静止。例如电路，电能与电容器电压的平方成比例，磁能与电感器电流的平方成比例。李雅普诺夫提取了这个思想的深刻本质，定义了状态 $V(x)$ 的标量函数，称为李雅普诺夫函数，具有如下特性：

(1) $V(\mathbf{0}) = 0$

(2) $V(x) > 0, \|x\| \neq 0$

(3) V 是连续的且有关于 x 的所有元素的连续导数。

(4) 沿着方程的轨迹，$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x}f(x) \leqslant 0$。

前面的三个条件确保：在原点的一个邻域内，函数像一个平滑的碗状置于状态空间的原点。第四个条件明显取决于运动方程，确保：若 δ 被选定使得初始条件比由 ϵ 定义的球的任何部分都更深入碗的内部，则曲线永远不会在这个碗上高于其开始的位置，且一直在 ϵ 内，因此系统将是稳定的。此外，若条件 4 被加强为 $\dot{V}(x) < 0$，则函数的值必落为零，由条件 1 知系统状态也为零。作为李雅普诺夫第二种方法的基础，稳定性理论被陈述为：

若系统存在一个李雅普诺夫函数，则其运动是稳定的，此外若 $\dot{V}(x) < 0$，则运动是渐进稳定的。第二种方法就是在寻找李雅普诺夫函数。

应用该理论的困难在于“如果李雅普诺夫函数存在。”这句话只有在线性情况下，

该理论才是求出李雅普诺夫函数的一条规则；否则，它仅仅给工程师提供了找出这样一个函数的搜索许可。我们现在能用间接法考虑式(9-58)的稳定性了。

可能是因为简单系统中的能量是变量的平方和，所以，假定一个对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$ 存在，李雅普诺夫给出了 V 的一个二次候选式和定义为 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 的函数。很显然，该函数满足最前面的三个条件；在我们得出存在一个李雅普诺夫函数的结论前，必须验证是否满足第四个条件。$\dot{V}$ 的计算过程为：

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{9-60}$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\dot{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{9-61}$$

$$=(\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \tag{9-62}$$

$$=\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{F})\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \tag{9-63}$$

得到一个被称作李雅普诺夫方程的基本矩阵为

$$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{Q} \tag{9-64}$$

而且，他指出，若 $\boldsymbol{F}$ 是一个所有特征值都位于左半平面内的稳定矩阵，则对于任何正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，这个方程的解 $\boldsymbol{P}$ 也将是正定的。这个论断是用来选取 $\boldsymbol{Q}$ 和求解 $\boldsymbol{P}$ 的。若 F 的特征值在左半平面，则 $\boldsymbol{P}$ 将是正定的，所以 $V(\boldsymbol{x})$ 是一个可能的李雅普诺夫函数，且

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{g} \tag{9-65}$$

通过式(9-59)，注意到这个论断的最后部分：若 $\boldsymbol{x}$ 足够小，则式(9-65)的第一项将起主导作用，第四个条件得到满足，V 是一个李雅普诺夫函数，且系统被证明是稳定的。注意到，对 $\boldsymbol{x}$ 足够小的要求，仅保证一个稳定的原点邻域是存在的。需要更进一步的条件来说明，当 $\|\boldsymbol{x}\|$ 趋向于 ∞ 时(而不是在这之前)，由 V 定义的"碗"在各个方向都趋向于 ∞，以致于对于所有状态都保持稳定，而且是在大范围内稳定。

同时，还存在一个不稳定理论，若 $\boldsymbol{F}$ 的任意一个特征值在右半平面，则原点将不稳定。若除了个别简单的极点在虚轴上，$\boldsymbol{F}$ 的其他所有极点都在左半平面内，则系统的稳定性取决于非线性项 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 的其他特性。

有这个结论在手，李雅普诺夫第一种方法或间接法可陈述为：

(1) 求出其线性逼近，并计算出 $\boldsymbol{F}$ 的特征值。

(2) 若所有的特征值都在左半平面内，则在原点周围存在一个稳定的区域。

(3) 若至少有一个特征值在右半平面，则原点不稳定。

(4) 若个别简单的极点在虚轴上，其他所有极点都在左半平面内，则稳定性不能由这种方法确定。

例 9.15　二阶系统的李雅普诺夫稳定性

用李雅普诺夫的方法来求二阶线性系统的稳定性条件，其状态矩阵为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-\alpha & \beta\\ -\beta & -\alpha\end{bmatrix}$$

解：对于该线性情况，我们可以任选我们喜欢的正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$；最简单的就是 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$。相应的李雅普诺夫方程为：

$$\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{9-66}$$

将方程(9-66)乘出来，使系数相等，我们得到

$$-\alpha p-\beta q-\alpha p-\beta q=-1 \tag{9-67}$$

$$-\alpha q-\beta r+\beta p-\alpha q=0 \tag{9-68}$$

$$\beta q-\alpha r+\beta q-\alpha r=-1 \tag{9-69}$$

从式(9-67)～式(9-69)，很容易解出 $p=r=1/2\alpha, q=0$，所以

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\alpha} \end{bmatrix}$$

且 $1/2\alpha>0, 1/4\alpha^2>0$。于是 $\boldsymbol{P}>0$，因此如果 $\alpha>0$，那么可得出结论：系统使是稳定的。

对于含有许多状态变量和非数值参数的系统，李雅普诺夫方程的解可能是繁琐的，但对于在带真实参数的系统中计算稳定性条件，得到的结果是劳斯法的一个等效替代。

例 9.16　位置反馈系统的李雅普诺夫直接法

考虑如图 9-38 所示的位置反馈系统模型。说明直接法在该非线性系统中的应用。假定 $T=1$，用 Simulink 来仿真该系统，，并求系统的阶跃响应。

解：我们假定执行器，在本例中可能只是一个放大器，具有明显的非线性，在图中表现为饱和，但也许更复杂。我们只假定 $u=f(e)$，该函数位于第一、三象限，所以 $\int_0^e f(e)\mathrm{d}e>0$。我们再假定 $f(e)=0$，意味着 $e=0$，并假定 $T>0$，则系统是开环稳定的。其运动方程为

$$\dot{e}=-x_2 \tag{9-70a}$$

$$\dot{x}_2=-\frac{1}{T}x_2+\frac{f(e)}{T} \tag{9-70b}$$

对于一个李雅普诺夫函数，考虑用动能加势能之类的表示

$$V=\frac{T}{2}x_2^2+\int_0^e f(\sigma)\mathrm{d}\sigma \tag{9-71}$$

很显然，若 $x_2=e=0$，则 $V=0$；由于关于 f 的假设，若 $x_2^2+e^2\neq 0$，则 $V>0$。为了观察式(9-71)的 V 是否是一个李雅普诺夫函数，我们计算 $\dot{V}$ 如下：

$$\begin{aligned}\dot{V}&=Tx_2\dot{x}_2+f(e)\dot{e}\\&=Tx_2\left[-\frac{1}{T}x_2+\frac{f(e)}{T}\right]+f(e)(-x_2)\\&=-x_2^2\end{aligned}$$

因此 $\dot{V}\leqslant 0$，且原点是李雅普诺夫稳定。此外，若 $x_2\neq 0$，则 V 将总是降低；且式(9-70b)表明系统除了 $x_2=0$，没有 $x_2\equiv 0$ 的轨迹。因此我们可得出结论：系统对于每个满足条件(1) $\int f\mathrm{d}\sigma>0$ 和(2) $f(e)=0$，也就是 $e=0$ 的 f，是渐近稳定的。对于 $T=1$，系统的 Simulink 框图如图 9-46 所示。系统的阶跃响应如图 9-47 所示。

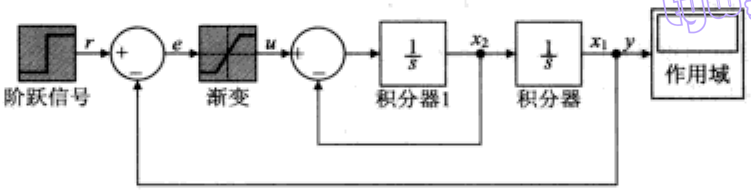


图 9-46 位置反馈系统的 Simulink 框图

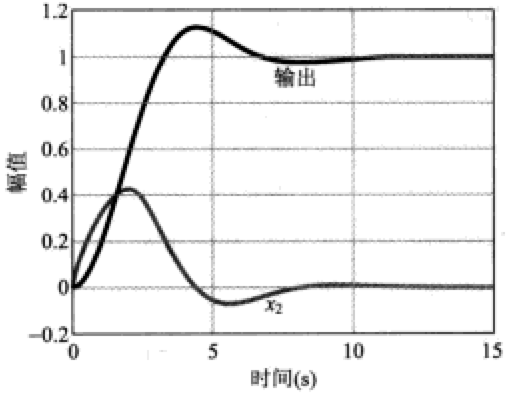


图 9-47 位置控制系统的阶跃响应

正如我们前面提到的，非线性系统稳定性的研究工作是广泛的，所以我们在这里只是接触到了一些很重要的观点和方法。更多的研究资料可参看 LaSalle 和 Lefschetz(1961)，Kalman 和 Bertram(1960)，Vidyasagar(1993)，Khalil(2002) 和 Sastry(1999)。

自适应控制的李雅普诺夫重设计

李雅普诺夫稳定性理论在控制中的一个经典应用之一是被称为李雅普诺夫重设计的方法。这种思想是用一些未指明的关键控制参数来构建系统，提出一个候选的李雅普诺夫函数，然后选择合适的要素使得该候选函数继续成为我们能得出稳定性结论的李雅普诺夫函数。在 Parks 的一篇早期论文中，将该方法应用于一个模型的参考适应控制系统。最初考虑的简单系统的框图如图 9-48 所示。

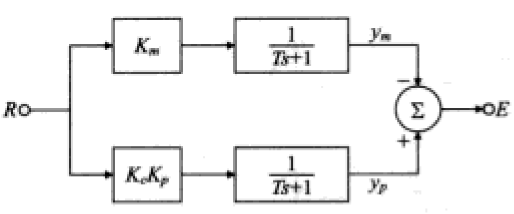


图 9-48 简单的模型参考自适应系统

在这个系统中，模型和受控对象有相同的动力学但不同的增益。目标是是调整控制增益 K_c，使得 $K_cK_p = K_m$，且受控对象输出 y_p 将等于模型输出 y_m。一个建议的的启发式法则，被称为“M. I. T.”法则，是建立在如下思想之上的：若我们定义代价为瞬时误差的平方，移动 K_c 使得代价更小，则结果会驱动 K_c 达到合适得值。若代

价的梯度为正(点是上升的,所以这样说),则应该减小增益;若梯度为负,则应增加增益。因此,增益对时间的导数应与负梯度成正比。

用方程的形式表示即

$$J = e^2 \tag{9-72}$$

$$\frac{\partial J}{\partial K_c} = 2e\frac{\partial e}{\partial K_c} \tag{9-73}$$

$$\frac{\mathrm{d}K_c}{\mathrm{d}t} = -Be\frac{\partial e}{\partial K_c} \tag{9-74}$$

其中,B 是选出的"自适应增益"。由框图,得

$$E(s) = \frac{K_c K_p - K_m}{Ts+1}R(s) \tag{9-75}$$

$$\frac{\partial E}{\partial K_c} = \frac{K_p}{Ts+1}R \tag{9-76}$$

$$= \frac{K_p}{K_m}Y_m \tag{9-77}$$

如果我们将式(9-77)的结果代入式(9-74),其结果就是MIT法则,

$$\frac{\mathrm{d}K_c}{\mathrm{d}t} = -B'eY_m \tag{9-78}$$

其中有一个新的适应增益 B'。不幸的是,这个法则的稳定性还没有建立,一些分析表明在合理情况下它可能不稳定,就好像存在未建模的动力学或扰动。Parks 建议李雅普诺夫重设计将是一个更好的思想,还建议不用式(9-74)给出的$\dot{K}_c$,这种选择旨在保证稳定性。他的思想始于 $r = r_o$ 为一个常量的微分方程:

$$T\dot{e} + e = (K_c K_p - K_m)r_o \tag{9-79}$$

$$\dot{K}_c = -B'eY_m \tag{9-80}$$

为简化起见,定义 $x = (K_c K_p - K_m)$ 且求出 $\dot{x}$。Parks 选择 $V = e^2 + \lambda x^2$ 作为候选的李雅普诺夫函数,并计算

$$\dot{V} = 2e\dot{e} + 2\lambda x\dot{x} \tag{9-81}$$

$$= 2e\left(\frac{xr_o}{T} - \frac{e}{T}\right) + 2\lambda x\dot{x} \tag{9-82}$$

若在最后的方程中的 $\dot{x}$ 被选为 $\dot{x} = -\dfrac{er_o}{\lambda T}$,则 $\dot{V} = -2\dfrac{e^2}{T}$,满足李雅普诺夫函数的条件,且对于给定的假设,稳定性是可以保证的。回过头来,我们发现新的算法为

$$\dot{K}_c = -B''er_o \tag{9-83}$$

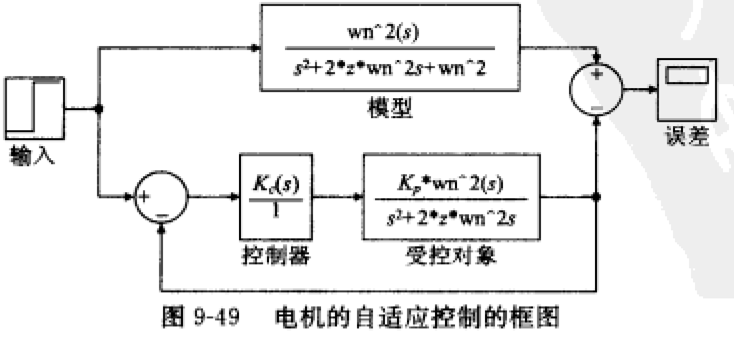


图 9-49 电机的自适应控制的框图

显然，这个结果不能回答未建模的动力学或扰动的问题，但原理是非常清楚的：将关键控制方程留去定义，从而获得一个能将系统稳定性置于一个坚实基础上的李雅普诺夫函数。

作为李雅普诺夫重设计的第二个例子，考虑如图 9-49 所示的一个电机的自适应控制。定义模型的输出为 y_m，受控对象输出为 y_p，其方程为

$$\ddot{y}_m + 2\zeta\omega_n \dot{y}_m + \omega_n^2 y_m = \omega_n^2 r \tag{9-84}$$

$$\ddot{y}_p + 2\zeta\omega_n \dot{y}_p + \omega_n^2 y_p = K_c K_p \omega_n^2 (r - y_p) + \omega_n^2 y_p \tag{9-85}$$

（在关于 y_p 的方程中，$\omega_n^2 y_p$ 被加到方程的两边，简化了误差方程。）误差定义为 $e = y_m - y_p$ 且误差方程可通过用 y_m 方程减去 y_p 方程。结果为：

$$\ddot{e} + 2\zeta\omega_n \dot{e} + \omega_n^2 ye = \omega_n^2 (1 - K_c K_p)(r - y_p) \tag{9-86}$$

现在的思路是要找出一个关于 K_c 的方程，要能得到误差方程的李雅普诺夫函数。为了简化计算，我们定义参数 $x = 1 - K_c K_p$，其中 $\dot{x} = -K_p K_c$，且其误差方程为

$$\ddot{e}_p + 2\zeta\omega_n \dot{e} + \omega_n^2 e = \omega_n^2 x (r - y_p) \tag{9-87}$$

在这一点上，Parks 建议将 $V = e^2 + \alpha\dot{e}^2 + \beta x^2$ 作为一个可能的函数。我们需要求出 $\dot{x}$ 使这个 V 成为一个李雅普诺夫函数。其微分方程为：

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2e\dot{e} + 2\alpha\dot{e}\ddot{e} + 2\beta x\dot{x} &(9\text{-}88)\\
&= 2e\dot{e} + 2\alpha\dot{e}\,(-2\zeta\omega_n\dot{e} - \omega_n^2 e + \omega_n^2 x(r - y_p)) + 2\beta x\dot{x} &(9\text{-}89)\\
&= -4\alpha\zeta\omega_n \dot{e}^2 + 2e\dot{e}(1 - \alpha\omega_n^2) + x\,(2\alpha\dot{e}\omega_n^2 (r - y_p) + 2\beta\dot{x}) &(9\text{-}90)
\end{aligned}$$

若我们令 $1 - \alpha\omega_n^2 = 0$ 和 $2\alpha\dot{e}\omega_n^2(r - y_p) + 2\beta\dot{x} = 0$，则关于 $\dot{V}$ 的方程简化为总为负的 $\dot{V} = -4\alpha\zeta\omega_n \dot{e}^2$，且 V 是一个李雅普诺夫函数，该系统也是稳定的。替换 x，我们得到自适应控制规律为

$$\dot{K}_c = -\beta'\dot{e}(r - y_p) \tag{9-91}$$

其中 $\beta' = \dfrac{\alpha\omega_n^2}{K_p\beta}$，是一个新常量。

很显然，我们仅仅接触了李雅普诺夫稳定性理论，且我们重设计的古老例子可追溯到 1966 年，但是它们很好地说明了其原理，为进一步研究该重要领域有了好的开端。

9.5.3 圆判据

通过从非线性的输入和输出点绘制框图，仅带一个单入单出非线性的非线性系统如图 9-50 所示。在苏联科学家首先研究过后，圆判据在文献中被称为 Lur'e 问题。

我们假定系统是非强迫的，因此 $r = 0$。为这样的系统稳定性推导出图解的充分条件是可能的。即使这种方法是实用的，但在某些情况下它可能导致保守的结果，尽管存在产生不太保守结果的范围（参看 Safonoy, et al. 1987）。首先我们为无记忆非线性定义扇区条件。

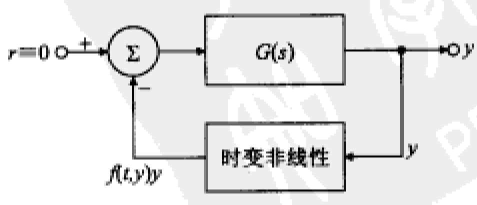


图 9-50 非线性系统框图

扇区条件

若对于所有输入 x，

$$k_1 x^2 \leqslant f(x)x \leqslant k_2 x^2 \tag{9-92}$$

具有标量输入和标量输出的函数 $f(x)$ 是属于扇形区域$[k_1, k_2]$的。这个关系式可以重新写作：

$$k_1 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant k_2 \qquad x \neq 0 \tag{9-93}$$

基本上，定义表明 $f(x)$ 的图位于两条穿越原点的斜率分别为 k_1 和 k_2 的直线之间，如图 9-51 所示。在这个定义中，k_1 和 k_2 可从 $-\infty$ 至 $+\infty$ 间变化。注意到，扇区条件对函数 $f(x)$ 的递增增益和斜率没有限制。后面的例子将说明怎样确定 k_1 和 k_2。

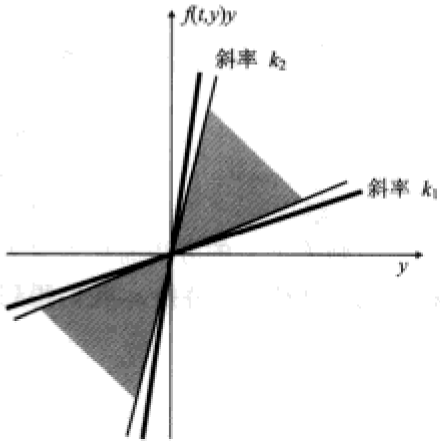


图 9-51　在一个扇区内的非线性的输出

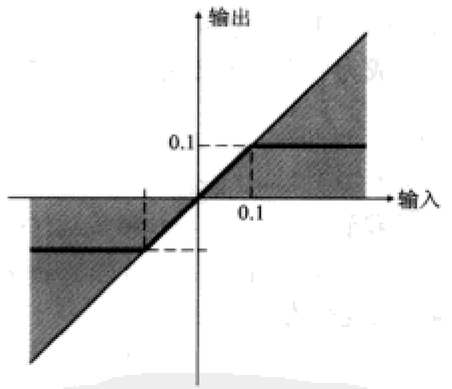


图 9-52　饱和的扇区

例 9.17　符号非线性的扇区计算

求一个包含如图 9-6b 所示的符号函数 $y = f(u)$ 的扇区。

解：因为 $\mathrm{sgn}(0) = 0$，故我们知道唯一穿越原点，并从上方限制符号函数的直线就是 y 轴，其相应的斜率为 $k_2 = \infty$。同样，从下方限制符号函数，并穿越原点的直线的斜率为零，其相应于 x 轴；因此，$k_1 = 0$。因此，这个符号函数的扇区为$[0, \infty]$。

例 9.18　饱和非线性的扇区

考虑如图 9-52 所示的饱和非线性。求这个函数的扇区。

解：该函数向上被一条斜率为 1，即 $k_2 = 1$ 的直线限制，和向下被 x 轴，即 $k_1 = 0$ 限制，如图所示。因此，该函数的扇区为$[0, 1]$。

圆判据

俄罗斯科学家 Aizermann 在 1949 年猜想：若一个 Lur'e 系统在 f 被任何一个限定

在$k_1 < k < k_2$范围内的线性增益所替代时是稳定的，则该系统在增益被一个限定在扇区$[k_1, k_2]$内的非线性所替代时也是稳定的。这意味着：若一个如图 9-50 所示的带一条前向线性通道($\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$) 的单回路(严格意义上的) 连续时间反馈系统对所有满足$k_1 < k < k_2$的线性固定反馈增益k是稳定的，由此得到的闭环系统矩阵$\boldsymbol{F} + k\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}$是稳定的，则带一个在扇区$[k_1, k_2]$内的无记忆非线性时变反馈项$f(t, y)$的非线性系统也是稳定的，如图 9-50 所示。遗憾的是，这个猜想因反例的存在而不正确[①]。然而，Aizermann 猜想的一个变种是正确的，被称为**圆判据(circle criterion)**。

我们描述一个能洞察问题并激发证明的启发式观点，而不是给出这个判据的一个严格证明。包含一个线性阻抗$Z(\mathrm{j}\omega) = R(\omega) + \mathrm{j}X(\omega)$的电路可由欧姆定律$V = IZ(s)$描述。我们假定$Z$由有功分量组成，这意味着实部$R$为偶函数，虚部$X$为奇函数，即$R(-\omega) = R(\omega)$，且$X(-\omega) = -X(\omega)$。若对于所有的$\omega$都有$R(\omega) \geqslant \delta > 0$，则该阻抗称为严格无源，它将消耗能量。电路的瞬态功率为$p = v(t)i(t)$，且被电路吸收的总能量为$e = \int_0^\infty v(t)i(t)\mathrm{d}t$。提到图，欧姆定律等价于受控对象方程$Y = UG(s)$，$Y$为电压，$U$为电流，且$G(s) = R + \mathrm{j}X$为阻抗。

应用对象方程的能量表达式和 Parseval 理论[②]转换到频域，得到

$$\int_0^\infty y(t)u(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\mathrm{j}\omega)Y(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \tag{9-94}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\mathrm{j}\omega)U(-\mathrm{j}\omega)G(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \tag{9-95}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |U(\mathrm{j}\omega)|^2(R - \mathrm{j}X)\mathrm{d}\omega \tag{9-96}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |U(\mathrm{j}\omega)|^2 R(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{9-97}$$

在最后一步中，使用了X为奇函数这一事实。在这一点上，常用符号的应用将或多或少地有效简化方程。我们定义内积和范数为

$$\int_0^\infty y(t)u(t)\mathrm{d}t = \langle y, u \rangle \tag{9-98}$$

$$\| u \|^2 = \int_0^\infty [u(t)]^2 \mathrm{d}t = \langle u, u \rangle \tag{9-99}$$

有了这个符号，并假定$R \geqslant \delta > 0$，式(9-97) 简化为

$$\langle y, u \rangle \geqslant \delta \| u \|^2 \tag{9-100}$$

现在转向非线性部分，用同样的概念"能量"，并假定f在扇区$[0, K]$内，我们有

$$\int_0^\infty y(t)f(y,t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{[f(y,t)]^2}{\dfrac{f(y,t)}{y(t)}}\mathrm{d}t \tag{9-101}$$

$$\geqslant \frac{\| f(y,t) \|^2}{K} \tag{9-102}$$

---

① Aizermann 的猜想激起了在该领域的大量研究，并推动了 Kalman-Yakubovich-Popov 引理的发展，该引理给出了一个无缘系统的状态空间条件，该引理用于圆判据的一种证明中。

② 参见附录 A。

$$\geqslant \frac{\| u(t) \|^2}{K} \tag{9-103}$$

现在的假设是:若由式(9-100)与式(9-102)的和式给出的总能量为正,则系统一定是稳定的,即能量被稳定地损耗。能量损耗的实际值将等于储存在系统各元素中的初始能量。

从这之中,我们可以得出结论:若$\delta \| u \|^2 + \frac{\| u(t) \|^2}{K} > 0$,则系统是稳定的。因此,判据为:

$$\delta \| u \|^2 + \frac{\| u(t) \|^2}{K} > 0 \tag{9-104}$$

$$\left[\mathrm{Re}\{G(\mathrm{j}\omega)\} + \frac{1}{K} \right] \| u(t) \|^2 > 0 \tag{9-105}$$

$$\mathrm{Re}\{KG(\mathrm{j}\omega) + 1\} > 0 \tag{9-106}$$

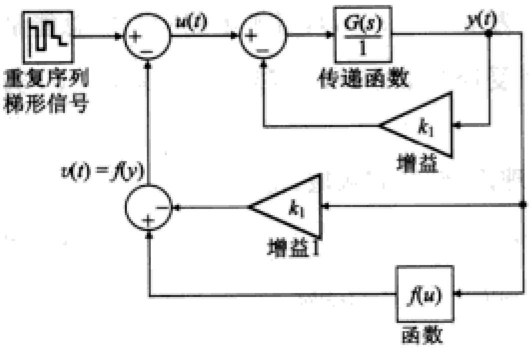


图 9-53 扇区的框图操作

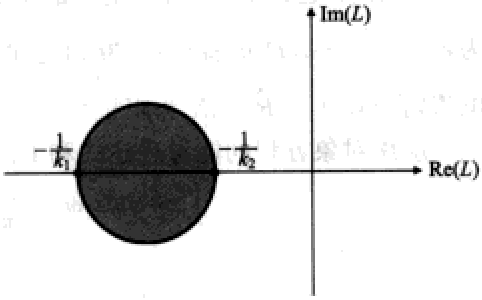


图 9-54 圆判据的演示

在推导式(9-106)时,假定非线性在零扇区$[0,K]$内。若函数真的在扇区$[k_1, k_2]$内,则可通过加减框图中的k_1值来将简化为一个零扇区,如图 9-53 所示。做了这些改变后,动态系统由$H = \frac{G}{1+k_1 G}$替代,函数由在扇区$[k_2 - k_1, 0]$内的$f' = f - k_1$替代。有了这些改变,稳定性判据转化为

$$\mathrm{Re}\left\{1 + (k_2 - k_1)\frac{G}{1+k_1 G}\right\} > 0 \tag{9-107}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1+k_1 G + (k_2 - k_1)G}{1+k_1 G}\right\} > 0 \tag{9-108}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1+k_2 G(\mathrm{j}\omega)}{1+k_1 G(\mathrm{j}\omega)}\right\} > 0 \tag{9-109}$$

一个如式(9-109)中的$F = \frac{1+k_2 G(\mathrm{j}\omega)}{1+k_1 G(\mathrm{j}\omega)}$的双线性函数,将在$F$平面中的圆映射成在$G$平面的另一个圆(参看附录 B)。在这种情况中,可接受的范围为$\mathrm{Re}\{F\} > 0$,其边界为虚轴,所以该映射是从无限大半径的虚轴到一个有限圆的。因为函数为实函数,所以该圆的圆心必在实轴上,我们只需找出实轴上的两个点。例如,当$F = 0$时,我们有$1 + k_2 G = 0$或$G = -\frac{1}{k_2}$。实轴上的另一点是当函数为无限时,即$1 + k_1 G = 0$或$G = -\frac{1}{k_1}$。因此

在 G 平面中的圆其中心在实轴上且通过如图 9-54 的 $\left[-\frac{1}{k_2}, -\frac{1}{k_1}\right]$ 点。因为 F 必须要避免左半平面，若我们在禁止区域内设 $F=-1$ 并求解，我们求出 $G=\frac{-2}{k_2+k_1}$，它在圆内，我们得出结论若 $G(\mathrm{j}\omega)$ 避免该圆，则系统将是稳定的。

实际的理论如下：

非线性系统是渐近稳定的，如果

(1) $f(t,y)$ 位于扇区 $[k_1, k_2]$ 内，且 $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2$；

(2) 传递函数 $G(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega I-F)^{-1}G$ 的奈奎斯特图没有交于或环绕"临界圆"，该"临界圆"的圆心位于实轴上，且通过 $-1/k_1$ 和 $-1/k_2$ 两点，如图 9-54 所示。

实际上，通常的奈奎斯特"-1"点被临界盘所代替。这个结果被称为圆判据或圆定理，应归功于 Sanderg(1964) 和 Zames(1966)。注意到，这些条件是充分的但非必要的，因为传递函数 $G(s)$ 与所定义的圆的交点并不是不稳定的。临界圆的圆心为

$$c=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right]=-\frac{k_1+k_2}{2k_1k_2}$$

其半径为 $\frac{k_2-k_1}{2k_1k_2}$。若 $k_1=0$，则临界圆退到由 $\mathrm{Re}\{G\} \geqslant -\frac{1}{k_2}$ 定义的半平面。

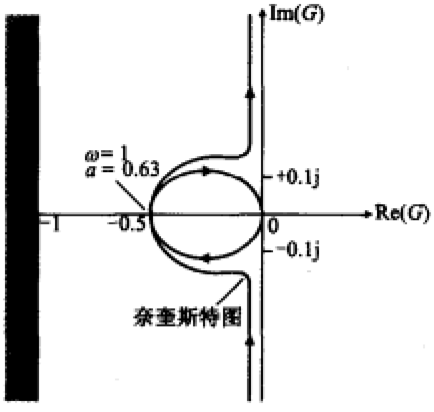


图 9-55 奈奎斯特图和圆判据

圆判据和描述方程是密切相关的。事实上，对于在扇区内的时变奇非线性，其 DF 为实数的情况而言，其描述函数满足关系式

$$k_1 \leqslant K_{\mathrm{eq}}(a) \leqslant k_2, \quad \text{对于任意 } a \text{ 值} \tag{9-110}$$

于是

$$-\frac{1}{k_1} \leqslant -\frac{1}{K_{\mathrm{eq}}(a)} \leqslant -\frac{1}{k_2} \tag{9-111}$$

且描述函数的负倒数的图位于临界圆内。这可从如下的上下界限看出：

$$K_{\mathrm{eq}}(a)=\frac{2}{\pi a}\int_0^{\pi} f(a\sin(\omega t))\sin(\omega t)\mathrm{d}(\omega t) \geqslant \frac{2k_1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(\omega t)\mathrm{d}(\omega t)=k_1 \tag{9-112}$$

$$K_{\mathrm{eq}}(a)=\frac{2}{\pi a}\int_0^{\pi} f(a\sin(\omega t))\sin(\omega t)\mathrm{d}(\omega t) \leqslant \frac{2k_2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(\omega t)\mathrm{d}(\omega t)=k_2 \tag{9-113}$$

等效增益分析和描述函数得到了相同的结果。若我们用描述函数的增益，则极限环的振幅可用 DF 预测。两种等效增益法都可用于判断稳定性，但正如我们看到的，圆判据可用于时变非线性。

例 9.19 用圆判据判断稳定性

考虑例 9.7 中的系统。用圆判据判断系统的稳定性。

解：相关的扇区与例 9.18 中的相同。该临界圆退到由 $\mathrm{Re}(G) \leqslant -1$ 定义的半平面，如图 9-55 所示。因为奈奎斯特图完全位于临界圆的右侧，故系统是稳定的。

小结

- ☐ 通过考虑一个在平衡点附近很精确的小信号线性模型，非线性运动方程可用线性方程来逼近。
- ☐ 在很多情况下，一个非线性的反向可用来对系统进行线性化。
- ☐ 通过把非线性当作一个可变增益，不含动态环节（如饱和）的非线性可用根轨迹法进行分析。
- ☐ 根轨迹法可用来求解带无记忆非线性的极限环特性，且可得到与用描述函数法相同的结果。
- ☐ 描述函数法本质是一种启发式的方法，其目的是为找出一个非线性元素的频率响应函数。
- ☐ 仅含单个非线性元素的系统的稳定性可用描述函数法来研究。
- ☐ 描述函数可用来预测反馈系统的周期解。
- ☐ 奈奎斯特图和描述函数可一起用来求极限环的特性。
- ☐ 用状态空间描述的非线性系统的稳定性可用李雅普诺夫法研究。
- ☐ 圆判据为稳定性提供了一个充分条件。

复习题

1. 为什么用线性模型来近似一个受控对象的物理模型（通常为非线性的）？
2. 怎样将辐射热传递的非线性系统方程 $\dot{T} = T^4 + T + u$ 线性化？
3. 作为热源的电灯具有非线性，其实验所得的输出功率与输入电压的关系为 $P = V^{1.6}$。在反馈控制系统的设计中你将如何处理这个非线性问题？
4. 什么是积分漂移？
5. 为什么说抗漂移电路重要？
6. 用增益为 1、上下限为 ±1 的非线性饱和函数，绘制一个有饱和效应的执行器框图，其增益为 7、上下限为 ±20。
7. 什么是描述函数，它与传递函数有怎样的关系？
8. 应用描述函数法时有哪些潜在的假设？
9. 什么是非线性系统中的极限环？
10. 怎样求出实验室中的非线性系统的描述函数？
11. 什么是有界卫星姿态控制的最短时间控制策略？
12. 怎样使用两种李雅普诺夫法？

习题

9.2 节习题：用线性化进行分析

9-1 图 9-56 给出了一个简单的摆系统，其绳索缠在一个固定的圆筒上。系统的运动用微分方程描述为

$$(l+R\theta)\ddot{\theta}+g\sin\theta+R\dot{\theta}^2=0$$

其中

$l=$ 绳索竖直部分的长度；
$R=$ 圆筒的半径。

(a) 写出该系统的状态变量方程。

(b) 在 $\theta=0$ 点附近线性化其方程，并证明对 l 于 θ 的小值，系统方程简化为单摆方程，即 $\ddot{\theta}+(g/l)\theta=0$。

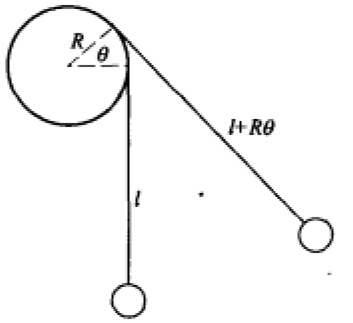


图 9-56 缠在一个固定圆筒的绳索运动

9-2 图 9-57 所示的电路含有一个非线性 G 使得 $i_G=g(v_G)=v_G(v_G-1)(v_G-4)$。其状态微分方程组为

$$\frac{di}{dt}=-i+v$$

$$\frac{dv}{dt}=-i+g(u-v)$$

其中 i 和 v 是状态变量，u 是输入。

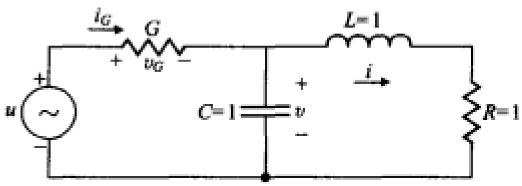


图 9-57 题 9-2 的非线性电路

(a) $u=1$ 时存在一个平衡状态，得到 $i_1=v_1=0$。求其他两组产生平衡状态的 v 和 i。

(b) 关于平衡点 $u=1, i_1=v_1=0$，求系统的线性化模型。

(c) 求出另两组平衡点的线性化模型。

9-3 考虑如图 9-58 所示的电路；u_1 是电压源，u_2 是电流源；R_1 和 R_2 是非线性电阻，其特性如下：

电阻 1：$i_1=G(v_1)=v_1^3$

电阻 2：$v_2=r(i_2)$

这里的函数 r 如图 9-59 所定义的。

(a) 证明电路的方程可写作

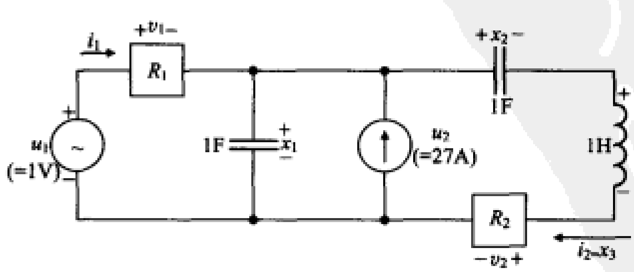


图 9-58 一个非线性电路

$$\dot{x}_1 = G(u_1 - x_1) + u_2 - x_3$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_1 - x_2 - r(x_3)$$

假定我们有 1 V 的恒定电压源 u_1 和 27 A 的恒定电流源 u_2（即 $u_1^o = 1, u_2^o = 27$）。求电路的平衡状态 $x^o = [x_1^o, x_2^o, x_3^o]^T$。对于一个特别的输入 u^o，系统的平衡状态定义为任何满足关系式 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$ 的常状态变量。

因此，始于其平衡状态之一的任何系统将始终保持，不确定地直到施加一个不同的输入。

(b) 由于扰动，初始状态（电容，电压，电感电流）与平衡状态略有不同，且独立源也同样如此；也就是说，

$$u(t) = u^o + \delta u(t)$$
$$x(t_0) = x^o(t_0) + \delta x(t_0)$$

关于在(a) 中求出的平衡状态网络进行小信号分析，用如下形式表达方程

$$\delta \dot{x}_1 = f_{11}\,\delta x_1 + f_{12}\,\delta x_2 + f_{13}\,\delta x_3 + g_1\,\delta u_1 + g_2\,\delta u_2$$

(c) 画出电路图及其相应的线性模型，给出元件的值。

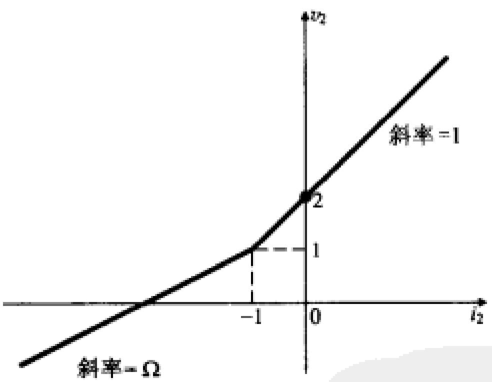


图 9-59 非线性电阻

9-4 考虑非线性系统

$$\dot{x} = -x^2 e^{-t} + \sin u \qquad x(0) = 1$$

(a) 假定 u^o，求解 $x^o(t)$。

(b) 求出关于(a) 中标称解的线性化模型。

9-5 反馈的线性化影响：我们已经看到反馈能减弱输入-输出传递函数相对于对象传递函数的敏感度，并能抑制扰动对对象的影响。在这个问题中，我们研究反馈的另外一个益处：它能使输入-输出响应比单独的对象开环响应更线性化。为简便起见，我们忽略对象所有动态因素并假定对象可用如下静态非线性来描述

$$y(t) = \begin{cases} u & u \leqslant 1 \\ \dfrac{u+1}{2} & u > 1 \end{cases}$$

(a) 假定我们用比例反馈

$$u(t) = r(t) + \alpha(r(t) - y(t))$$

其中 $\alpha \geqslant 0$ 是反馈增益。求闭环系统的以 $r(t)$ 表示的 $y(t)$ 的表达式。(这个函数被称为系统的非线性特性。) 分别画出 $\alpha = 0$(实际上是开环系统)，$\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$ 的非线性传递特性。

(b) 假定我们用积分控制：

$$u(t) = r(t) + \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))\mathrm{d}\tau$$

因此闭环系统为非线性的且动态的。证明：若 $r(t)$ 为一个常数，也就是 r，则 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = r$。所以，积分控制使闭环系统的稳态传递特性是*严格地线性的*。闭环系统能用从 r 到 y 的传递函数来描述吗？

9-6 这个问题表明线性化不总是奏效的。考虑系统

$$\dot{x} = \alpha x^3 \qquad x(0) \neq 0$$

(a) 求 $x(t)$ 的平衡点和解。

(b) 假定 $\alpha = 1$，线性模型是系统的有效表示吗？

(c) 假定 $\alpha = -1$，线性模型是系统的有效表示吗？

9-7 考虑图 9-60 中的沿一条直线匀速移动的物体。唯一知道的度量是物体的范围。系统方程组为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ z \end{bmatrix}$$

其中

$z =$ 常数

$\dot{x} =$ 常数 $= v_0$

$r = \sqrt{x^2 + z^2}$

求这个系统的线性模型。

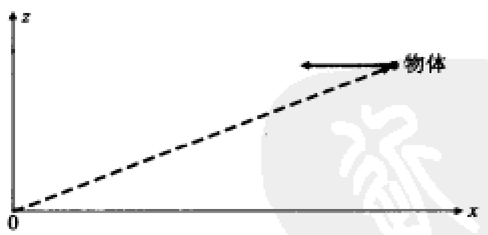


图 9-60 题 9-7 中移动物体的图

9.3 节问题：用根轨迹进行等效增益分析

9-8 考虑如图 9-61 所示的三阶系统

(a) 绘制系统关于 K 的根轨迹，写出你计算渐近角、出发角等的计算过程。

(b) 用绘图法，详细标出根轨迹和虚轴的交点。这个点的 K 值是多少？

(c) 假定，由于某些未知的机理，放大器的输出通过如下的饱和非线性给出（用一个比例增益 K 代替）：

$$u = \begin{cases} e, & |e| \leqslant 1 \\ 1, & e > 1 \\ -1, & e < -1 \end{cases}$$

定性地描述你期待系统对单位阶跃输入的响应将是怎样的。

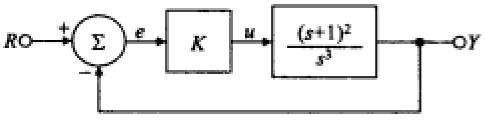


图 9-61　题 9-8 的控制系统

9.4 节习题：用频率响应：描述函数，来进行等效增益分析

9-9　计算图 9-6c 所示的带死区非线性的滞后环节的描述函数。

9-10　计算图 9-6d 所示的带死区非线性的增益的描述函数。

9-11　计算图 9-6e 所示的预载弹簧或库仑加上粘性摩擦力非线性的描述函数。

9-12　考虑如图 9-62 所示的组成一个"楼梯"的量化函数。求这个非线性的描述函数并编写 MATLAB. m 函数来输出其描述函数。

9-13　推导图 9-63 所示的理想触点控制器的描述函数。它由频率决定吗？若它有时间延迟或滞后，则它由频率决定吗？

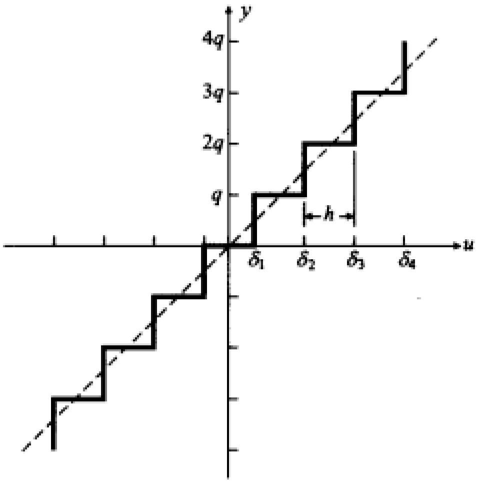


图 9-62　题 9-12 的量化非线性

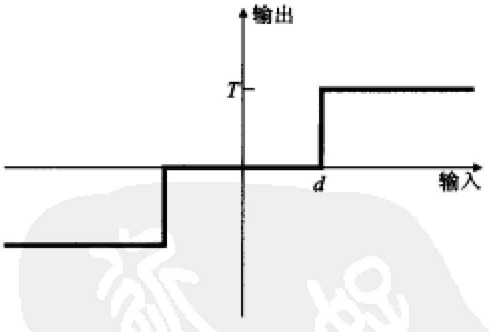


图 9-63　题 9-13 的触点控制器

大致画出对于不同振幅的输入，其输出的时间史，并求出对于这些输入的描述函数值。

9-14　如图 9-64 所示的惯性平台的触点控制器，其中：

$$I = 0.1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\frac{I}{B} = 10\ \text{s}$$

$$\frac{h}{c} = 1$$

$$\frac{J}{c} = 0.01\ \text{s}$$

$$\tau_L = 0.1\ \text{s}$$

$$\tau_f = 0.01\ \text{s}$$

$$d = 10^{-5}\ \text{rad}$$
$$T = 1\ \text{N}\cdot\text{m}$$

要求的稳定性分辨率大约为10^{-6} rad：

$$K\varphi_m > d,\quad \varphi_m > 10^{-6}\,\text{rad}$$

作为增益 K 的函数和控制器的 DF，讨论可能极限环的存在性、幅值和频率。对带迟滞的死区带问题重复上述过程。

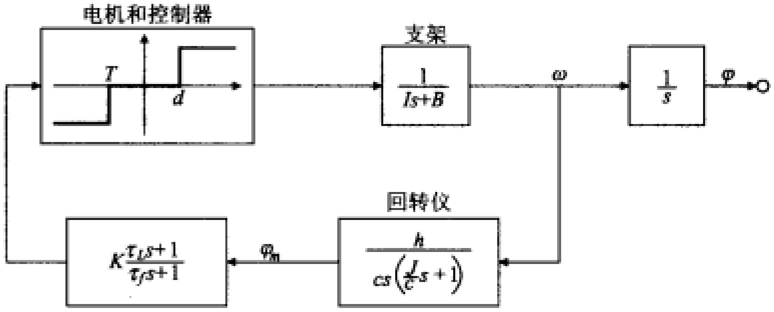


图 9-64　题 9-14 所示系统的框图

▲9.5 节习题：基于稳定性的分析和设计

9-15　计算实现受控对象最小时间控制的最优换向曲线和最优控制，并绘图。受控对象为：

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$
$$|u| \leqslant 1$$

用逆时法并消去时间变量。

9-16　绘制 $|u| \leqslant 1$ 的线性对象最小时间控制的最优换向曲线。受控对象为：

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u$$

9-17　绘制时间最优控制规律：

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + u$$
$$|u| \leqslant 1$$

并绘制 $x_1(0) = 3$ 和 $x_2(0) = 0$ 的轨迹。

9-18　考虑图 9-65 所示的热力学控制系统，其物理对象可能是一个房间、一个烤箱等。

(a) 极限环的周期是多少？

(b) 若规定 T_r 是一个慢增长的函数，绘制系统 T 的输出。给出当 T_r"大"时的解。

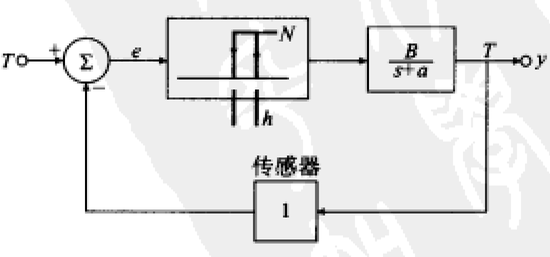


图 9-65　题 9-18 热力学系统

9-19　一些系统（如太空船）是共振频率远低于开关频率的弹簧质点系统，带很小摩擦的大电机驱动负载，等等，都可仅仅建模成一个惯性。对于一条理想开关曲线，绘制系统的相位图。开关函数为 $e = \theta + \tau\omega$。假定 $\tau = 10$ s，控制信号 $= 10^{-3}$ rad/ s^2。现在根据以下条件绘制出结果：

(a) 死区；

(b) 死区加滞后；

(c) 死区加时延 T；

(d) 死区加一个常量扰动。

9-20　计算带延迟的卫星姿态控制极限环的振幅，其延迟为：

$$I\ddot{\theta} = Nu(t-\Delta)$$

用

$$u = -\operatorname{sgn}(\tau\dot{\theta} + \theta)$$

绘制极限环的相平面轨迹和给出 θ 最大值时 θ 的时间曲线。

9-21　考虑如图 9-66 所示的零摩擦的质点摆。用等倾线法作指导，绘制运动的相平面图。特别注意邻近 $\theta = \pi$ 的地方。指出相应于振子旋转的轨迹而不是来回振荡的轨迹。

9-22　画出系统的相轨迹，系统为：

$$\ddot{x} = 10^{-4}\mathrm{m/s^2}$$

在 $\dot{x}(0) = 0, x(0) = 0$ 与 $x(t) = 1\mathrm{mm}$ 之间。用图形法从抛物线上比较你所得的解和两个不同的间隔值，求过渡时间 t_f 和精确解。

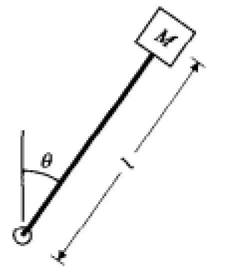


图 9-66　题 9-21 的摆

9-23　考虑一个系统，其运动方程为

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin\theta = 0$$

(a) 上式对应于什么物理系统？

(b) 绘制这个系统的相位图。

(c) 画出 $\theta_0 = 0.5\ \mathrm{rad}$、$\dot{\theta} = 0$ 的一条轨迹。

9-24　考虑一个非线性竖直摆，其基座有一个电机作为执行器。设计一个反馈控制器来稳定该系统。

9-25　考虑系统

$$\dot{x} = -\sin x$$

证明其原点是渐近稳定平衡点。

9-26　一阶非线性系统被描述为 $\dot{x} = -f(x)$，其中 $f(x)$ 是一个满足如下条件的连续微分非线性函数：

$$f(0) = 0$$
$$f(x) > 0 \quad , \quad x > 0$$
$$f(x) < 0 \quad , \quad x < 0$$

用李雅普诺夫函数 $V(x) = x^2/2$ 来证明系统在原点($x = 0$)附近是稳定的。

9-27　使用李雅普诺夫函数

$$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{I}$$

求出如图 9-67 所示的系统稳定时 K 的范围。将你所得到的 K 的稳定值与用劳斯稳定判据所得结果进行比较。

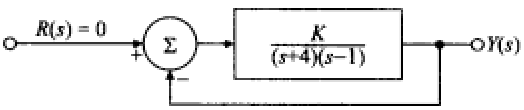


图 9-67 题 9-27 的控制系统

9-28 考虑系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2u\\x_2(x_2+u)\end{bmatrix},\quad y=x_1$$

求出输入 $u(t)=\alpha y(t)+\beta$ 能将输出 $y(t)$ 保持在 1 附近的所有 α 和 β 值。

9-29 考虑非线性自治系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2(x_3-x_1)\\x_1^2-1\\-x_1x_3\end{bmatrix}$$

(a) 求出平衡点。

(b) 求出关于每个平衡点的线性化的系统。

(c) 对于(b) 部分的每种情况，关于非线性系统在平衡点附近的稳定性，李雅普诺夫理论告诉我们了什么？

9-30 范得波方程：考虑由如下非线性方程描述的系统：

$$\ddot{x}+\varepsilon(1+x^2)\dot{x}+x=0$$

常量 $\varepsilon>0$。

(a) 证明该方程可用下列形式表达[Liénard 或(x,y) 平面]

$$\dot{x}=y+\varepsilon\left(\frac{x^3}{3}-x\right)$$

$$\dot{y}=-x$$

(b) 用李雅普诺夫函数 $V=\frac{1}{2}(x^2+\dot{x}^2)$，并绘制用在 Liénard 平面内的 V 预测的稳定性区域。

(c) 画出(b) 部分中的轨迹，并指出趋于原点的初始条件。用不同的初始条件 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$ 在 Simulink 中仿真该系统。考虑两种情况，$\varepsilon=0.5$ 和 $\varepsilon=1.0$。

第 10 章　控制系统设计:原理与实例研究

设计原理介绍

在第 5 章～第 7 章中,我们介绍了基于根轨迹法、频率响应法以及状态变量法分析和设计反馈系统的技术。到目前为止,对于一个大型的系统,我们还只能考虑其孤立的、理想化的方面,并且每次只能着眼于一种分析方法。而在这一章,我们将回到第 4 章的主题——反馈控制的优势,以便使用在第 5 章、第 7 章、第 9 章已经学过的前沿工具来重新考虑控制系统设计中的整体问题。在这个实例研究型部分,我们将把这些工具应用于一些复杂的、现实存在的应用当中。

全面、逐步的设计实现方法服务于两种意图:为实际的控制问题提供一个有效的出发点,以及提供设计过程中的有效检查点。这一章仅仅介绍一个整体意义上的实例解决途径。

全章概述

本章以 10.1 节的"逐步设计法"开篇,这种方法具有充分的概括性,因此适用于各种控制设计过程,这一节同时也提供了一些有用的定义和指导方向。然后我们将把设计过程应用于 4 个现实生活中的复杂实例,分别是:卫星的飞行姿态控制系统设计(10.2 节)、波音 747 的横向与纵向控制(10.3 节)、汽车引擎中的油-气比控制(10.4 节)和磁盘驱动器的控制(10.5 节)。

10.1　控制系统设计概述

对于许多动态系统来说,控制工程学是设计过程中的重要部分。如第 4 章所述,良好的反馈可以使系统稳定,减少由于扰动输入引起的误差,减少因控制输入带来的跟踪误差,以及减少对于内部系统参数的微小变化的闭环传递函数敏感度。通过这些需要反馈控制的情况,概括出一条能够带来良好解决效果的控制系统设计途径是可能的。

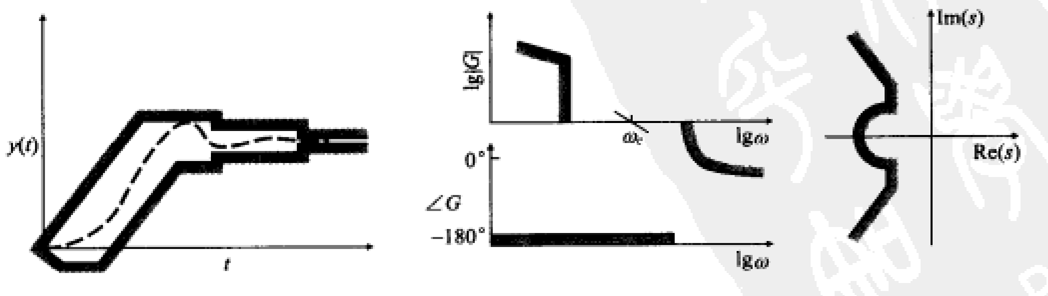
在描述这一途径之前,我们希望强调:控制的目的是协助产品制造或者生产过程

(例如机械、机器人、化工厂、飞行器或者其他设备)来完成这项工作。其他领域的工程师们在设计过程中正在越来越多地在其计划早期重视控制所起到的作用。于是,越来越多的系统采用这样的设计方法,以至于它们离开反馈便无法正常运行。这一点在高性能飞行器设计中表现尤甚,控制与结构学以及空气动力学一起对于它的平稳飞行起到核心的作用。本书不可能对这样一个整体的设计进行全面描述,而是让你认识到,这种方法不仅对于控制系统设计这一特定任务起作用,它在整个企业中也会扮演至关重要的角色。

控制系统设计以建议的生产或者生产过程开始,这些过程的良好动态效果依赖于维持稳定性、扰动调节、跟踪精度和减少参数变化影响的反馈。我们将对设计过程给出一个足够概括的纲要,使它对于小到电子放大器大到绕地轨道的大型装置都能适用。显而易见,为具有如此广泛的适应性,我们的概述在物理描述上是含糊不清的,而对反馈控制问题是明确的。为了更好地展示结果,我们将把控制设计问题分为一系列的典型步骤。

步骤 1 理解整个过程,并把对动态性能需求转化为用时间、频率或者零极点指标。理解这个过程的重要性,即什么是期望做的、多大的系统误差是允许的,如何描述期望的指令等级以及干扰信号的等级,以及物理性能和局限性这些无论怎样强调都是不过分的。然而,在这样的一本书中,把整个过程看成线性时不变的对任意大小的输入都适用的传递函数是很容易的,并且我们可能会忽视一个事实,那就是线性模型对于实际系统来说只是一个非常有局限的表述形式,仅对小信号、短暂时长和特定的环境状况是有效的。不要混淆现实系统与近似系统。你必须能够首先使用满足特定目标的简化模型,然后产生一个精确的模型或者实际的物理系统来真实地验证设计性能。

这一步的典型结果是系统在有界区间内产生一个阶跃响应(见图 10-1a),即满足某种限制的开环频率响应(见图 10-1b),或者在某个限制边界左边的闭环极点(见图 10-1c)。



(a) 时域响应 (b) 频域响应 (c) 零极点指标

图 10-1 巡行控制模型

步骤 2 选择传感器。在传感器的选择中,要考虑哪些变量对控制来说是重要的,

以及哪些变量是物理上可以测量的。举例来说:一架飞机的引擎内的临界温度需要控制,但是不能在引擎运行过程中直接测量。必须选择能够对这些关键变量进行间接测量的传感器。对扰动来说,选择传感器也是很重要的。有时,特别在化学反应过程中,直接测量负载的扰动量是有益的,因为若能将该信息反馈给控制器,就可改善系统的性能。

以下是一些影响传感器选择的因素。

传感器的数量和位置:	选择满足最低需求的传感器和其最佳的位置
工艺:	电的或者磁的、机械的、机电的、光电的、压电的
函数性能:	线性度、偏差、精确度、带宽、分辨率、动态范围、噪声
物理特性:	重量、尺寸、强度
品质因素:	可靠性、耐久性、可维护性
成本:	费用、实用性、测试和维修的便利

步骤3　选择执行器。为了控制一个动态系统,很明显,你必须要能够影响系统的响应。执行器就是起这种作用。在选择执行器之前,先考虑对哪些变量会被影响。例如,在一架飞行器中,活动表面可以有许多种结构,并且它们对于飞行器的性能以及可控性的影响是很大的。喷气口的位置或者其他转矩装置也是航天器控制设计的一个主要组成部分。

当受控制的变量已经选好后,就需要考虑其他因素了。

执行器的数目和位置:	选择必要的执行器以及它们的最佳位置
工艺:	电的、液压的、气压的、热力的、等等
函数性能:	最大允许的力拒、线性范围、最大允许速度、功率、效率
物理特性:	重量、尺寸、强度
品质因素:	可靠性、耐久性、可维护性
成本:	费用、实用性、测试和维修的便利

步骤4　构建线性模型。选择最好的过程、执行器和传感器;确定感兴趣的平衡点;构建满足第一步确定的频率范围的小信号模型。你还应该用可能的实验数据来验证该模型。为了能利用所有可能的工具,把模型用状态变量形式、零极点形式以及频率响应形式表达。我们知道,MATLAB以及其他计算机辅助控制系统设计软件包能够在这些形式之间互相转化。如果需要,可简化和降低模型的阶次。还可量化模型的不确定性。

步骤5　尝试用简单的PID控制或者超前滞后设计方法。为了获得对设计问题复杂度的初始估计,绘制频率响应曲线(伯德图)和关于受控对象增益的根轨迹。如果装置—执行器—传感器模型是稳定的,并且有最小相位,则使用伯德图可能是最有用的;对于其他情况,根轨迹会提供关于右半平面(RHP)特性非常重要的信息。在任何一种情况下,要尽力用简单的超前—滞后的控制器来满足指标要求,如果对稳态误差响应

有要求的话，还可以包括积分控制。如果必要的传感器信息是可用的，别忘了给扰动加上前馈。考虑到传感器噪声的影响，可以把超前网络和直接的速度传感器进行对比，确定哪个设计更好。

步骤6 评估/修正装置。基于简单的控制设计，评估系统性能的不良特性的根源。如果对系统进行改进设计是必要的，那么需要返回到第一步，重新评估指标、过程的物理结构、前面设计中的执行器和传感器的选择。比如，在许多运动控制问题中，测试第一次通过的设计后，你将发现一些振动状态使得设计难以满足问题的初始指标要求。可以通过加入刚性部件或者无源阻尼器来改变受控对象的结构，这比单单用控制策略更容易满足系统指标。另一种方案是移动传感器使之处于振动的状态，这样就不会对运动提供反馈。而且，相比其他的工艺（如电的），有一些执行器工艺（比如液压的）具有更多的低频振动，这意味着需要改变执行器工艺。在数字实现中，通过修正传感器—控制—执行器系统的结构，来减少延迟时间是可能的，因为延迟时间往往会导致系统稳定性的下降。在热力学系统中，常常会通过材料的替换来修正热容量或者导热性来改进控制系统的设计。要考虑设计过程的每一个部分，不仅仅是控制逻辑，使系统以最低廉的代价满足各项指标。若修正了装置，那么要回到步骤1重新设计。如果设计是令人满意的，则转入步骤8；否则尝试步骤1。

步骤7 尝试最优设计。如果反复试验得到的补偿器不能给出令人满意的系统性能，那么就考虑基于最优控制的设计法。对称的根轨迹会给出可能的根的位置，由此可以选择出满足响应要求的控制极点；也可以选择出兼顾传感噪声和过程噪声的估计器极点。画出相应的开环频率响应和根轨迹图来估计该设计的稳定裕度以及对参数改变的鲁棒性。不断修正极点位置直到出现最佳的折中结果。这一步常常还包括返回到采用不同的代价度量的对称根轨迹，或者直接用函数 lqr 和 lqe 来计算。最优控制的另一个方法是给出一个带有未知参数的固定结构的控制器，将性能代价函数用公式表示，并用参数最优化方法来求解理想的参数值。

把实现的最佳频率响应的最优控制设计与在步骤5用传递函数方法设计得到的结果进行比较。选择较好的一种结果，然后进入步骤7。

步骤8 建立计算机模型，计算（仿真）设计性能。在过程改进、执行器和传感器选择以及控制器设计都达到了最佳的折中之后，就可以为系统建立计算机模型。建立该模型需要考虑重要的非线性因素，例如执行器饱和，实际噪声源，还有系统运行过程中期望的参数变化。仿真中的灵敏度会有可能会导致设计重新回到步骤5，甚至是步骤2。除非仿真出现良好的稳定性和鲁棒性，否则设计还要反复地进行下去。参数优化是仿真的一部分，此时计算机会调节参数使之出现最好效果。在设计的前期，仿真的模型相对简易；随着设计的进行，模型会更完善、更细致。这一步可以为模拟控制器建立数字等效，详见第4章和第8章。为了满足数字化效果，对控制器参数进行修正是很有必要的。这将使最终的设计通过数字处理器逻辑得以实现。如果仿真证实设计结果令人满意，准入步骤9，否则，返回步骤1。

步骤 9　制作样机。作为实际生产之前的最后检验，一般会制作样机并进行测试。此时可以检验模型的质量，排查未知的振动和其他状态，进而思考可以改善设计的方法。用嵌入式软硬件执行控制器功能。必要的话，还要调整控制器。测试完成后，如果时间、经费和思路允许，可以重新考虑传感器、执行器和执行过程等问题，并回到步骤 1。

这份概要是良好实践的一种近似；其他工程师的实现方法可能有所变化。在某些场合，也许会采取不同的顺序、忽略步骤或者增加步骤。受系统本身特性影响，仿真和样机制作会有很大不同。对于难以测试和重建的样机系统（如卫星），或者失败会导致重大危险的系统（如高速离心机的动态稳定或者人类登月），大多数设计的修正是通过仿真完成的。可能采用数字化仿真，比例实验模型，或者在仿真环境下的真实尺寸实验模型。对于那些容易建立和修正的系统（如汽车燃料系统的反馈控制），仿真的步骤常全部省略；设计的证实和完善可转入到样机测试时完成。

之前（第 6 章）的讨论中提到的一个重要问题是考虑**改变装置自身**。在许多情况下，适当的改变装置能够加大阻尼或者增加刚度、改变模式的形状、减少系统对扰动的响应、减少库仑摩擦力，改变热容量或者导热率等等。根据作者的经验，通过专门的例子进行这方面的研究是非常值得的。例如半导体晶片制作过程，支撑晶片的边缘环被认为是闭环反馈控制中的限制性因素。调整边缘环的厚度，使用不同的涂层材料以减少热损失，同时重置一个更靠近边缘环的温度传感器，这些会给控制效果带来重大的改善。另一个应用例子，薄膜制作工程，简单地改变两个输入流的顺序，能大大加强中间生成物和氧化剂的混合，提高薄膜的均匀度。在用射频等离子体实现的物理蒸汽沉积应用中，将目标的形状修正为弯曲形状，可以抵消腔室的几何影响，为蒸馏的均匀性带来实质性的改善。最后一个例子，液压轴控制问题，加入陶瓷绝缘式的油温控制以及飞轮外壳的温度槽，使扰动的幅度降低了几阶，这是单靠反馈控制是不可能达到的。至于宇宙航空应用中，控制是一种时候考虑的，该反馈控制问题变得非常复杂，从而导致闭环系统的性能不佳。讨论这一问题的思想是必须考虑改变装置本身使得控制问题简化，并提供最大的闭环系统性能。

通常的系统设计方法和“不按常理出牌”对于控制系统来说都被证明是低效率和不完善的。一个较有前景的更好方法是让控制工程师从项目开始就参与，以对控制系统的难度提供早期的反馈。控制工程师可以对执行器和传感器的选择提供有价值的反馈，甚至对于装置提出改进意见。在图纸成型之前，即使改变装置的设计对控制系统性能改善是很有效的。针对简单的系统模型的闭环性能研究可在设计初期进行。

设计过程中一个众所周知的事实是，在给定的范围内设计要经常从早期模型中吸取经验。因此，好的设计是不断完善的，而不是在第一次通过后，就以最佳的形式出现。我们将用一些实例来说明这种方法（10.2 节到 10.6 节）。为了便于参考，我们总结几个步骤如下。

控制设计步骤总结：

（1）理解过程以及性能要求。

(2) 选择传感器的类型和数量,考虑安装位置、工艺和噪声因素。

(3) 选择执行器的类型和数量,考虑安装位置、工艺、噪声和功率。

(4) 为控制过程,执行器,传感器建立线形模型。

(5) 基于超前滞后补偿概念或者 PID 控制建立简单的尝试性设计。如果满足要求,转入步骤 8。

(6) 考虑修改装置自身以改善闭环控制。

(7) 尝试基于最优控制或者其他判据的极点配置设计。

(8) 对设计进行仿真,考虑非线性、噪声、参数变化的影响。如果效果不令人满意,再返回步骤 1 重新设计。为改善闭环控制,改进装置本身。

(9) 制作样机并测试。若不能令人满意,则返回步骤 1 重做。

10.2 卫星姿态控制设计

我们的第一个例子源于太空项目,用来满足控制卫星在绕地轨道的飞行指向和飞行姿态的需要。我们将按照设计概要一步步分析,并会涉及一些在此系统控制中应该考虑到的因素。

步骤 1 理解控制过程和它的性能指标。卫星示意图如图 10-2 所示。我们想象这个飞行器有一项天文调查任务,要求传感器箱能够精确定位。这个箱必须尽可能放在最安静的环境中,即要求能与主控设备的振动和电气噪声隔离开来,以及与电源、推进器和传动齿轮相隔离。我们假定卫星的的结构模型可以看作用活动吊杆连在一起的两大部件构成。在图 10-2a 中,卫星姿态角 θ_2 是星体传感器和仪表箱的夹角,θ_1 是卫星主体结构与星体的夹角。图 10-2b 是卫星的等效机械系统示意图,其中传感器放置在夹角为 θ_2 的圆盘上。由计算可知,由太阳压强、微小陨石以及轨道偏移引发的扰动转矩可以忽略不计。当需要指向另一个方向的星体时,定位的要求将提高。这可以通过采用瞬态调整时间为 20s 和超调量不大于 15% 的动态性来满足。卫星的动态性应包括可变的参数。当方程给出以后,卫星控制系统就必须在预定范围内的任何参数值均能获得满意的性能。

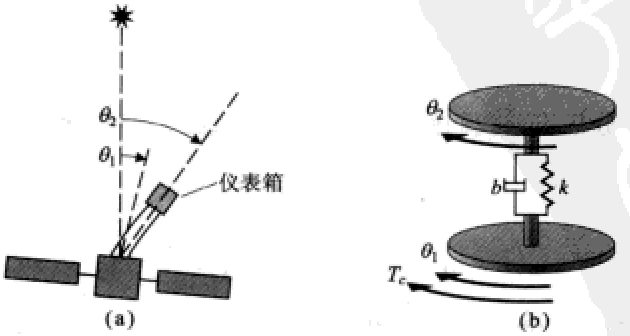


图 10-2 卫星和它的双体模型图

步骤2　选择传感器。为定向科学设备箱，有必要测量出它的姿态角。为此，建议使用星体追踪器，该系统收集特定星体的图像，并使其处于望远镜视界的焦点上。该传感器提供的噪声相对较大但是(平均数据)很精准，该读数与θ_2——即仪表箱和目标的夹角成正比例。由于星体追踪器上的超前网络会剧烈地放大噪声，为了稳定控制系统，使用一个速度陀螺仪来给出不含噪声的θ_2的读数。此外，速度陀螺仪可以使得星体跟踪器在捕获目标星体图像之前的运动保持稳定。

步骤3　选择执行器。选择执行器主要着眼于精度、可靠性、重量、功率要求和仪器寿命。施加力矩的几种方法有冷气喷气发动机、反力式叶轮或反应式陀螺仪、磁转矩仪和重力梯度仪。喷气发动机的功率最大但精度最低。反力式叶轮非常精确但只能传递冲量，所以要求喷气发动机或磁转矩仪不时地提供冲量。磁转矩仪提供相对较低能级的力矩，并只适用于那些低空运行的卫星。重力梯度仪也只能提供一个微小的转矩，这不仅限制了响应速度，还对卫星的外形有严格的要求。为了达到的目标，我们选择响应快速、精度足够的冷气式喷气发动机。

步骤4　构建线形模型。如图10-2所示，我们假设卫星是两大部件通过转矩常数为k，粘滞阻尼系数为b的弹簧连接而成的装置。

运动方程为

$$J_1\ddot{\theta}_1+b(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)+k(\theta_1-\theta_2)=T_c \tag{10-1a}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2+b(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1)+k(\theta_2-\theta_1)=0 \tag{10-1b}$$

其中T_c是作用在主体设备上的控制转矩。设惯量$J_1=1, J_2=0.1$，则传递函数$G(s)$为

$$G(s)=\frac{10bs+10k}{s^2(s^2+11bs+11k)} \tag{10-2}$$

若选择

$$\boldsymbol{x}=[\theta_2\quad \dot{\theta}_2\quad \theta_1\quad \dot{\theta}_1]^T$$

作为状态矢量，利用公式(10-1)，设$T_c\equiv u$，发现状态变量形式的动态方程式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{k}{J_2} & -\frac{b}{J_2} & \frac{k}{J_2} & \frac{b}{J_2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{k}{J_1} & \frac{b}{J_1} & -\frac{k}{J_1} & -\frac{b}{J_1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \frac{1}{J_1}\end{bmatrix}u \tag{10-3a}$$

$$y=[1\quad 0\quad 0\quad 0]\boldsymbol{x} \tag{10-3b}$$

对支架的物理分析引导我们假设参数k和b随温度的波动而变化，而受下述的条件的限制：

$$0.09\leqslant k\leqslant 0.4 \tag{10-4a}$$

$$0.038\sqrt{\frac{k}{10}}\leqslant b\leqslant 0.2\sqrt{\frac{k}{10}} \tag{10-4b}$$

因此，飞行器的固有谐振频率ω_n在1 rad/s到2 rad/s之间变动，阻尼比ξ在0.02～0.1之间变动。

为变化参数选择额定值

对于参数易变的系统，一种控制设计方法是选择参数的标称值，对该模型进行设计，然后运用其他参数值来测试控制器的性能。此例选择标称值 $\omega_n=1,\xi=0.02$。这种依赖于经验和启发式分析的选择有些主观臆断。但是，需要注意的是，这些变量在它们各自的范围内取了最小值，因此，要满足期望的性能指标，这些值对应的装置是最难控制的。假设对于其他参数值来说，这一模型的设计也能很好地满足要求。（另一种方法是为模型的每个参数选择其平均值。）选择的参数值为 $k=0.091,b=0.0036$；同时 $J_1=1,J_2=0.1$，则标称方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -0.91 & -0.036 & 0.91 & 0.036\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0.091 & 0.0036 & -0.091 & -0.0036\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}u \tag{10-5a}$$

$$y=[1\quad 0\quad 0\quad 0]\boldsymbol{x} \tag{10-5b}$$

用 MATLAB 的 ss2tf 函数，得到相应的传递函数：

$$G(s)=\frac{0.036(s+25)}{s^2(s^2+0.04s+1)} \tag{10-6}$$

当初步设计完成后，仿真就应在参数可能的范围内进行，以保证设计的系统对参数的变化有足够的鲁棒性。式(3-53～3-55)表明，如果闭环极点有 0.5 rad/s 的自然频率、0.5 的阻尼比受控对象——即对应于 0.5 rad/s 的开环频率和 PM=50°的相位裕度，那就将满足系统动态特性的要求。我们将尝试满足这些设计标准。

步骤 5 *尝试用简单的 PID 控制或者超前滞后设计方法。*标称受控对象的比例增益根轨迹如图 10-3，伯德图如图 10-4。由图 10-4 可见，由于欠阻尼谐振频率比穿越频率的设计点大 2 倍，这可能是设计的一个难题。这种情况要求补偿，能够校正受控对象在谐振频率处的相位滞后。这种校正需要已知的谐振频率，而在本例中谐振频率是易变的。接下来的设计工作会有一定的困难。

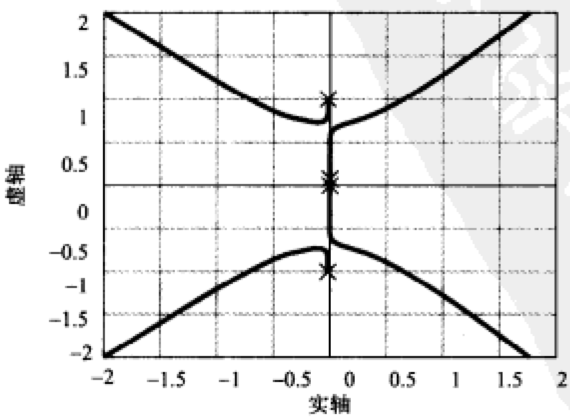


图 10-3 $KG(s)$的根轨迹

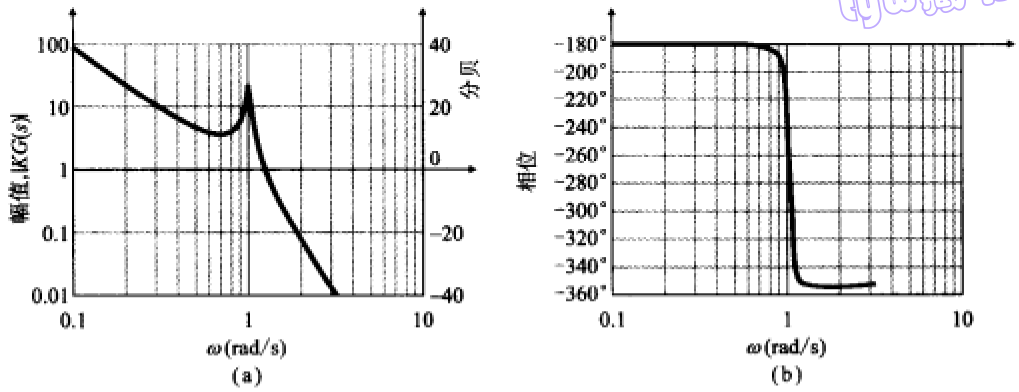


图 10-4　$K=0.5$ 的 $KG(s)$的开环伯德图

为了说明补偿设计的几个重要特点，我们首先忽略谐振，并做一个只适用于刚体的设计。设过程传递函数为 $1/s^2$，反馈为位置加微分（星体追踪器加速度陀螺仪）或者PD控制，其传递函数为 $D(s)=K(sT_D+1)$，响应目标为 $\omega_n=0.5$ rad/s，$\zeta=0.5$。选择一个合适的控制器为

$$D_1(s)=0.25(2s+1) \tag{10-7}$$

带有 D_1 的实际控制对象的根轨迹见图 10-5，伯德图见图 10-6。由图可见，虽然低频极点是合理的，但由于谐振，系统将不稳定。[①] 对此，我们采取降低期望的带宽、降低增益以放慢系统速度的简单做法，直到系统稳定。对于如此小的阻尼，必须放慢响应速度。实验结果证实：

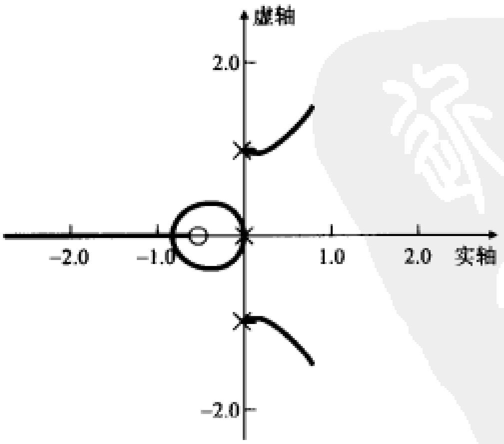


图 10-5　$KD_1(s)G(s)$的根轨迹

① 如果安装这个系统，执行喷气口将随着响应的增长而饱和。我们将采用 9.3 节用于非线性系统的方法来分析其响应。从分析得知，我们期望响应信号上升和执行器的增益下降，直至特征根会到 ω_n 附近的虚轴。由此得到的极限环将消耗掉用于控制的气体。

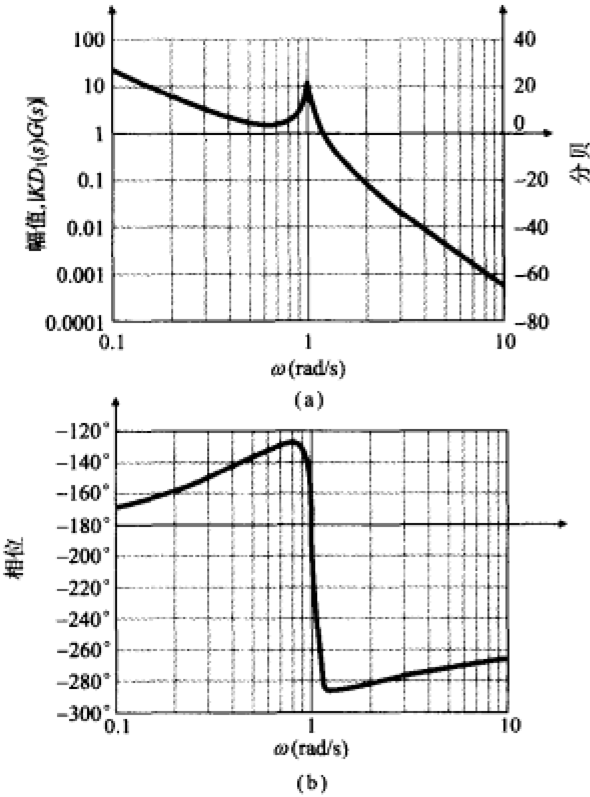


图 10-6　$KD_1(s)G(s)$的伯德图

$$D_2(s)=0.001(30s+1) \tag{10-8}$$

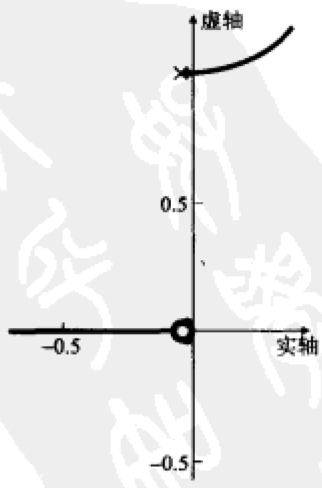


图 10-7　$KD_2(s)G(s)$的根轨迹

其根轨迹见图 10-7，伯德图见图 10-8。伯德图显示有 50°的相位裕度，而穿越频率 ω_c 仅为 0.04 rad/s。该频率值过低，不能满足调节时间的要求，但是，如果期望在谐振频率上的增益小于单位值以使该系统的增益稳定，那么低值穿越频率是必然的。

解决该问题的另一种方法是在欠阻尼极点附近设置零点，用零点将这些欠阻尼极点从右半平面拉回来。这种补偿在不良极点频率附近产生非常低增益的频率响应，在其余频段的增益是正常的。由于在频率响应图中看似有凹点，所以称为**陷波滤波器**(**notch filter**)。(在电子网络理论中也称**带阻滤波器**(**band reject filter**)。)带有陷波滤波器特性的 RC 电路如图 10-9 所示，极零点图如图 10-10 所示，频率响应如图 10-11 所示。陷波滤波器具有+180°的超前相位，可以用来补偿谐振的 180°相位滞后；如果陷波滤波器频率低于装置的谐振频率，系统相位在谐振频率附近保持在 180°以上。

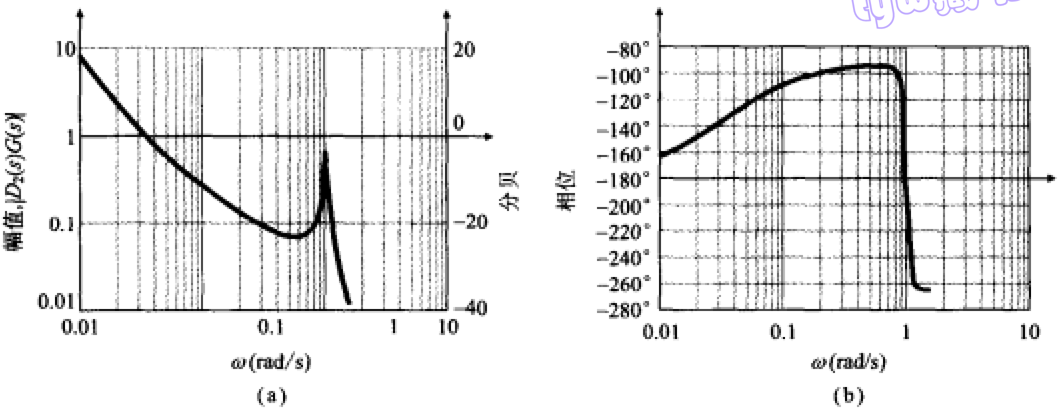


图 10-8　$D_2(s)G(s)$的伯德图

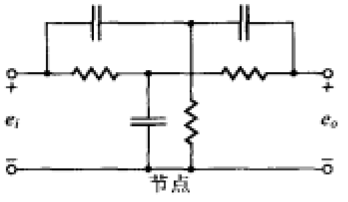


图 10-9　陷波滤波器的双 T 实现电路

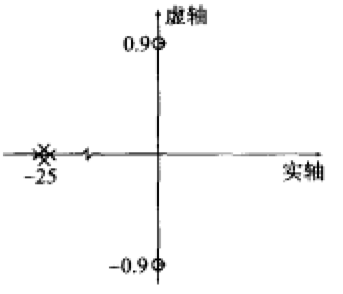


图 10-10　陷波滤波器的极-零点形式

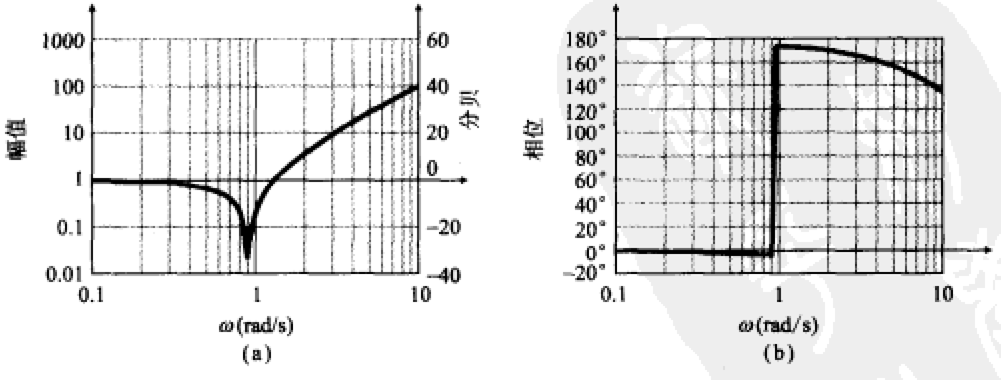


图 10-11　陷波滤波器的伯德图

根据这一原理，回到式(10-7)的补偿并加入陷波滤波器，得到修正的补偿器传递函数：

$$D_3(s)=0.25(2s+1)\frac{(s/0.9)^2+1}{[(s/25)+1]^2} \tag{10-9}$$

伯德图如图 10-12 所示，根轨迹如图 10-13 所示，单位阶跃响应如图 10-14 所示。

相对期望的性能指标而言，该设计的稳定时间过长，超调过大，但是该设计方法似是可行的；通过反复的试验，可以得到满意的补偿器。

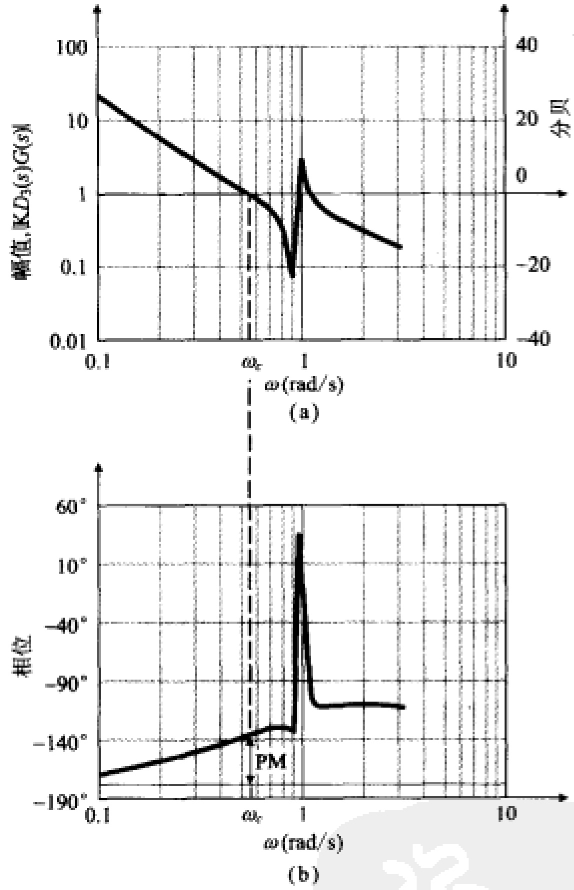


图 10-12　$KD_3(s)G(s)$的伯德图

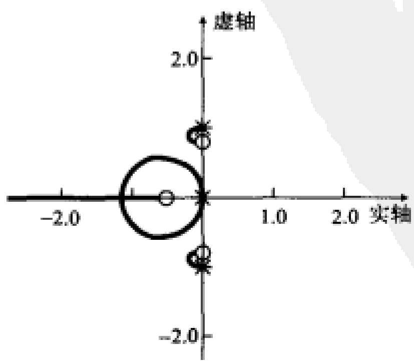


图 10-13　$KD_3(s)G(s)$的根轨迹

当参数在式(10-4)所规定的范围内变动时，系统希望补偿器产生满足要求的性能。通过观察根轨迹图 10-15 可以检验该设计的鲁棒性，该图采用式(10-9)的补偿器，装置的 $\omega_n=2$ 而非 1，即

$$\hat{G}(s)=\frac{(s/50+1)}{s^2(s^2/4+0.02s+1)} \tag{10-10}$$

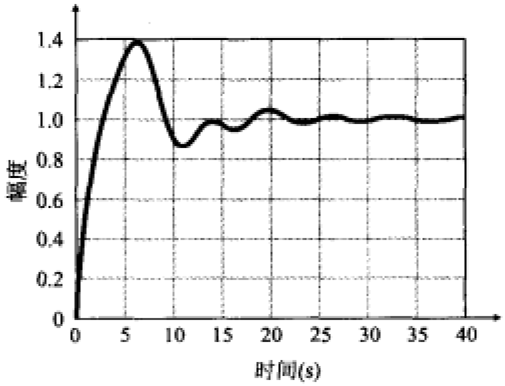


图 10-14　$\theta_2(0)=0.2$ 的情况下 $D_3(s)G(s)$ 的闭环阶跃响应

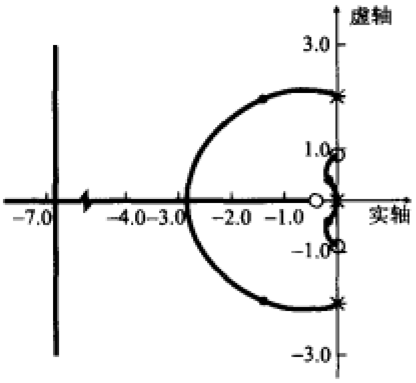


图 10-15　$KD_3(s)\hat{G}(s)$ 的根轨迹

如此即假定支架有足够的刚性。注意，此时低频极点仅有 0.02 的阻尼比。结合多个参数值，得到如图 10-16 和图 10-17 的频率响应和暂态响应。我们可以用陷波滤波器和速度反馈进行更多次的反复试验迭代过程，但是由于系统已足够的复杂，所以状态空间设计法看起来是比较可行的。接着转入步骤 6。

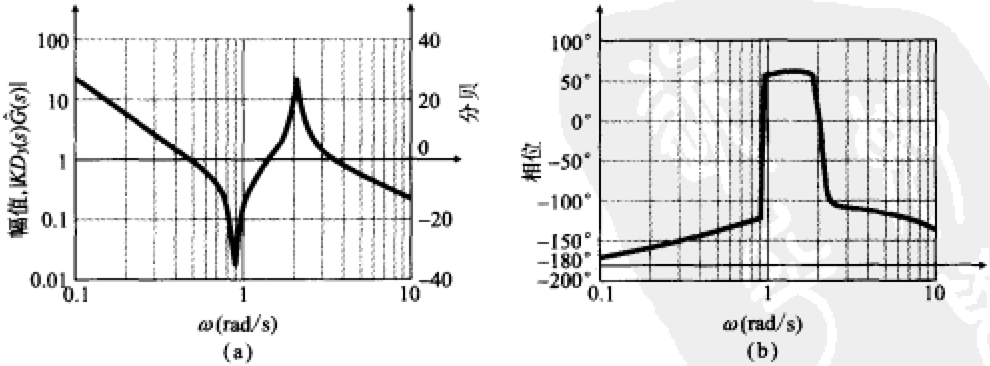


图 10-16　$KD_3(s)\hat{G}(s)$ 的伯德图

步骤 6　评估/修正装置。参照步骤 8 后面的控制讨论。

步骤 7　用极点配置法尝试最优控制。采用式(10-5)的动态方程的状态变量表达式，设计一个可以将闭环极点任意配置的控制器。当然，不加思索地应用极点配置法得到的设计要求非常大的控制量或对装置传递函数的变化非常的敏感。关于极点配置的更多信息，参见第 7 章；一个通常比较成功的方法是用对称根轨迹(SRL)得到最优

极点位置。图 10-18 给出了当前问题的对称根轨迹。为得到约 0.5 rad/s 的带宽，我们从中选择 $-0.45\pm0.34j$ 和 $-0.15\pm0.34j$ 的闭环控制极点。

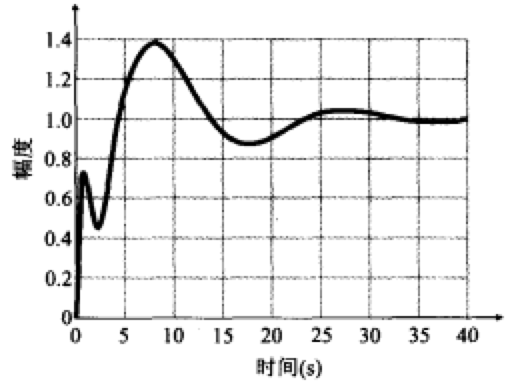


图 10-17 $D_3(s)\tilde{G}(s)$的闭环阶跃响应

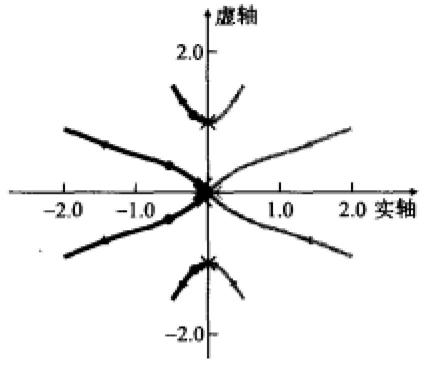


图 10-18 卫星的对称根轨迹

如前讨论，如果选择 $\alpha_c(s)$，从对称根轨迹中，用 MATLAB 的 place 函数得到的控制增益为

$$\mathbf{K}=[-0.2788 \quad 0.0546 \quad 0.6814 \quad 1.1655] \tag{10-11}$$

图 10-19 给出了标称装置参数和刚性弹簧对象模型的阶跃响应。下面用标称控制对象参量的对称根轨迹控制器设计的伯德图可以通过回路传递函数 $\frac{\boldsymbol{KX}(s)}{U(s)}=\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G}$ 计算(将回路在 u 处断开)，得到约 60°的相位裕度，如图 10-20 所示。虽然采用标称被控量的设计方法满足对响应速度的要求，若装置有刚性弹簧时，稳定时间要比期望的指标略有延长。在对称根轨迹上，我们也许可以通过选择另外的点更好地兼顾标称值和刚性弹簧问题；而此时我们并不知道。设计者必须面对诸如此类的选择并为当前问题选择最好的折中方案。

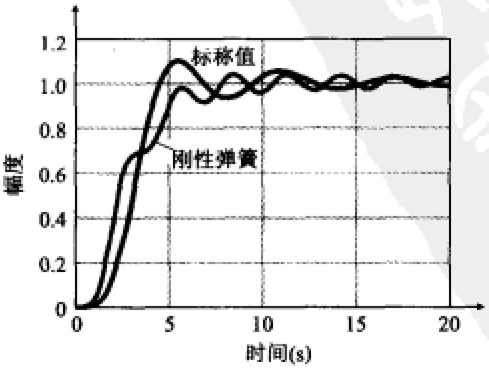


图 10-19 对称根轨迹设计的闭环阶跃响应

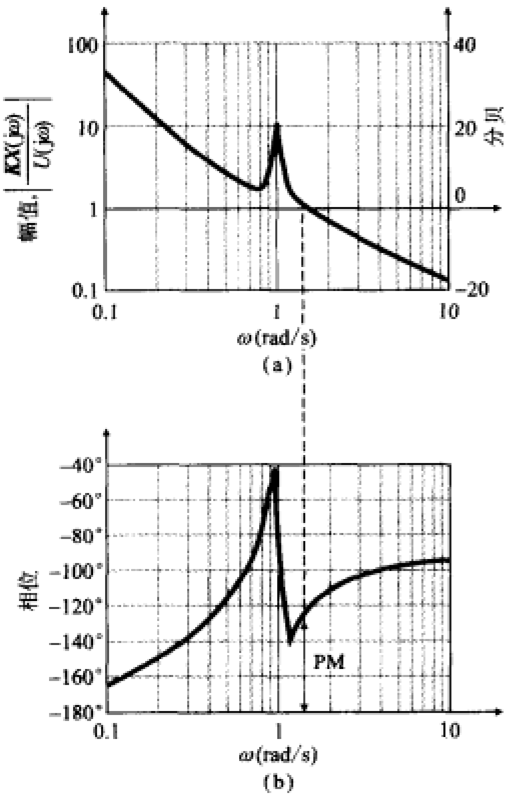


图 10-20　从 u 到 Kx 对称根轨迹设计的频率响应

图 10-19 的设计是基于全状态反馈的。为完成最优设计，我们需要一个估计器。选择闭环估计器的误差极点使之较控制极点快八倍以上。其原因是为了避免误差极点降低设计的鲁棒性；快速估计器与没有估计器对响应的影响几乎相同。从对称根轨迹中，我们选择误差极点 $-7.7\pm 3.12j$ 和 $-3.32\pm 7.85j$。使用 MATLAB 的 place 函数，得到估计器（滤波器）的增益为：

$$L=\begin{bmatrix} 22 \\ 242.3 \\ 1515.4 \\ 5503.9 \end{bmatrix} \tag{10-12}$$

如 7.8 节所述，在考虑了控制增益和估计器之后，从式(7-177)得到的补偿器传递函数为

$$D_4(s)=\frac{-745(s+0.3217)(s+0.0996\pm 0.9137j)}{(s+3.1195\pm 8.3438j)(s+8.4905\pm 3.6333j)} \tag{10-13}$$

该补偿器的频率响应（图 10-21 所示）显示，极点配置直接引入了一个陷波滤波器。复合系统 $D_4(s)G(s)$ 的频率响应和根轨迹分别如图 10-22 和图 10-23 所示，图 10-24 给出了标称装置和刚性弹簧装置的阶跃响应。注意，该设计已基本符合要求。

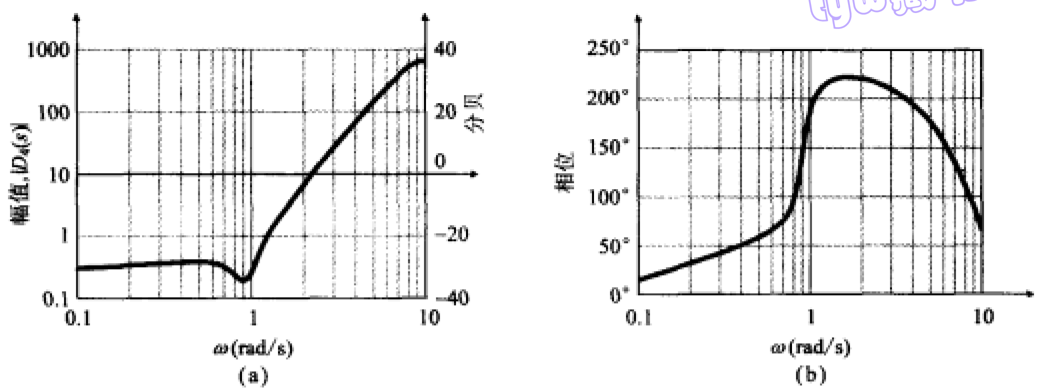


图 10-21 最优补偿器 $D_4(s)$的伯德图

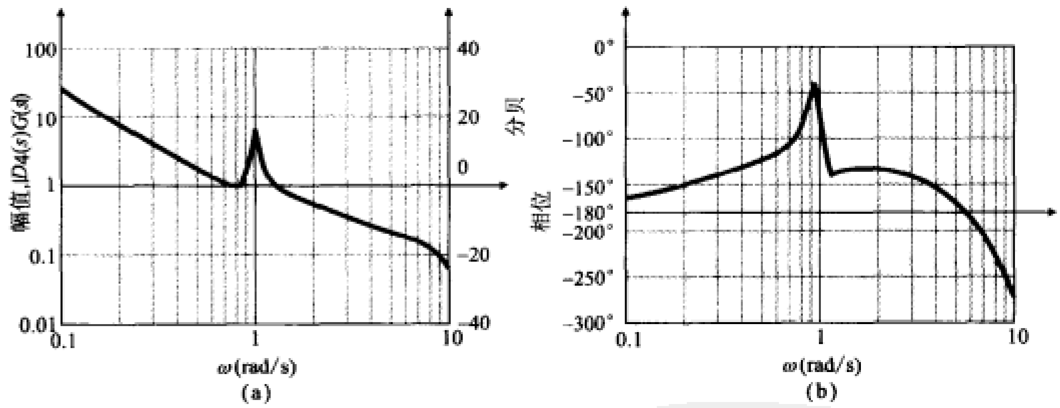


图 10-22 有补偿系统 $D_4(s)G(s)$的伯德图

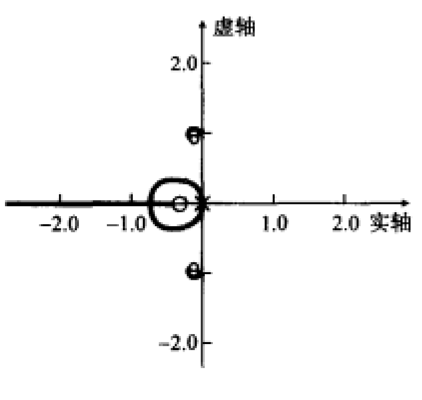


图 10-23 $|D_4(s)G(s)|$的根轨迹

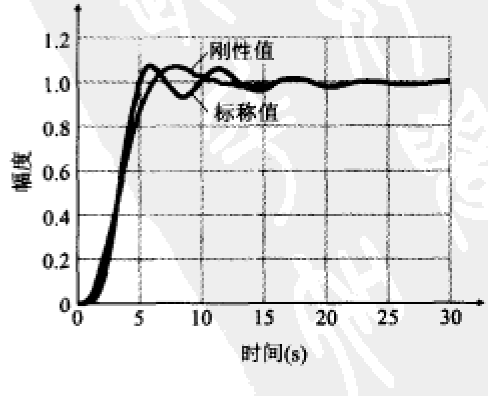


图 10-24 $|D_4(s)G(s)|$的闭环阶跃响应

步骤8　设计仿真，比较各种选择方案。此时有两种设计，分别具有不同的复杂度和鲁棒性。随着深层的迭代或者以不同的标称方案开始，陷波滤波器的设计会得到改进。虽然改变极点位置可能会得到更好的设计，但是对称根轨迹设计对标称装置来说是满足要求的，只是对刚性弹簧来说反应太慢。要探索鲁棒性和噪声响应特性，在任一设计中都要进行大量研究。我们不按这些步骤操作，转而研究物理系统中的某些问题。

由耦合质点引起的欠阻尼谐振对两种设计都有很大影响。然而，该系统的传递函数取决于这样一个事实：执行器在一处而传感器在另一处(即非并置的)。假设，不考虑星体追踪器指向微小质点，而是指向大型质点，或许是为了通信而指向的地球空间站，为此，可以将传感器放置在支撑执行器的同一装置上，以实现对并置的执行器和传感器进行控制。由于物理环境的性质，系统传递函数具有接近可调模式的零点，所以仅用PD控制就可达到控制目的，因为此时的装置已经有了陷波补偿器的作用。采用并置的执行器和传感器(用来测 θ_1)的卫星传递函数的状态矩阵是：

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -0.91 & -0.036 & 0.91 & 0.036\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0.091 & 0.0036 & -0.091 & -0.0036\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=[0\quad 0\quad 1\quad 0]$$

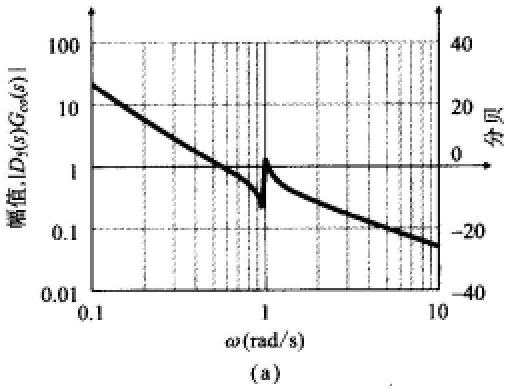
用MATLAB的ss2tf函数得到的系统传递函数是：

$$G_{co}(s)=\boldsymbol{H}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G}=\frac{(s+0.018\pm0.954\mathrm{j})}{s^2(s+0.02\pm\mathrm{j})} \tag{10-14}$$

注意，零点出现在共轭极点附近。如果使用与之前相同的PD反馈，即

$$D_5(s)=0.25(2s+1) \tag{10-15}$$

那么系统不仅会稳定，而且也有良好响应(若以 θ_1 为输出)，因为谐振极点会被共轭零点抵消。图10-25～图10-27分别表示了系统频率响应，根轨迹和阶跃响应。注意图10-27，阶跃响应有过大超调量，这与传递函数前向通路的补偿器零点相关。



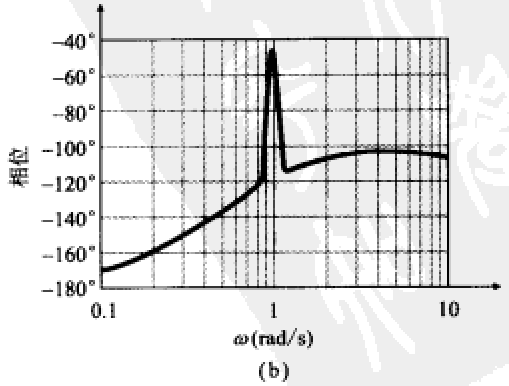


图10-25　$D_5(s)G_{co}(s)$的伯德图

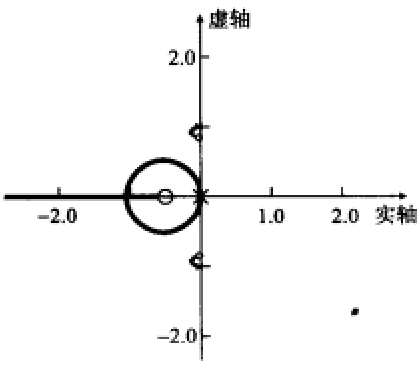


图 10-26 $D_5(s)G_{co}(s)$的根轨迹

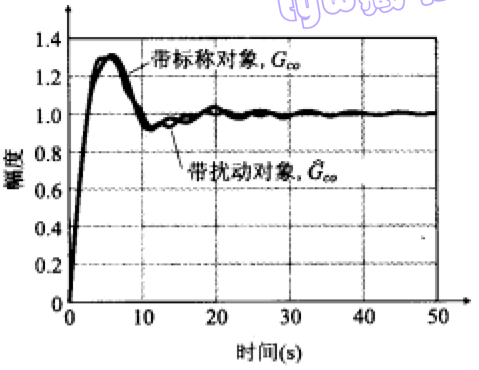


图 10-27 并置控制系统 $D_5(s)G_{co}(s)$与 $D_5(s)\hat{G}_{co}(s)$ 的闭环阶跃响应

将传感器从与执行器非并置的位置移至并置的位置，结果可得一个非常简单的鲁棒设计。设计表明，为实现理想的反馈控制，斟酌传感器的位置以及其他物理的问题是非常重要的。然而，此最终的控制设计，并不是为了实现星体追踪器的定位。这点从图 10-27 的良好阶跃响应对应的输出量 θ_2 的输出曲线可以明显得到，结果见图 10-28。

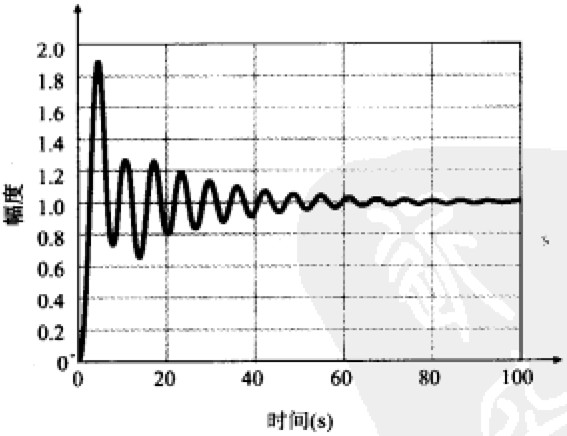


图 10-28 并置设计在 θ_2 处的响应

由这些结论得到的一种结构是把一个不太精确的星体追踪器安放于卫星上，用来进行搜索和初始设置。然后启动位于仪表箱上的星体追踪器，该追踪器具有更长的调节时间，可以获得理想的性能。

10.3 波音 747 飞机的侧面和纵向控制

波音 747(图 10-29)是大型宽体喷气式运输机。图 10-30 显示了飞机运动时的相

关坐标图。波音747的刚体运动线性方程式①是八阶方程，但可分为两个四阶形式，分别代表纵向运动（U,W,θ 和 q，如图10-30所示）和侧向运动（ϕ,β,γ 和 p）。纵向运动包括轴向（X），垂直方向（Z）和俯仰动作（θ 和 q），而侧向运动包括翻滚（ϕ,p）和偏移运动（β,γ）。侧滑角 β 是前进速度方向与飞机前端方向间夹角的量度。升降舵控制翼面，节流阀影响飞机的纵向运动，而侧翼和方向舵主要影响侧向运动。虽然这两种运动之间有少量的耦合作用，但通常忽略不计，所以对飞机的控制系统设计或增稳而列写的运动方程为两个解耦的四阶形式。

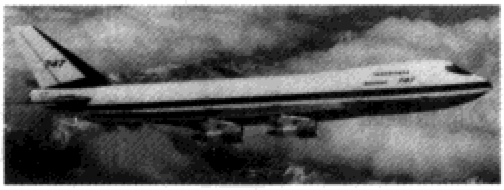


图10-29　波音747（波音商用飞机）

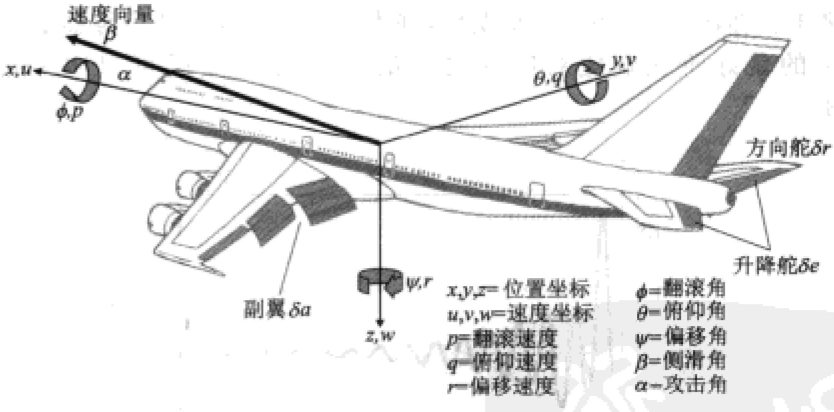


图10-30　飞机坐标定义

基于适当的假设②，得到在机体轴坐标下的非线性刚体运动运动方程（Bryson，1994）：

$$
\begin{aligned}
m(\dot U+qW-rV)&=X-mg\sin\theta+\kappa T\cos\theta\\
m(\dot V+rU-pW)&=Y+mg\cos\theta\sin\phi\\
m(\dot W+pV-qU)&=Z+mg\cos\theta\cos\phi-\kappa T\sin\theta
\end{aligned}
\tag{10-16}
$$

$$
\begin{aligned}
I_x\dot p+I_{xz}\dot r+(I_z-I_y)qr+I_{xz}qp&=L\\
I_y\dot q+(I_x-I_z)pr+I_{xz}(r^2-p^2)&=M\\
I_z\dot r+I_{xz}\dot p+(I_y-I_x)qp-I_{xz}qr&=N
\end{aligned}
\tag{10-17}
$$

① 对于飞机运动方程的推导，读者可参考 Bryson（1994），Etkin and Reid（1996），McRuer et al.（1973）。

② $x-z$ 是关于质心对称的机体轴平面。

其中：

m=飞机质量；

$[U,V,W]$=质心速度的机体轴元素；

$\beta=\tan^{-1}\left(\frac{V}{U}\right)$；

$[U_o,V_o,W_o]$=参考速度；

$[p,q,r]$=飞机角速度的机体轴向元素（分别是翻滚、俯仰和偏移）；

$[X,Y,Z]$=关于质心的机体轴向气动力；

$[L,M,N]$=关于质心的机体轴向气动转矩；

g_o=单位质量的重力；

I_i=轴体的惯性；

(θ,ϕ)=水平方向上机体轴的欧拉俯仰角和翻滚角；

V_{ref}=飞行速度参考方向；

T=合成推进力；

κ=推进力和 x 轴间的夹角。

这些方程的线性化可以这样进行：在方向和高度稳定和速度不变的情况下，$\dot{U}=\dot{V}=\dot{W}=\dot{p}=\dot{q}=\dot{r}$。而且，轴向上没有转动，即 $p_o=q_o=r_o$，机翼保持水平，即 $\phi=0$。然而，要有一个攻击角来通过机翼提供升力以抵消飞机质量，因此 $\theta_o\neq0$ 且 $W_o\neq0$，并有

$$U=U_o+u$$
$$V=V_o+v$$
$$W=W_o+w \tag{10-18}$$

稳态速度的机体轴向元素为

$$U_o=V_{ref}\cos(\theta_o)$$
$$V_o=0(\beta_o=0)$$
$$W_o=V_{ref}\sin(\theta_o) \tag{10-19}$$

如图 10-31 所示。

在这些条件下，平衡方程（见第 9 章）是

$$\begin{aligned}
0&=X_o-mg_o\sin\theta_o+\kappa T\cos\theta_o\\
0&=Y_o\\
0&=Z_o+mg_o\cos\theta_o-\kappa T\sin\theta_o\\
0&=L_o\\
0&=M_o\\
0&=N_o
\end{aligned} \tag{10-20}$$

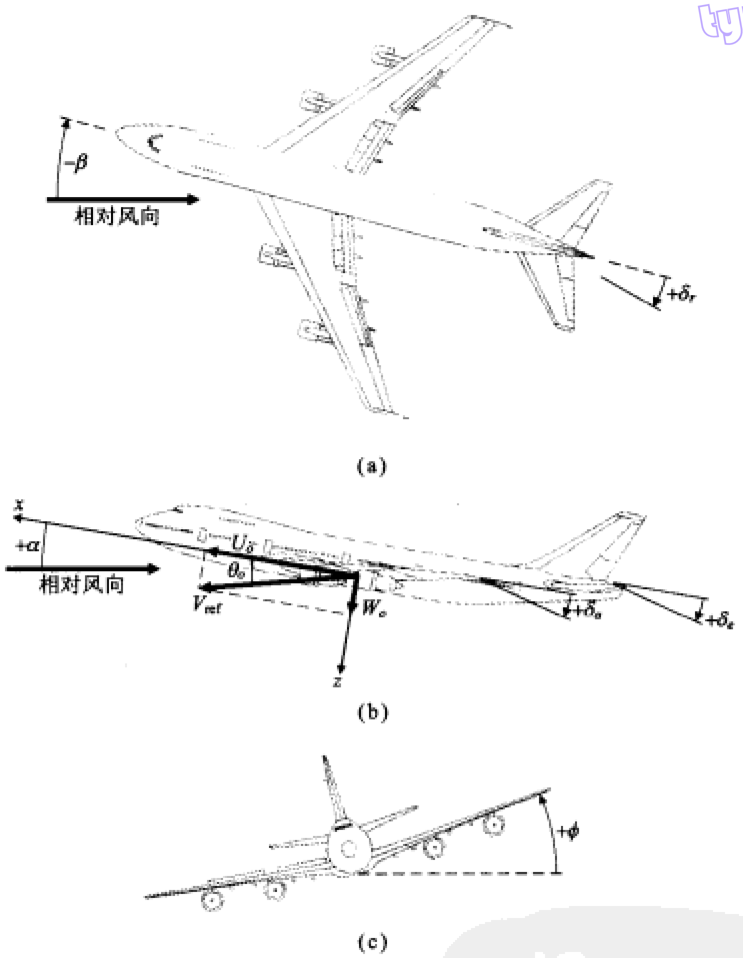


图 10-31　稳态飞行状况

根据假设(Bryson,1994)

$$(v^2,w^2)\ll u^2 \tag{10-21}$$

$$(\phi^2,\theta^2)\ll 1$$

$$(p^2,q^2,r^2)\ll \frac{u^2}{b^2}$$

其中 b 代表机翼的跨度,方程(10-16)和(10-17)中许多非线性因素可以忽略。将式(10-20)带入到运动的非线性方程中,可以得到一组描述速度常数、垂直和水平飞行有微小扰动的线性扰动方程组。动态方程即分为两组非耦合的纵向运动和侧向运动方程。

对于线性化的纵向运动,结果是:

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{w}\\ \dot{q}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_u & X_w & -W_o & -g_o\cos\theta_0\\ Z_u & Z_w & U_o & -g_o\sin\theta_0\\ M_u & M_w & M_q & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ w\\ q\\ \theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}X_{\delta e}\\ Z_{\delta e}\\ M_{\delta e}\\ 0\end{bmatrix}\delta e \tag{10-22}$$

其中：

u=飞机 x 轴方向的前向速度扰动(见图 10-30)；

w=z 轴方向的速度扰动(也同攻击角方向的扰动成正比，$\alpha=\frac{w}{U_o}$；

q=关于 y 轴正向的角速度或翻滚速率；

θ=根据参考值 θ_o 的俯仰角；

$X_{u,w,\delta e}$=x 轴方向的空气动力关于 u，w 和 δa 扰动的偏导数①；

$Z_{u,w,\delta e}$=z 轴方向的空气动力关于 u，w 和 δa 扰动的偏导数；

$M_{u,w,q,\delta e}L_{v,r,p,\delta r,\delta a}$=空气动力(翻滚)惯量关于 u，w，q 和 δa 扰动的偏导数；

δe=翻滚控制的活动尾部或升降舵角，

方程中 W_{oq}，U_{oq} 项是由机体固定(旋转)参考机座的角速度得到的，且可从式(10-16)左边直接提取出来。

为了确定高度的变化，我们需要在纵向方程中加入如下的方程：

$$\dot{h}=V_{\text{ref}}\sin\theta-w\cos\theta \tag{10-23}$$

该方程可得到一个线性化的高度方程

$$\dot{h}=V_{\text{ref}}\theta-w \tag{10-24}$$

该式可追加到式(10-22)中。

对于线性化的侧向运动，结果是

$$\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{r}\\ \dot{p}\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_v & -U_o & V_o & g_o\cos\theta_o\\ N_v & N_r & N_p & 0\\ L_v & L_r & L_p & 0\\ 0 & \tan\theta_o & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ r\\ p\\ \phi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Y_{\delta r} & Y_{\delta a}\\ N_{\delta r} & N_{\delta a}\\ L_{\delta r} & L_{\delta a}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta r\\ \delta a\end{bmatrix} \tag{10-25}$$

其中：

β=侧滑角，定义为$\frac{v}{U_o}$；

r=偏移速率；

p=翻滚速率；

ϕ=翻滚角；

$Y_{v,\delta r,\delta a}$=y 方向上的空气动力相对于 β，δr，δa 扰动的偏导数；

$N_{v,r,p,\delta r,\delta a}$=空气动力(偏移)惯量常微分；

$L_{v,r,p,\delta r,\delta a}$=空气动力(翻滚)惯量常微分；

δr=方向舵偏差；

δa=副翼偏差。

接下来讨论测向动力学上的动态增稳系统设计，该系统亦被称为偏移阻尼器，以及影响纵向运动的自动驾驶仪。

---

① X，Z，M 是稳定性导数，由风道试验和飞行试验模型得到。

10.3.1　偏移阻尼器

步骤 1　理解运动过程和性能指标。后掠翼飞机在侧向运动中有一种自然的倾向,在侧面运动状态下只受到轻度的阻尼。对于一般商用飞机,飞行速度和高度的状态式难以控制的,以致每个后掠翼飞机都需要一个反馈系统协助飞行员。因此控制系统设计的目标是调整固有的动态性能,使飞机适于飞行员操控[①]。研究表明,飞行员希望自然频率 $\omega_n \lesssim 0.5$,阻尼比 $\zeta \geqslant 0.5$ 的飞机。若飞机的动态特性违背这些要求,将被视为易使飞行员驾驶疲劳而不受欢迎。故而,系统的性能指标就是满足这些约束条件的测向动态性能。

步骤 2　选择传感器。飞机最容易测量的运动变量是角速度。侧滑角可用一个风轮装置测量,但噪声偏大并且稳定性不可靠。在侧向运动中包含两项角速度—翻滚角速度和偏移角速度。对欠阻尼的侧向运动研究表明,偏移角速度其起主导作用,因此对偏移角速度的测量是设计的逻辑出发点。直到 20 世纪 80 年代前期,测量装置还由**陀螺仪**(**gyroscope**)和高速旋转的小型转子组成,该转子输出一个与飞机偏移角速度成正比的电信号。从 20 世纪 80 年代前期开始,多数新的飞行系统已经依靠激光装置(称**环形-激光陀螺仪**(**ring-laser gyroscope**))进行测量。这样,两道激光光束从反方向穿过一环闭合的路径(一般是三角形)。随着三角形装置的旋转,测得的两道光束前后存在频率变化,在根据频率变化测量旋转角速度。与陀螺仪相比,这种装置有更少的移动部件,更少的花费和更高的可靠性。

步骤 3　选择执行器。两个空气动力表面装置——方向舵和副翼(见图 10-30),特别地影响飞机的侧面运动。欠阻尼的偏移会在偏移阻尼器的作用下稳定下来,但是会受到方向舵的严重影响。因此,设计的逻辑出发点就是使用单一控制输入。故方向舵是执行器的最佳选择。液压装置在大型飞机中得到广泛应用,用来是飞机表面平滑。目前还没有其他类型的装置能够达到为控制动力学表面的驱动要求而提供高耐力、高速和轻质量等特性。另一方面,在飞机降落前慢慢伸展的低速副翼一般是由带有陀螺齿轮的电动机驱动的。对于没有自动导航的小飞机,根本无需执行器;飞机操纵杆通过电缆直接控制机翼面,从而所有机翼面运动的动力都由飞行员来控制。

步骤 4　构建线形模型。波音 747 在 40 000 英尺高度,额定速度 $U_0 = 774$ 英尺/秒(即 0.8 马赫)(Heffley 与 Jewell,1772),选择方向舵为执行器的情况下(步骤 3),侧面扰动方程为:

$$\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{r}\\ \dot{p}\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0558 & -0.9968 & 0.0802 & 0.0415\\ 0.598 & -0.115 & -0.0318 & 0\\ -3.05 & 0.388 & -0.4650 & 0\\ 0 & 0.0805 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ r\\ p\\ \phi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.00729\\ -0.475\\ 0.153\\ 0\end{bmatrix}\delta r$$

---

① 这种模式很难手动控制,如果偏移阻尼器在飞行中失效,飞行员必须降落并减速到可控模式。

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta \\ r \\ p \\ \phi\end{bmatrix}$$

其中 β 与 ϕ 的单位为弧度，r 与 p 的单位为弧度/秒。用 MATLAB 的 ss2tf 函数生成的传递函数为：

$$G(s)=\frac{r(s)}{\delta r(s)}=\frac{-0.475(s+0.498)(s+0.012\pm 0.488\mathrm{j})}{(s+0.0073)(s+0.563)(s+0.033\pm 0.947\mathrm{j})} \tag{10-26}$$

故系统有两个稳定的实数极点以及一对稳定的复数极点。首先注意低频增益是负的，这点对应于一个简单的物理现实—正的或者说顺时针的方向舵运动导致负的或者说逆时针的偏移率。即，方向舵左转(顺时针)导致飞机前端左旋(逆时针)。对应于复数点的运动称"**荷兰翻转**"；名称来源于在荷兰运河冰面上滑冰的运动。对应于稳定实数极点的运动称"**螺旋运动**"($s_1=-0.0073$)或"**翻转运动**"($s_2=-0.563$)。从系统极点可见，扰动方式下需要修正的是荷兰翻转，以使得飞机易于操纵，对应的极点在 $s=-0.033\pm 0.95\mathrm{j}$。根轨迹有一个可接受的频率，但是它的阻尼比 $\zeta\cong 0.03$，比期望值 $\zeta\cong 0.5$ 少得多。

步骤 5 尝试超前滞后或 PID 设计。作为设计的第一次尝试，先考虑偏移角速度对升降舵的比例反馈控制。反馈增益的相应根轨迹如图 10-32所示，频率响应如图 10-33 所示。图像显示，$\zeta\cong 0.45$ 可以实现的，且计算出响应的增益约为 3.0。

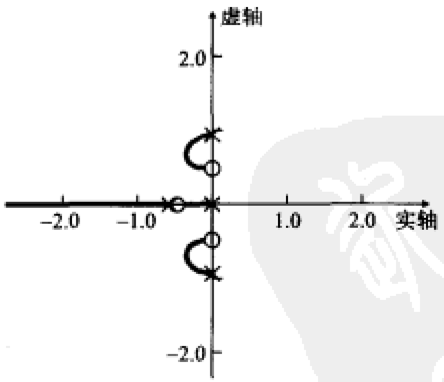


图 10-32 有比例反馈的偏移阻尼器根轨迹

但是，该反馈在偏移角速度为常量时，会在平稳调向期间产生一种不良的状况：由于反馈产生了一个与偏移角速度相反的稳定的升降舵输入，与开环情况相比，飞行员需要为相同的偏移角速度引入更大的稳态输入指令。这个矛盾可以通过削弱直流状态下的反馈(如取消反馈)解决。它的实现通过把

$$H(s)=\frac{s}{s+1/\tau}$$

插入到反馈中，其在品频率超过 $1/\tau$ 时传递偏移角速度反馈，且在直流条件下无反馈。因此在稳定转向期间，阻尼器不会提供任何校正。图 10-34 给出了带有抵消作用的偏

移阻尼器的框图。

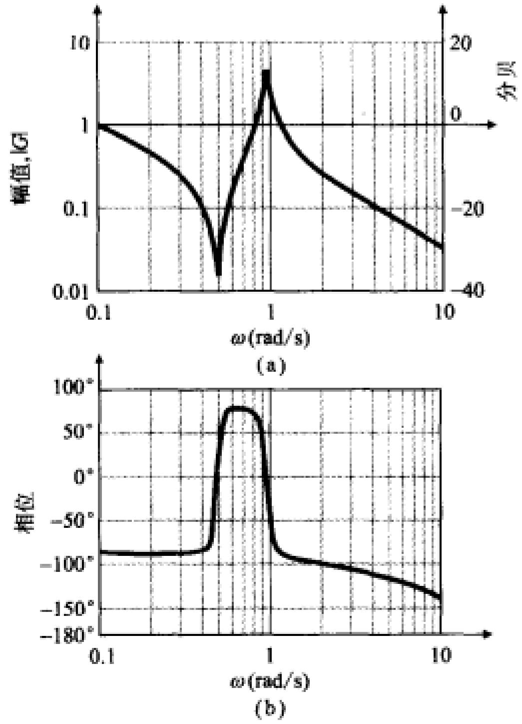


图 10-33 有比例反馈的偏移阻尼器伯德图

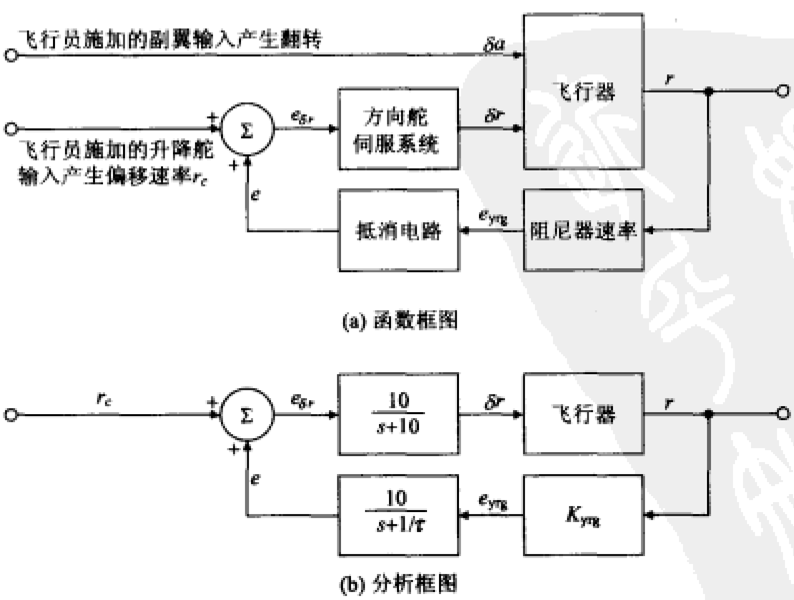


图 10-34 偏移阻尼器

对于得到更完整的模型，还应该加入方向舵伺服系统，该伺服系统代表执行器动态性能，有传递函数

$$A(s)=\frac{\delta_r(s)}{e_{\delta_r}(s)}=\frac{10}{s+10}$$

该函数的响应速度较系统的其他部分要快得多，因此不会对系统的动态性能有太大的影响。带有执行器和抵消电路的系统，在 $\tau=3$ 时的根轨迹如图 10-35 示。从根轨迹可见，带有抵消电路的偏移角速度使阻尼比从 0.03 增长到大约 0.35。相关的系统频率响应如图 10-36 所示。在根轨迹增益为 2.6 的条件下，对有初始状态 $\beta_0=1°$ 的闭环系统响应如图 10-37 所示。为了便于参考，无反馈时偏移角速度的响应曲线也在图中给出。虽然通过抵消电路的偏移角速度反馈对原来的飞行控制有了良好的改善，但是响应还是不如最初的指标好。更进一步的改进，还包含其他的增益值或者更复杂的补偿器，此处不再赘述。

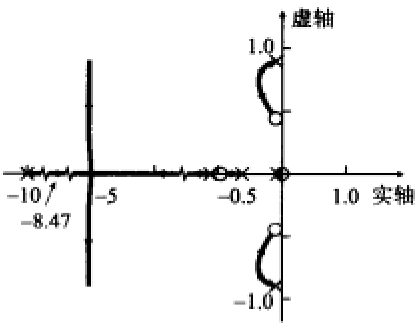


图 10-35 有 $\tau=3$ 的抵消电路根轨迹

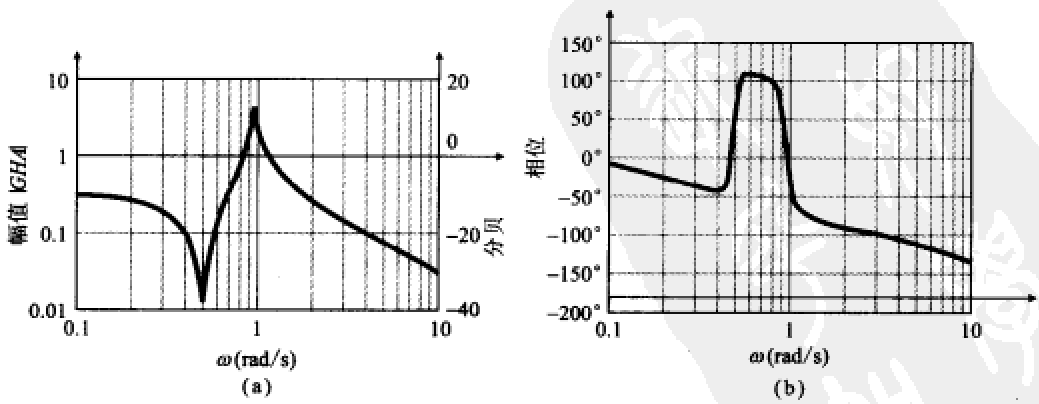


图 10-36 包括抵消电路和执行器在内的偏移阻尼器伯德图

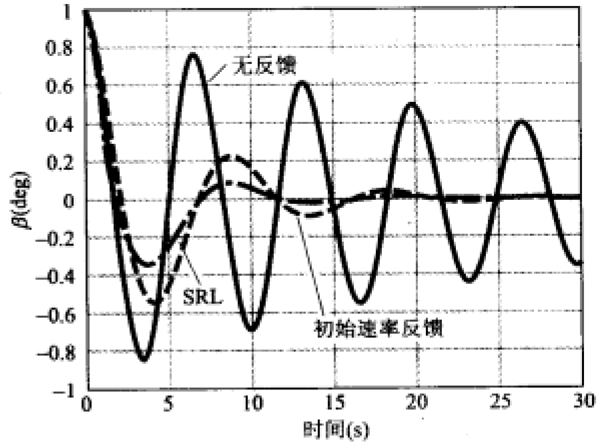


图 10-37 带有偏移阻尼器，抵消电路和 SRL 设计，$\beta_0=1°$的初始条件响应

步骤 6 评估/修正对象。解决方法是使用会产生阻力补偿的非后掠型机翼。

步骤 7 尝试用极点配置的最优设计。如果通过加入执行器和抵消电路来扩充系统的动态模型，获得的状态变量模型为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \\ \dot{x}_{wo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0729 & -0.0558 & -0.997 & 0.0802 & 0.0415 & 0 \\ -4.75 & 0.598 & -0.1150 & -0.0318 & 0 & 0 \\ 1.53 & -3.05 & 0.388 & -0.465 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0805 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ \beta \\ r \\ p \\ \phi \\ x_{wo} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_{\delta r}$$

$$e = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -0.333] \begin{bmatrix} x_A \\ \beta \\ r \\ p \\ \phi \\ x_{wo} \end{bmatrix}$$

其中 $e_{\delta r}$是对执行器的输入，e 是抵消电路的输出。扩充后系统的 SRL 如图 10-38 所示。若从 SRL 中选择状态反馈极点使得复数根有最大的阻尼比($\zeta=0.4$)，我们发现

pc = [−0.0051; −0.468; 0.279 + 0.628 * j; 0.279 − 0.628 * j; −1.106; −9.89]

用 MATLAB 的 place 函数，可以计算得到状态反馈增益，即

$$\boldsymbol{K} = [1.059 \quad -0.191 \quad -2.32 \quad 0.0992 \quad 0.0370 \quad 0.486]$$

注意，因为 $\boldsymbol{K}$ 中的第三项的值大于其他项，所以所有 6 个状态变量的反馈本质上正比于 r 的反馈。从图 10-31 根轨迹和图 10-38 的 SRL 的相似性也可明显看出。如果选择估计器极点比控制器极点快 5 倍，那么

pe = [−0.0253; −2.34; −1.39 + 3.14 * j; −1.39 − 3.14 * j; −5.53; −49.5]

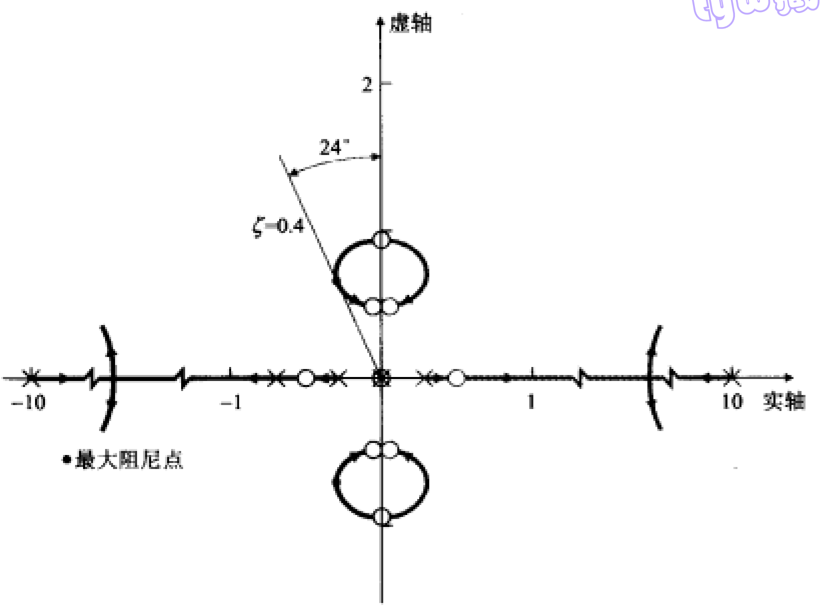


图 10-38 包括抵消电路和执行器的侧面运动 SRL

再用 MATLAB 的 place 函数，可得估计器的增益为

$$L=\begin{bmatrix}25.0\\-2044\\-5158\\-24843\\-40113\\-15624\end{bmatrix}$$

从式(7-177)得到的补偿器传递函数为

$$D_c(s)=\frac{-844(s+10.0)(s-1.04)(s+0.974\pm0.559\mathrm{j})(s+0.0230)}{(s+0.0272)(s+0.837\pm0.671\mathrm{j})(s+4.07\pm10.1\mathrm{j})(s+51.3)} \tag{10-27}$$

图 10-37 也给出了在 $\beta_0=1^\circ$ 初始条件下，偏移角速度的响应。从根轨迹可以明显看出，SRL 方法能够改善阻尼情况，这点可通过系统瞬态响应的衰减震荡情况证实。然而，此改善代价巨大。注意，补偿器已经从初始设计时的一阶(图 10-33)上升到六阶，且设计抵消电路使用了控制器-估计器- SRL 方法。

现在使用的飞机偏移阻尼器一般通过抵消电路或者对比例反馈做较小改进后将偏移角速度反馈给方向舵。利用全状态反馈和估计器，靠最优设计法可实现的改进效果与增加的复杂度相比并不相称。

也许更有效的改进设计法是在方向舵的基础上，增加副翼表面作为控制变量。

步骤 8 和步骤 9 验证设计。飞机运动的线形模型是合理而精确的，只要飞机的运动小到执行器和飞机表面不会达到饱和。这是因为执行器是为了安全的需要考虑到瞬态最大值按尺寸选择的尽管这样的饱和情况就很少见。因此，认为基于线形分析的设计是合理的，我们就没有不要再去实现非线性仿真或者进一步的设计确认。但是

在得到 FAA 的载客资格证之前，飞行器制造商不得不在任何可能条件下进行广泛的非线性仿真和飞行测试。

10.3.2 姿态保持自动导航仪

步骤 1 理解运动过程及其指标要求。飞行员的任务之一是保持特定的高度。为了防止飞机相撞，向东飞行的飞机要求处于 1000 ft 的奇数倍高度，而向西的要求偶数倍，因此，飞行员要使之保持上下误差不超过 100 ft 的高度。一个训练有素、专心致志的飞行员可以在手动条件下轻松地完成±50ft 的目标，且空中交通管理者也希望飞行员们保持这种范围。然而，由于这项任务要求飞行员们特别认真去对待，所以良好的飞机常常具有高度保持的自动导航仪以减轻他们的工作。该系统与偏移阻尼器有根本不同，那是因为系统的作用是在特定时间段代替飞行员，而偏移阻尼器的作用是协助飞行员驾驶。因此，动态特性指标不要求飞行员不像飞机的"触觉"(对操纵控制器的响应)；相反，设计应该提供飞行员和乘客满意的飞行方式。阻尼比依然要在$\zeta \cong 0.5$附近，但是对于平稳飞行，自然频率要比 $\omega_n = 1$ rad/s 小得多。

步骤 2 选择传感器。很明显，测量高度的装置是必要的，这可以通过气压测量较容易地实现。几乎从莱特兄弟的首次飞行开始，该基本思路就用在了被称为**气压高度计**(**barometric altimeter**)的装置上。在自动驾驶仪之前，这个装置由膜盒组成，膜盒的自由端连到一个指示针相连，这个指示针直接在表盘上显示高度值。

由于从控制升降舵的输入到高度控制的传递函数包含 5 个极点(式 10-30)，反馈回路的稳定性不能通过简单的比例反馈实现。因此俯仰角 q 也作为稳定反馈使用；q 由陀螺仪或者环形激光陀螺仪测量得到，这与偏移角速度的测量方法相同。为了实现更好的稳定性，可以利用俯仰角反馈。该反馈可以通过基于环形激光陀螺仪的惯性参考系统或者从速率积分陀螺仪得到。后者与速度陀螺仪相似，但由于结构的不同，它的输出与飞行俯仰角 θ 以及滚动角 ϕ 成正比。

步骤 3 选择执行器。多数飞机俯仰控制用到的唯一空气动力学表面是升降舵的δ_e。它位于水平尾翼上，很好地分离了飞机的重心，因此其推力产生的俯仰角速度就有一个俯仰角，这个作用会改变机翼的升降。许多高性能飞机在机翼或许小型鸭式表面上直接安装升降控制装置，它们如同主翼的前伸小型翼，对飞机产生垂直动力的速度远大于尾部的升降舵产生垂直动力的速度。

对于方向舵来说，液压执行器是消除升降舵表面阻力的首选，这点得益于其良好的推力—重量比。

步骤 4 设计线性模型。以额定速度(0.8 英尺/秒)，高度 20 000 英尺飞行，质量 637 000 磅的波音 747 的纵向扰动运动方程是

$$\dot{x} = Fx + G\delta e$$

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{\omega}\\ \dot{q}\\ \dot{\theta}\\ \dot{h}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.00643 & 0.0263 & 0 & -32.2 & 0\\ -0.0941 & -0.624 & 820 & 0 & 0\\ -0.000222 & -0.00153 & -0.668 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \omega\\ q\\ \theta\\ h\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -32.7\\ -2.08\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\delta e \tag{10-28}$$

对高度保持的自动导航仪，期望的输出是

$$h=\boldsymbol{Hx}$$

$$h=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \omega\\ q\\ \theta\\ h\end{bmatrix} \tag{10-29}$$

且

$$\frac{h(s)}{\delta e(s)}=\frac{32.7(s+0.0045)(s+5.645)(s-5.61)}{s(s+0.003\pm0.0098\mathrm{j})(s+0.6463\pm1.1211\mathrm{j})} \tag{10-30}$$

该系统有两对稳定的复数极点，其中一个 $s=0$。复数对 $-0.003\pm0.0098\mathrm{j}$ 被称为**长期模式**(**phugoid mode**)[①]，极点 $-0.6463\pm1.1211\mathrm{j}$ 被称为**短期模式**(**short-period mode**)，以上的结果用 MATLAB 的 eig 命令可以得到。

步骤5 设计超前滞后或者 PID 控制器。作为设计中的第一步，使用内反馈将俯仰速度 q 反馈给 δ_e，来改进飞机在短期模式下的阻尼比，这是很有用的(见图 10-39)。用 MATLAB 的 ss2tf 指令可求得从 δ_e 到 q 的传递函数是

$$\frac{q(s)}{\delta e(s)}=-\frac{2.08s(s+0.0105)(s+0.596)}{(s+0.003\pm0.0098\mathrm{j})(s+0.646\pm1.21\mathrm{j})} \tag{10-31}$$

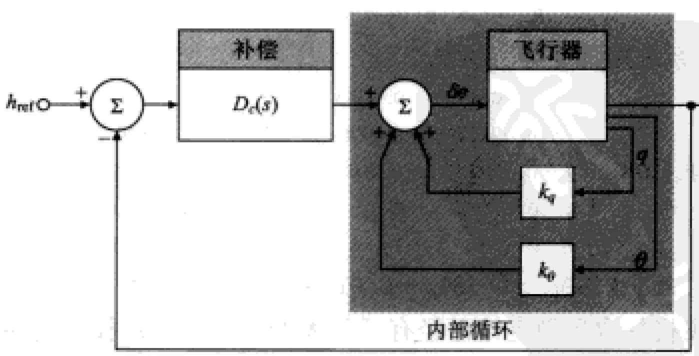


图 10-39 姿态保持反馈系统

用式(10-31)表征的以 q 为参数的内环根轨迹如图 10-40 所示。由于 k_q 是根轨迹参数，系统矩阵(式 10-28)可改写为：

$$\boldsymbol{F}_q=\boldsymbol{F}+k_q\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}_q \tag{10-32}$$

---

① 该名称由 F. W. lanchester(1908)取得，lanchester 最先解析式地研究飞机的动态稳定性问题。这明显是一个不正确的希腊词语。

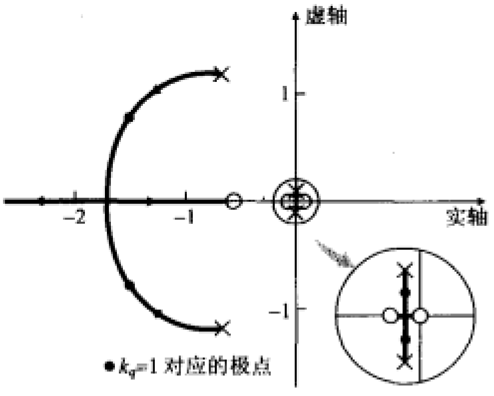


图 10-40　带有 q 反馈的高度保持动态作用内环根轨迹

其中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 已在式 10-28 中定义，$\boldsymbol{H}_q=[0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0]$。选择适宜的增益 k_q 是一个反复的过程。选择步骤如第 5 章的讨论。(回忆一下 5.7.2 节的转速计反馈例子)。如果选择 $k_q=1$，闭环极点将配置在根轨迹的 $-0.0039\pm0.0067j$，$-1.683\pm0.277j$ 点，且

$$\boldsymbol{F}_q=\begin{bmatrix} -0.00643 & 0.0263 & 0 & -32.2 & 0 \\ -0.0941 & -0.624 & 787.3 & 0 & 0 \\ -0.000222 & -0.00153 & -2.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0 \end{bmatrix} \tag{10-33}$$

注意，$\boldsymbol{F}_q$ 只有第三列与 $\boldsymbol{F}$ 不同。为进一步改进阻尼过程，把飞机的俯仰角作为反馈是有用的。通过反复试验，选择

$$\boldsymbol{K}_{\theta_q}=[0\quad 0\quad -0.8\quad -6\quad 0]$$

来反馈 θ 和 q，系统矩阵变为

$$\boldsymbol{F}_{\theta_q}=\boldsymbol{F}_q-\boldsymbol{G}\boldsymbol{K}_{\theta_q}=\begin{bmatrix} -0.0064 & 0.0263 & 0 & -32.2 & 0 \\ -0.0941 & -0.624 & 761 & -196.2 & 0 \\ -0.0002 & -0.0015 & -4.41 & -12.48 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0 \end{bmatrix}$$

其极点为 $s=0$，$-2.25\pm2.99j$，-0.531，-0.0105。

到目前为止，飞机的内环稳定性已经有了很大的改进。不加控制的飞机在水平飞行中有一种回归平衡的自然趋势，这在 LHP 中的开环根轨迹中已得到证明。内环的稳定是使得 h，$\dot{h}$ 的外环反馈稳定所必要的；进一步讲，当飞行员希望直接通过输入命令来控制 θ，θ 和 q 的反馈可以在自动导航仪的高度稳定模式中应用。图 10-41 给出了内环对 θ 幅度为 2°(0.035 rad)的阶跃响应。加上内环后，从升降舵角度到高度的系统传递函数为

$$\frac{h(s)}{\delta e(s)}=\frac{32.7(s+0.0045)(s+5.645)(s-5.61)}{s(s+2.25\pm2.99j)(s+0.0105)(s+0.0531)} \tag{10-34}$$

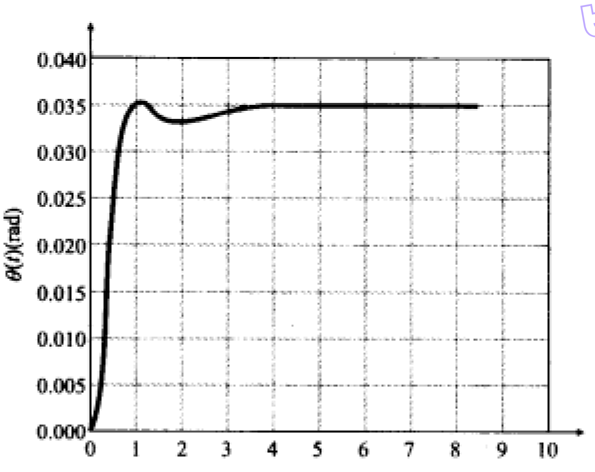


图 10-41 姿态保持自动导航仪对 θ 命令的响应

如图 10-42 给出的系统根轨迹显示，高度的自身比例反馈不能产生满意的设计方案。为了稳定，也可以将 PD 控制器的高度变化率进行反馈。带 $h,\dot{h}$ 反馈的系统根轨迹如图 10-43 所示。经过反复试验，发现最好的 $\dot{h}:h$ 是 10∶1，即

$$D_e(s)=K_h(s+0.1)$$

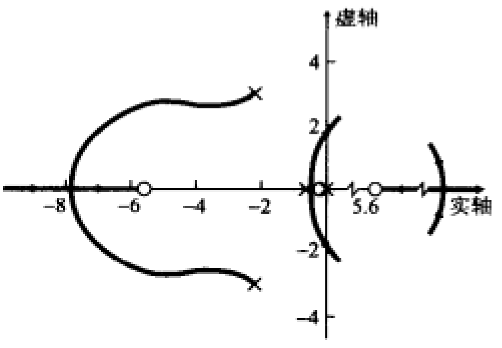


图 10-42 只带有反馈 h 的 0°根轨迹

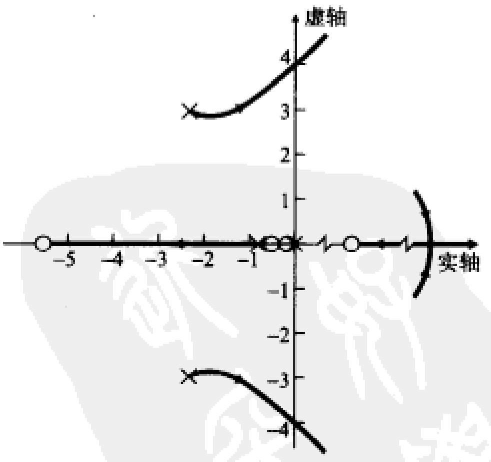


图 10-43 带有反馈 $h,\dot{h}$ 的 0°根轨迹

最终的设计是 q, $\theta,\dot{h}$ 和反馈增益 h 之间反复迭代计算的结果，明显是个冗长的过程。虽然这一试验设计方案是成功的，但使用 SRL 方法一定会加速该过程。

步骤 6 评估/修正装置。这里没有应用。

步骤 7 最优设计。系统对称根轨迹如图 10-44 所示。如果选择闭环极点在

pc = [−0.0045; −0.145; −0.513; −2.25 − 2.98 * j; −2.25 + 2.98 * j]

那么用 MATLAB 的 place 函数得到期望的闭环增益是：

$$\boldsymbol{K}=[-0.0009\quad 0.0016\quad -1.883\quad -7.603\quad -0.001]$$

系统对 h 为 100 ft 的阶跃命令的响应如图 10-45 所示。对应的控制效果如图 10-46 所示。

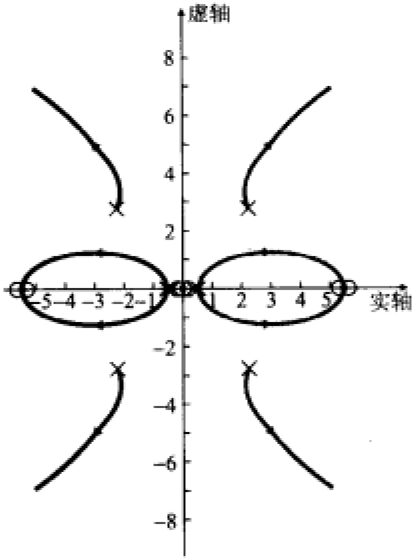


图 10-44　姿态保持自动导航仪的 SRL 设计

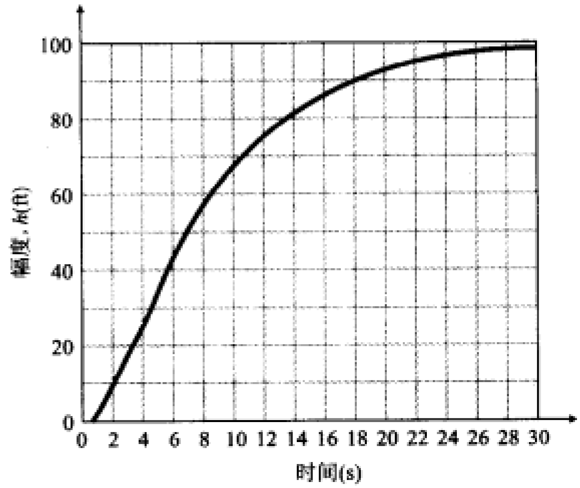


图 10-45　姿态保持自动导航仪对 100 ft 阶跃命令的响应

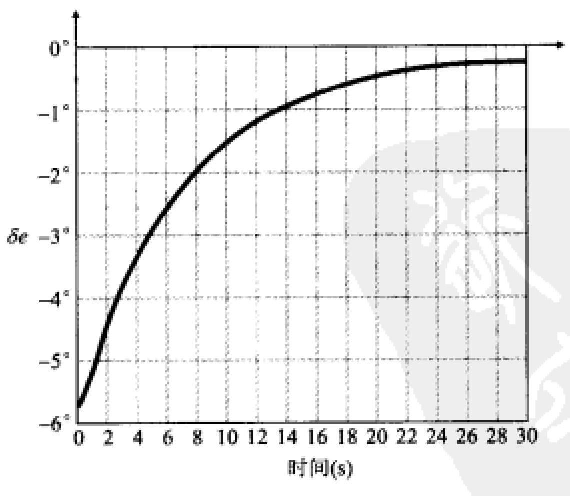


图 10-46　对 100ft 高度阶跃命令的控制效果

该设计是假定在考虑高度变化时线性模型合理的情况下进行设计的。我们应当进行仿真来验证或者确定对线性模型的可用范围。

步骤 8 和步骤 9　验证设计。10.3.1 节对步骤 7、步骤 8 的评述也适用本方案。

有趣的是，如第 5 章所述，对于目前生产的小飞机自动导航仪，很多生产商只用 θ 作反馈而其余的用 q 做反馈。θ 的使用使得响应加快，但是 q 的使用较廉价。当然，要

对 h 反馈，二者都要用高度计。

10.4 汽车引擎的油—气比控制

直到 20 世纪 80 年代，多数汽车引擎还用汽化器来量测燃料量，使得汽油流与空气流的比例，或者说油—气比(F/A)，保持在 1：15 附近。这种装置依靠由通过文氏管的空气流引起的汽油压力下降而获得测量值。在保持引擎良好运行方面，该装置效果足够好，但是它会允许达 20%的 F/A 偏移。在联邦废气-污染法案执行后，该 F/A 的精确度水平是不可接受的，因为过量的碳氢化合物(HC)和过剩氧量都是不能接受的。在 20 世纪 70 年代，汽车公司改善了汽化器设计法和生产流程，使得测量装置更精确且 F/A 精确度在 3%～5%附近。通过装置的整合，这个修正的 F/A 精度有助于降低尾气污染水平。但是，汽化器依然是一个开环的系统，因为系统没有测量进入发动机的混合气体的 F/A，并将它反馈给汽化器。在 20 世纪 80 年代，几乎所用制造商都采用反馈控制系统来提供更高水平的 F/A 精度，因此有必要采取措施降低尾气中污染物的数量。

现在转向发动机控制典型反馈系统的设计，再一次使用 10.1 节介绍的循序渐近的设计概要。

步骤 1 *理解过程和及其性能指标。*为达到尾气污染排放指标，选取的方法中用到一个催化式排气净化器，它能同时氧化氧化过量的一氧化碳(CO)，未燃烧的碳氢化合物(CH)，减少过量的氮氧化合物(NO、NO_2 或 NO_x)。该装置常称作三用催化剂，因为其能作用于三种污染物。在 F/A 与化学计量比 1：14.7 时相比差别 1%以上时，此催化剂失效；因此，反馈控制系统都要求 F/A 保持在理想水平±1%以内。系统如图 10-47描述。

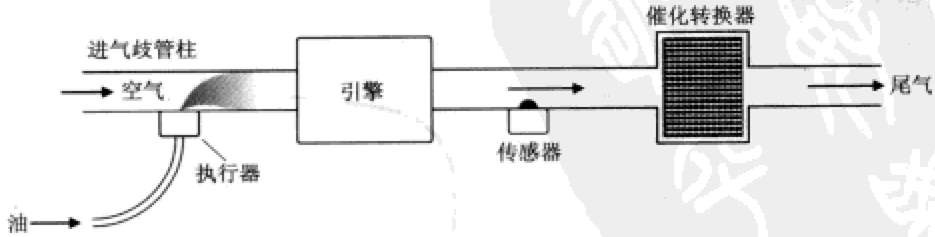


图 10-47 F/A 反馈控制系统

影响从尾气中测量 F/A 输出与进气歧管柱的燃料之间关系的动态因素有：(1) 油气混合物吸入量；(2) 引擎中活塞冲程引起的循环时滞；(3) 尾气从引擎进入传感器的时间。这些因素都与发动机速度和负载有很大的关系。例如，发动机速度一般从 600～6000 rpm变化。这些变化又将影响反馈控制系统的行为，导致至少以 10：1 的比率变化，具体数值依赖于运行状态。当司机通过改变油门踏板来获得或多或少的功率的时候，系统在变化发生后的很短时间内完成暂态过程。在理想情况下，反馈控制系

统应当跟随暂态效应。

步骤 2　选择传感器。尾气传感器的发明和发展是使得通过反馈控制减少尾气释放的设想可行的关键技术步骤。设备中的活性元素，锆氧化物，置于尾气流中，产生一个关于尾气含氧量的单调电压函数。F/A 与氧气水平存在一一对应的关系。传感器电压与 F/A 呈高度非线性关系；几乎所有的电压变化都精确地发生在某 F/A 值，此时反馈系统需要为有效的催化剂作用而运行。因此，在 F/A 处于期望点(1∶14.7)的情况下，传感器的增益很高，而在偏移 1∶14.7 的情况下，增益会大幅下降。

虽然 F/A 反馈控制中可用的其他传感器也在发展之中，到目前为止还没有找到其他成本低廉而又合适的传感器。所有汽车生产商现在都在反馈控制系统中使用锆氧化物传感器。

步骤 3　选择执行器。燃料测量可以依靠汽化器或者燃料射入器完成。一个完善的反馈 F/A 系统需要有电子式调整燃料测量的能力，因为使用的传感器提供电子式的输出。汽化器原本的设计具有此种能力，即通过包含可调节孔来对电子误差信号作出响应，调整主要燃料的流量。然而，现在的生产商通过使用燃料射入器实现测量。燃料射入器系统自然是典型的电子装置，所以能通过利用来自传感器的反馈信号，对 F/A 反馈实现燃料调整。现在，燃料射入器置于汽缸入口(称**多点射入**(**multipoint injection**))；以前是将大射入器置于汽缸逆向(**单点**(**single-point**)或**截流体入射**(**throttle body injection**))。而多点射入有改进的效果，因为燃料的注入更接近引擎，在汽缸中分布得更好。距离靠近一点还能减少时间滞后，于是产生更好的引擎响应，目前被广泛采用。

步骤 4　建立线性模型。如图 10-48 所示的传感器非线性度足够大，以致基于线性模型的任何设计都必须谨慎使用。图 10-49 给出了系统的框图，传感器的增益为 K_s。时间常数 τ_1 和 τ_2 分别代表蒸汽或水滴形式的快速燃料流和附在多支管上液体膜形式的慢速燃料流。

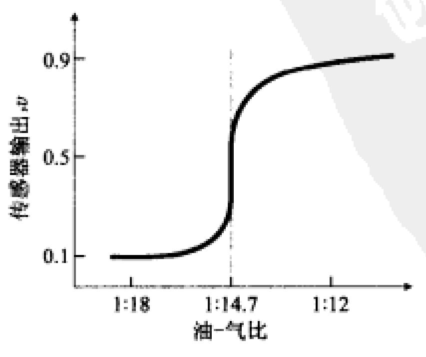


图 10-48　尾气传感输出

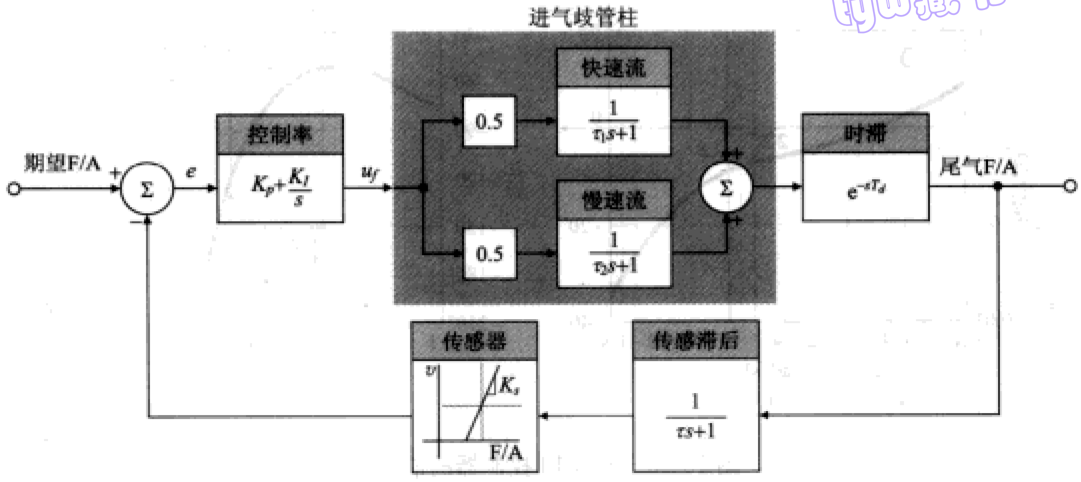


图 10-49 F/A 控制系统的框图

时滞是以下两部分之和:(1) 活塞从进气到排气过程的四冲程时间;(2) 尾气从引擎到传感器,约 1ft 距离的传输时间。时间常数为 τ 的传感器滞后也包括在该过程中,以解决发生在尾气支管内的混合。虽然时间常数和滞后时间会因发动机负载和速度的不同发生很大的改变,但是可以在一个确定的点对设计进行检验,这里的各参数取为:

$$\tau_1 = 0.02\ \text{s}, \quad T_d = 0.2\ \text{s}$$

$$\tau_2 = 1\ \text{s}, \quad \tau = 0.1\ \text{s}$$

在实际的引擎中,设计要适用于所有速度、负载。

步骤 5 *设计超前滞后或者 PID 控制器*。给定严格的误差指标以及由不同的发动机运行状态决定的燃料需求量 u_f,因此,积分控制环节是必需的。有了积分控制,在误差信号 $e=0$ 的条件下,能提供任何需要的稳定状态 u_f。比例环节的加入,虽然通常并不使用,可以增加带宽(加倍),且不损害系统的稳态特性。在这个例子中,我们使用比例加积分的控制律(PI)。控制律的输出驱动射入器的脉冲发生器产生一个燃料脉冲,该燃料脉冲的持续时间与电压成正比例。控制器的传递函数可以写为:

$$D_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p}{s}(s+z) \tag{10-35}$$

其中 $z=\dfrac{K_I}{K_p}$,z 可以按期望的要求进行选择。

首先,假设传感器是线性的,且可以由增益 K_s 代表。然后可以选择 z,使得系统具有良好的稳定性和系统响应。图 10-50 给出了在 $K_sK_p=1.0$,$z=0.3$ 情况下系统的频率响应,图 10-51 给出了在 $z=0.3$ 条件下,K_sK_p 的系统根轨迹。两种分析都表明在 $K_sK_p \cong 2.8$ 情况下,系统变得不稳定。图 10-51 表明,为达到约 60°的相位裕度,增益应 $K_sK_p \cong 2.2$,图 10-50 也表明,这将产生 6.0 rad/s(~1Hz)的穿越频率。图 10-51 的根轨迹证明,这一备选方案能达到一个可接受的阻尼比受控对象($\zeta \cong 0.5$)。

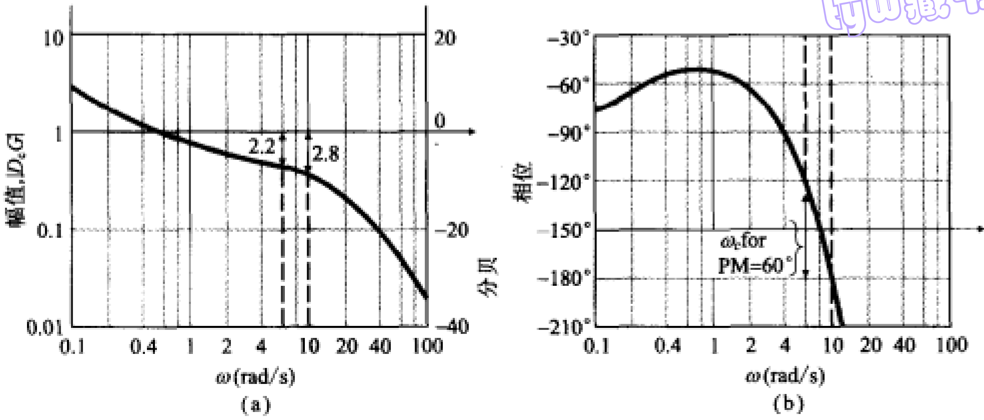


图 10-50　F/A PI 控制器的伯德图

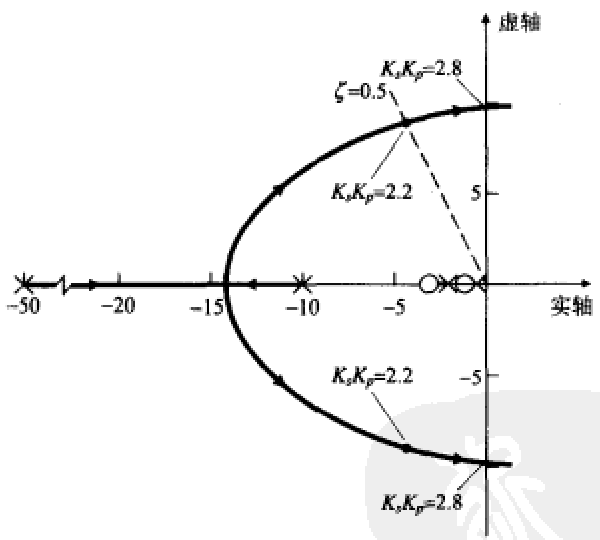


图 10-51　F/A 的 PI 控制器的根轨迹

虽然这种线性分析表明，通过 PI 控制器可以在合理带宽(1 Hz)下实现满意的稳定性，但是从传感器的非线性特性(图 10-48)可知这是不可能达到的。注意，在期望设置点附件时，传感器输出的斜率特别大，于是导致非常大的 K_s 值。因此，在传感器高增益的情况下，需要用较低的控制器增益 K_p 保持 K_sK_p 的取值为 2.2。另一方面，在 F/A=1：14.7(=0.068)时，使系统稳定的 K_p 值非常小，这将放缓偏离设置点很大程度的瞬态响应，因为这时有效的传感器增益大幅度下降。因此，为了使设置点在任何干扰下都有满意的响应特性，必须解决传感器的非线性。传感器的一阶近似如图 10-52 所示，因为在设置点处实际的传感器增益依然与近似值有很大的不同，对于设置点附近的稳定性，该近似将得出错误的结论；然而，在仿真时，用它来确定对初始状况的响应还是有用的。

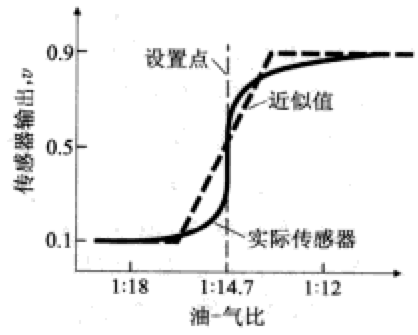


图 10-52 传感器的近似

步骤 6 评估/修正对象。尽管非线性传感器是不太受欢迎的;但是,至今未发现合适的线性传感器。

步骤 7 尝试最优控制器。系统响应由传感器的非线性度主导,且任何良好的控制调节必须要顾及这一特性。此外,这个系统的动态特性相对简单,最优控制对 PI 控制器的改进没有任何帮助。因此可以省略本步。

步骤 8 非线性的设计仿真。在 simulink 中实现的系统非线性闭环仿真如图 10-53所示。MATLAB 函数(fas)得到了图 10-53 中近似的非线性传感器特性。

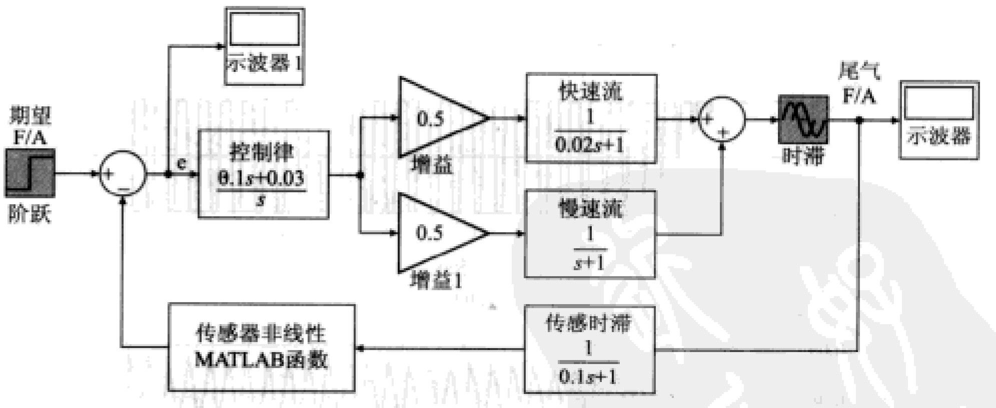


图 10-53 Simulink 实现的闭环非线性仿真

```
function y = fas(u)
if u < 0.0606,
   y = 0.1 ;
elseif u < 0.0741,
   y = 0.1 + (u - 0.0606) * 20;
else y = 0.9;
end
```

图 10-54a 是使用如图 10-52 的传感器,且 $K_pK_s=2.0$ 的系统误差信号曲线。开始误差信号在饱和状态持续大约 12.5 s,然后在到达线性区时,其时间常数大约为 5 s。

在实际的汽车控制中，该类系统往往采用更高的增益。为说明这些效果，当 $K_pK_s=6.0$ 时得到的仿真曲线如图 10-54b 和图 10-54c 所示。在该增益下，线性系统是不稳定的，且信号上升维持大约 5s。在此之后信号不再上升，是由于当传感器有输入时的非线性度增大，其有效增益受饱和效应的影响而减弱，最后达到一个极限环。极限环的频率对应于根轨迹穿越虚轴的点，且有一个使得总的有效增益为 $K_pK_{s,eq}=2.8$ 的幅值。正如 9.3 节所介绍的，对于适度大的输入，饱和有效增益可以计算，且由逼近 $4N/\pi a$ 的描述函数给出，其中 N 是饱和深度，a 是输入信号的幅度。此处，$N=0.4$，并且如果 $K_p=0.1$，那么 $K_{s,eq}=28$。于是，我们预测输入信号的幅度为 $a=4(0.4)/28\pi=0.018$，如图 10-54c 所示，在非线性输入的情况下，该预测值非常接近真实值。振荡频率约为10.1 rad/s，和图 10-51 根轨迹的预测相一致。

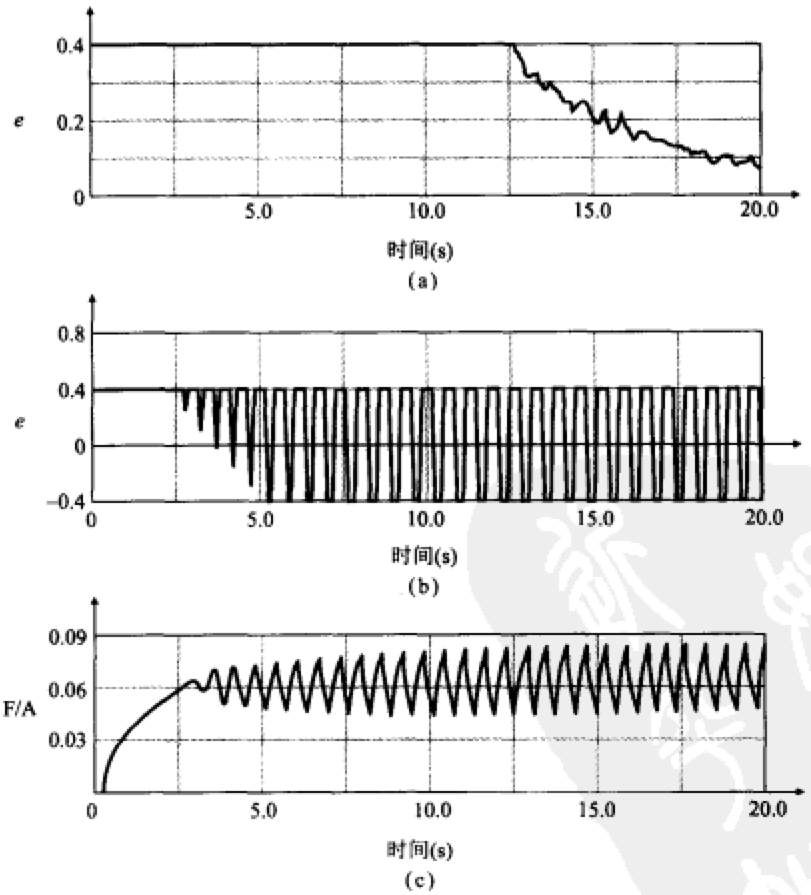


图 10-54　带有非线性传感器近似的系统响应

在汽车引擎实际的 F/A 反馈控制器应用中，传感器在汽车行使上千英里后灵敏度下降，是首先要考虑的问题，这是因为联邦政府要求引擎在最初的 50 000 mi 之内要符合尾气排放的污染标准。为了降低传感器的输出特性对排放标准设定点变化的敏感

度，汽车制造商应特别修改此处讨论的设计方案。一种方法是将传感器输出接到一个如图如图 9-6b 所示的继电器函数，如此可以在设定点彻底消除对传感器增益的依赖。极限环的频率仅由控制器的常数和引擎特性决定。于是，稳态 F/A 的平均精度也得以改善。同时 F/A 的振荡也是可以接受的，因为对于车主来说影响是不明显的。实际上，采用 F/A 偏移对于用催化作用减少污染物也是有益的。

10.5 硬盘的读/写磁头组件控制

第一台在硬盘上记录数据的信息存储装置是由 IBM 公司于 1956 年生产的 350RAMAC① 模型。它由 50 个直径为 24 英寸的铝制盘片堆叠在一起，并用一种电磁材料封装起来。数据以每英寸 100 字节的密度存储到同心的磁道上，磁道密度为每英寸 20 条。磁盘的转速可达 1200 rpm(转/分)。读/写磁头安置在一个机械臂上，该臂可以在盘与盘之间垂直运动，也可以在选定盘上水平运动，以访问需要的数据磁道。磁头借助从其固定装置上的小孔里流出的气流，悬浮在盘片的表面。磁头组件可通过一个升降机构固定在某一个盘片上，再通过一个机械臂固定再某一磁道上。整个磁头组件仅依靠一台电机驱动。尽管硬盘系统具有 5MB 的数据存储容量，而且不得不考虑 36 英寸的宽度以保证终端设备能通过。该领域的技术进步是这样的，2000 年 Seagate 公司推出了一款专门为便携式手提电脑设计的磁介质硬盘，它包含 3 个盘片，每个盘片 2.5 英寸，具有 15 000 rpm(转/分)的转速。该设备的存储容量为 18 350 MB。读/写组件由一个机械臂和一组梳状的磁头机构组成，盘片的每一面对应着一个磁头，梳状的磁头机构以旋转运动的方式控制磁头在磁道之间的运动。磁头可安装在机械臂末端的悬浮架上，悬浮于磁盘的表面。为了沿着磁道旋转，磁头组件利用在磁道中用户数据扇区之间的样本位置数据进行动态反馈控制。从经济性的角度看，磁盘设计领域取得的进步是显著的，RAMAC 每兆字节数据的花费约为 10 000 美元，而现代硬盘每兆字节的花费还不到 1 美分。Abramovith and Franklin(2002)在阅读了大量资料后撰写了一份概要，旨在反映磁盘设计领域取得的光辉历史。表 10-1 罗列了历代的磁盘性能指标。在过去的 45 年中，大批来自工业领域和学术机构的人员为硬盘存储技术的发展做出了贡献，其中一个广泛应用的技术就是反馈控制。Maxtor 500-GB 硬盘驱动器图如图 10-55 所示。在这个简单实例的研究中，我们将涉及包括控制在内的诸多问题，但是设计实例只着眼于磁道跟随问题。我们将依照 10.1 节给出的设计大纲来阐述这一问题。

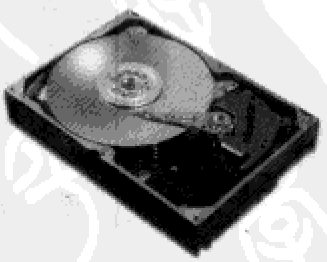


图 10-55 Maxtor 500-GB 硬盘驱动器图(Courtesy Maxtor 公司)

① 记录和控制的随机访问法。

表 10-1 历年硬盘驱动参数

No.	年	单元	容量	尺寸 (N/d)	每英寸磁道数	每英寸 MB	每分转数	移动高度	磁头类型	传感器类型	执行机构类型	寻道时间	评价
1	1956	IBM RAMAC	5 MB	50/24"	20	100	1200	20μ	空气轴承	定位器	直流电机		第一台硬盘
2	1962	IBM 1301	28 MB	25/24"	50	520	1800		移动磁头	定位器	液压活塞	165 ms	
3	1971	IBM 3330	100 MB	11/14"	192	4040		1.2μ	铁酸盐，移动	精密表面	线性音圈	30 ms	第一次引入反馈
4	1973	3340 Winchester	70 MB	4/14"	270	5600		0.5μ	铁酸盐，移动	精密表面	线性音圈		低质量磁头
5	1979	IBM 3370	571 MB	7/14"	635	12134	2964	0.324μ	薄膜	精密表面	线性音圈		
6	1979	IBM 3310	64.5MB	6/8"	450	8530				混合，扇区伺服	旋转音圈	27 ms	
7	1980	SeagateST506	5 MB	4/5.25"	255	7690				开环	步进电机	170 ms	PC 的 5.25"盘
8	1983	MaxtorXT1140	126 MB	8/5.25"						扇区伺服	旋转音圈		内集线轴电动机
9	1991	IBM Corsair	1 GB	8/3.5"	2238	58874			MR 头	扇区伺服	旋转音圈		
10	1993	Seagate 12550	2.19 GB	10/3.5"			7200			扇区伺服	旋转音圈		
11	1997	IBMTravelstar	4 GB	3/2.5"	12 500	211000				扇区伺服	旋转音圈		
12	2000	Seagate318451	18.3 GB	3/2.5"			15 000			扇区伺服	旋转音圈		

步骤1 理解运行过程。磁道跟随伺服问题的分解框图如图10-56示。机械系统由一个旋转的音圈电机和一个轻质的机械构建组成，此构件支撑着装有悬浮架的滑动机构。滑动机构由磁阻读头和薄膜式电感写头组成，它可借助盘片旋转产生的气流悬浮在盘片的表面。功率放大器通常以电流放大器的方式接入电路，于是磁头的基本运动可以用简单的惯性模型表述为：

$$G_0(s)=\frac{A}{Js^2} \tag{10-36}$$

其中 J 是总惯量，A 包括电机转矩常量和放大器增益。虽然整个系统的结构灵活，但是细微的运动很复杂，因为存在许多弱阻尼状态。它也会因气流的冲击和由外壳运动引起的振动而受到影响。为了达到控制设计的目的，引入简单的谐振模式，则模型为：

$$G(s)=\frac{A}{Js^2}\frac{\left(2\zeta\frac{s}{\omega_1}+1\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_1}+2\zeta\frac{s}{\omega_1}+1\right)} \tag{10-37}$$

其中，振动频率 ω_1，阻尼比 ζ 是已知的，而且有界。

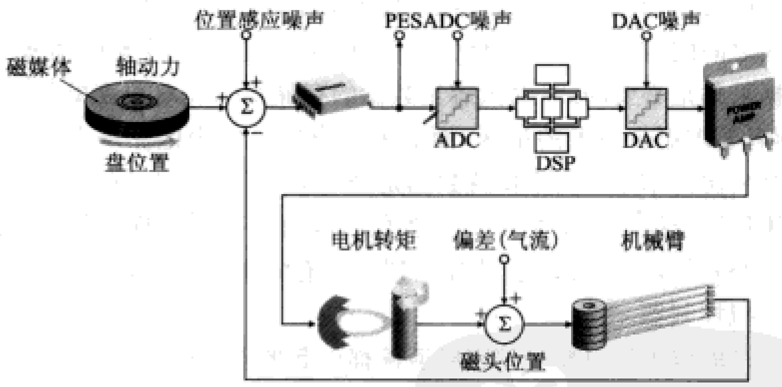


图10-56 磁道跟随模模型概览

磁头组件的运动控制有两种模式：一种是寻道运动，即磁头在磁道与磁道之间的运动；另一种是磁道跟随运动，即保持磁头悬浮在指定的磁道中心位置。在寻道方式下，性能的评估标准是最小时间，理论上需要“开关”或“Bang-Bang”控制。不同的单元有不同的最大可用力矩及其他一些严格规定的参数，为了使这些单元能使用同样的控制器，磁盘驱动采用的是“继电器式曲线跟随”方法。在该方法下，磁头组建可以在满力矩状态下一直加速运动，直到速度达到力矩反转曲线，在反馈控制作用下磁头按照这个曲线减速，最终以零速度到达目标磁道。力矩反转曲线与磁头到目标磁道的距离有关。当曲线逼近最优的最小时间开关曲线时，力矩有一定程度的降低，此时微小的电机都有足够的力矩来跟随该曲线。当到达目标磁道时，切换为磁道跟随运动方式。在接近目标磁道时，为避免模式的突然切换和使得伺服系统平滑过渡到轨道跟随方式，需要采用一种称为近似时间最优伺服的控制或者PTOS(参见第9章)。

作为一项成熟技术，历年来许多技术发展的趋势影响了控制问题的本质。例如，

如前表所示，磁盘越来越小，更坚硬更灵活。随着机械臂组件的变小，惯性也会减小，以至于像在两个磁道见这样微小的运动过程中，摩擦力的影响要比惯量大的多。关于目前推出的驱动器，其磁道的宽度小到约 0.2 微米的程度，这个值已同现代集成电路芯片的特征尺寸相当。为应对这一趋势，科研人员正致力于在机械臂和悬浮架之间增加第二个执行器的方法，以让机器人手臂具有精细的手腕动作。鉴于欠阻尼状态下的灵活性控制有一定的困难，应考虑将机械臂封装，以增加主要振动模式下的阻尼。其他的建议包括：在机械臂上增加传感器，以增加额外的反馈来控制系统的灵活性。在本例研究中，假设采用单音线圈执行器，其灵活性由式 10-37 给出，其中 $\omega_1 \geqslant 2\pi \times 2.500$，$\zeta \geqslant 0.05$。因为实际系统的谐振细节不清楚，所以谐振需要增益稳定。

步骤 2 选择传感器。最早的驱动器采用开环控制，用一个机械定位器把组件固定在磁盘上，用另一个定位器把磁头固定在磁道上。反馈控制技术在 1971 年开始得到应用，利用存储在磁盘特定区域上的位置信息获得反馈信息。整个梳状磁头由伺服电机表面信息定位。如果梳状机构倾斜或者彼此错位，数据将难以被读取。这样的问题限制了盘片的数量和磁道的密度。在现代磁盘中，磁道位置信息被记录在每个磁道用户数据扇区之间的沟槽上。基于该位置信息进行的控制称为**扇区伺服控制**，对位置信息进行数据采集是必要的。[①] 对大容量数据的存储要求和对更高的采样率控制要求是矛盾的，前者要求更少更大的扇区，而后者要求更小的扇区。每个实例都是两个冲突的要求相互妥协的结果。由于位置数据是经过采样得到的，因此控制器都是能够最大限度地利用位置数据的数字装置。虽然利用多速率控制实现对传感器读控制纠错的理论研究已经开始，但是现在还没有找到一个有效的办法。在本研究实例中，我们将设计一个模拟控制器。

磁盘上记录的位置信息易受到因磁道偏移引起的误差的影响，这意味着磁道的半径不是定常的。通常，每一次沿着磁道的运动都会有重复部分，这一部分能够测量的一般为谐波，可以用一个信号作为电机的前馈将其抵消。位置误差信号(PES)也包括多种因素引起的随机噪声。这包括：气流对滑动机构的中级，外界对磁盘的摇摆，解码位置信息的信号处理装置的噪声受控对象，为发动机提供转矩的功率放大器的噪声受控对象以及由在过程中需要的模数转换器所产生的误差。

步骤 3 选择执行器。RAMAC 使用直流电机作为执行器，后来的驱动器使用液压执行器。当 Seagate 公司在 1980 年生产出 5.25 英寸驱动器时，执行器是步进电机。以上的执行器的控制都采用的是开环电路。1971 生产的 IBM3330，第一次采用了磁头位置反馈控制，执行器是线性运动的音圈电机。[②] 1979 年，旋转音圈电机问世，如今几乎所有的硬盘驱动器都使用旋转运动执行器。功率放大器通常作为电流放大器接入到电路，来简化动力学问题。从电流感应电阻器到放大器的反馈形成一个独立且精细

① 控制时，前后半段处于相反的饱和极性控制状态的一般用语。

② Workman(1987)，Franklin，Powell，与 Workman(1998)。

设计的“力矩回路”，因此，考虑到大多数情况下磁道跟随的外环位置控制，可以忽略电机的动力学特性。

步骤 4 *建立线性模型*。如过程讨论中所提及的，线性模型有一个灵活的方式，即

$$G(s)=\frac{1}{s^2}\frac{(2\zeta s/\omega_1+1)}{\left(\frac{s^2}{\omega_1^2}+2\zeta\frac{s}{\omega_1}+1\right)} \tag{10-38}$$

其中，$\zeta=0.05$，$\omega_1=2.5$，对应的度量时间单位以毫秒计而不是以秒计。增益 A 和惯性 J 包含在补偿器的增益中。因此，假定功率放大器为理想的电流放大器。此外，我们仅考虑磁道跟随，而不考虑寻道。

步骤 5 *设计 PID 或者超前滞后控制器*。鉴于标称模型如此简单，首先要设计的是超前补偿器，以获得尽可能大的带宽来保证相位裕度为 50°，这样得到的最小值为 4 的增益裕度，从而稳定谐振。该法已经由 R. K. Oswald(1974)发表。我们将尝试两种设计方法，并比较它们在带宽和阶跃响应方面的性能。对于第一种设计方法，我们使用简单的超前补偿器，它能提供 50°的相位裕度和不低于 4 的增益裕度。为满足期望的相位裕度，要使超前补偿器 $\alpha=0.1$，转折频率要设得尽可能高，以保证在谐振时的增益裕度为 4。这样的曲线按照因式 $1/2\zeta=10$ 爬升，高于幅值渐近线。因此。转折点的位置必须要使得渐近线在 $\omega_1=5\pi$ 处低于 1/40 的。最终的超前补偿器传递函数为

$$D(s)=0.617\,\frac{(2.22s+1)}{(0.222s+1)} \tag{10-39}$$

在超前设计后，系统的伯德图如图 10-57 所示。

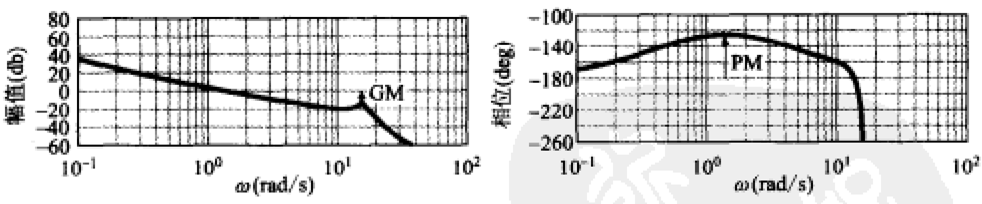


图 10-57 带单超前补偿设计的伯德图

在该设计中的增益转折频率为 $\omega_1=1.39$ rad/ms 且阶跃响应如图 10-58 所画，其表明上升时间约为 $t_r=0.8$ms，超调量为 25%。之前我们也证实，50°的相位裕度相当于 0.5 的阻尼系数和约为 17%的超调量。但是，由于超前补偿器的零点位于前相通路，所以超调量会因为该零点的存在而增加。

在第二种设计方法中，我们增加一个衰减滤波器来消除谐振峰值，以改善响应速度以及带宽。其具体设计思路是把滤波器的截止频率置于转折频率和谐振频率之间，使得阻尼系数足够小而有不过分减小相位裕度，以避免对增益裕度造成影响。经过反复试验，符合要求的设计为

$$D(s)=1.44\,\frac{(1.48s+1)}{(0.148s+1)} \tag{10-40}$$

用做测试的滤波器是

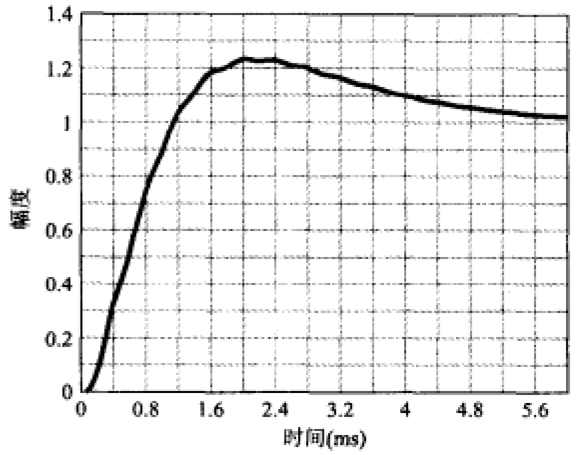


图 10-58　磁盘驱动控制的阶跃响应(PM=50°)

$$F(s)=\frac{1}{\frac{s^2}{(10.3)^2}+0.6\frac{s}{10.3}+1} \tag{10-41}$$

此例的伯德图如图 10-59 所示，阶跃响应曲线如图 10-60 所示。

这里转折频率是 2.13，比没有衰减滤波器增加了 35%；上升时间为 0.3 毫秒，较没有衰减滤波器降低了 60%。超调量有些增大。虽然这里没有提到，但是对于控制补偿器更有可能是一个陷波滤波器，而不是这里设计的低通滤波器。陷波滤波器可更好地抑制谐振，且允许加大带宽。这主要取决于对谐振及其周围环境不确定性的理解程度。在许多情况下，通过相位稳定来消除谐振同时提高转折频率使其高于谐振频率是可能的。

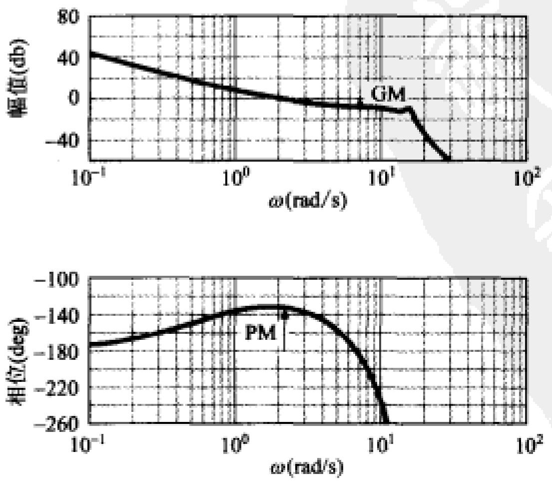


图 10-59　有超前脉冲衰减滤波器的系统伯德图

步骤 6 评估/改进受控对象。在第一步中已经提到对包括主要设计在内的方案进行修正的问题。设计的主要参数一旦被选定，那么剩下的改进可能包括：在制造工艺上增强机械臂的刚度以提高振动频率，以及为机械臂增加阻尼封装以增加阻尼系数。其他的改进还包括 PES 解码算法的改进，以消除噪声。

步骤 7 尝试最优控制或自适应控制。根据线性二次型指标设计的方案需要用性能指标（损耗函数）来度量，结果如图 10-61 所示。虽然进一步的改进可能会得到满意的设计方案，但是这种技术带来的显著的振荡响应是没有发展前途的。特别是，包括 y 和 y 的代价函数的设计应予考虑。这种方法的深入探讨将放在高级的课程中。

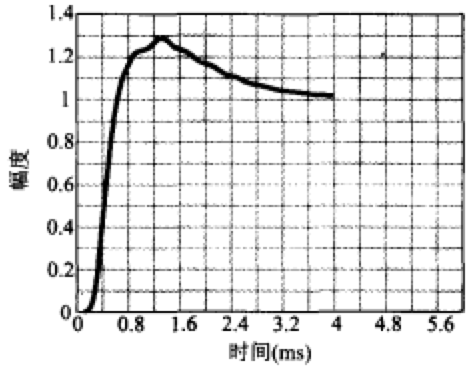


图 10-60 有超前脉冲衰减滤波器的系统阶跃响应

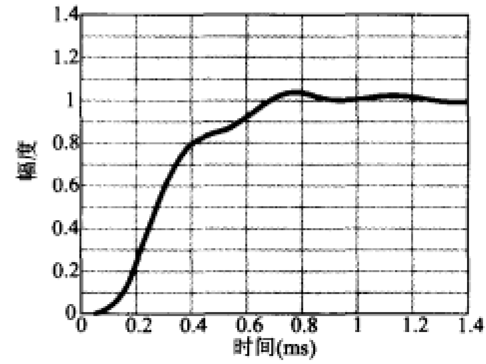


图 10-61 LQR 设计的阶跃响应

步骤 8 仿真设计，对比可选方案。通常与设计同步进行。

步骤 9 建立原形系统。在设计过程的初期应建立实验模型，使设计可以在该模型上测试。

关于数字控制设计和磁盘伺服系统的应用，读者可以参考 Franklin、Powell 和 Workman(1998)。

10.6 半导体晶片制造中的快速热处理器控制系统

图 10-62 展示了制造超大规模集成电路（如微处理器）和一些联合控制元件的主要过程。过程中描述的许多步骤，如化学蒸汽沉积或者蚀刻，必须在严密控制和一定的温度时间序列进行(Sze,1988)。多年来，标准的做法是，同时在一批晶片上实践这些步骤，以获得大量完全相同的芯片。为了实现芯片上更小的元件尺寸要求，以及为芯片种类和数量提供更多灵活性，集成电路制造工具生产商需要在热处理过程中对温度和时间曲线提供越来越准确的控制。对于这些要求，一个主流的趋势是在一间墙壁冰冷，有可变热源（快速热处理器 RTP）的封闭室内对一个晶片连续地实行热处理的步骤。



图 10-62 制造集成电路的步骤（courtesy international sematech）

RTP系统要求晶片温度的变化符合如图10-63的曲线。图中斜坡上升速度是25℃～150℃/s，吸收温度在600℃～1100℃的范围之内，该阶段的持续时间从极短到120 s。如果温度的斜坡过大，晶体结构有被损坏的危险，所以斜坡上升率应受到限制。因为具备快速改变温度的能力，RTP系统能够快速且准确地停止诸如沉积及蚀刻这样的化学处理过程，所以芯片的制造可以达到很小的长度。

图10-64所示为一个普通的RTP反应堆，其中包括卤化钨灯，水冷却不锈钢墙面和石英窗等。温度测量可以通过多种方法进行，包括热电偶、RTD和高温计。出于多种原因(粒子代谢、小量扰动等)，最好选用无接触式温度传感器；因此高温计技术最常用。高温计是测量红外辐射的非接触式传感器，实际上是一个关于温度的函数。大家知道，物体发射的辐射能量与 T^4 成正比例，其中 T 是物体的温度。高温计的优点是具有快速的响应时间，可用来测量移动物体的温度(例如旋转的半导体晶片)，可以在半

导体制造的真空环境中运行。

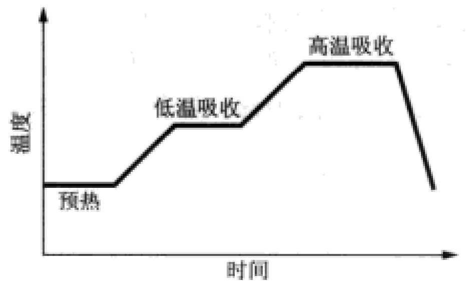


图 10-63 典型 RTP 温度轨迹

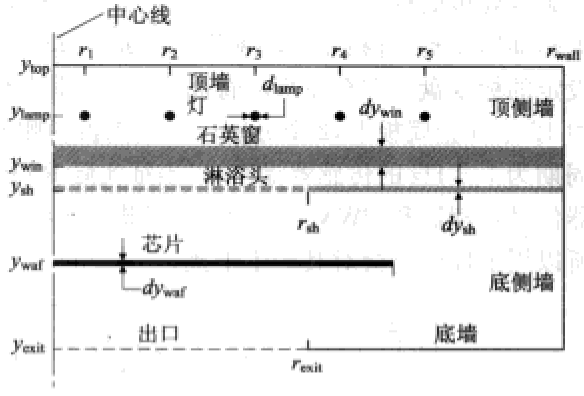


图 10-64 普通 RTP 系统

执行器的选择取决于加热晶片的功率供应技术(卤钨电子管、弧光电子管、热感应器等)。卤钨电子管广泛应用在半导体制造的快速热处理过程中(emami-naeini, et al., 2003)。图 10-65a 给出了由线性卤钨电子管两面加热的系统(Mattson 制造的典型系统)。照在顶部和底部的电子束呈直角以形成轴的对称。图 10-65b 给出了蜂巢状单边加热系统。最后,图 10-65c 给出了电子管排列在同心环上的配置情况(典型代表为 stanford-timmst 密封室, gyugyi, et al, 1993)。电子管达到饱和,且能根据实际需要在 5%~95%之间进行功率设定。

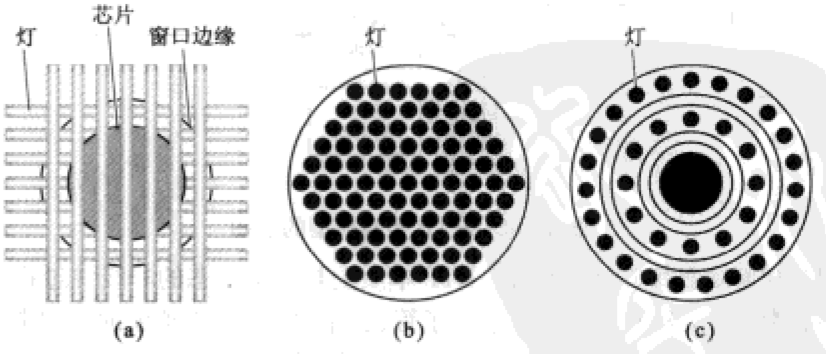


图 10-65 多种 RTP 电子管的几何形状

为了解释 RTP 系统的设计,我们给出在 SC 方法之下进行专门设计得到的结果并据此建立实验模型,用来研究与 RTP 设计和操作相关的问题。实验模型如图 10-66 所示。该模型由铝材料制成,包括三个标准的 35 W、12 V 的电子管,用来对一个模拟晶片的矩形金属板进行加热。金属板的尺寸为 $4\text{in}\times 1\frac{3}{4}\text{in}$,为增加辐射的吸收,金属板被涂黑。金属板与电子管并行排列,电子管放置在灯罩中。电子管全部置于滑轨上,以便调节它们与金属板间的距离。当电子管外移时,系统增益降低,但是热辐射干扰

(热耦合)增加。另一方面，随着电子管靠近金属板，系统增益增加，热耦合减少。电子管到金属板的标称距离是 1 英寸，但是可调整为几英寸。电子管受脉宽调制(PWM)放大驱动器驱动，有独立的功率供给单元。其侧面有三个为开环控制和人工操纵控制而设定的标度盘。在金属板的背面有 14 个垂直放置的电阻式温度探测器(RTD)带，其中 12 个在金属板上，2 个分别位于金属板两侧的支架上。噪声受控对象源滤波器发出周期为 1.5 Hz 的传感器噪声，以表征实际 RTP 系统中的噪声。所有电子元件(如传感器信号处理器和 PWM 放大器)被封装在系统单元的底部，但因为部分器件暴露在外，所以周围环境仍会对其产生干扰。

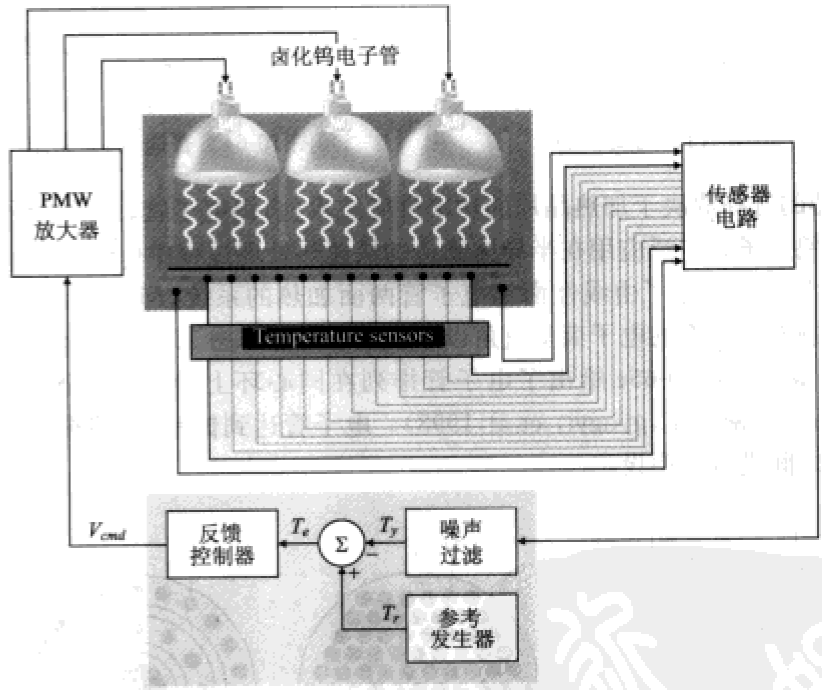


图 10-66 RTP 实验模型的框图

步骤 1 理解过程及其性能指标。RTP 本质上是一个动态的非线性过程。系统有许多值得重视的特性，如多样的时间尺度(电子管、晶片、发射头、石英窗的时间常数都不同)；非线性(主导的辐射)特性；非线性电子管；电源效应；传感器的数量及其安装位置；电子管的数量、安装位置及其组合；温度的大幅度变化等。辐射损失的非线性增加使得温度升高，系统的直流增益(δ 温度/δ 功率)随之降低。因此需要多种类型的物理模型。装置的设计需要详细的物理模型，但是几何形状变化的快速评估、方法改进以及反馈控制的设计，都需要降阶模型。同时还要求从人工操纵控制到自动控制的平滑过渡。

步骤 2 选择传感器。这在之前已经讨论过。对于实验模型，传感器是一组有 14 个 RTD 的设备，而只有 3 个(分别位于位于金属板中心和两边的支架上)用作反馈，其余的用于温度控制。本例只对中心温度进行反馈控制。(另一种可选方案是计算三个

温度值之和作为一个信号，来控制平均温度。)

步骤 3 选择执行器。之前也讨论过。对于实验模型，执行器有三根之前描述的标准卤化钨电子管组成。本例，我们要通过为每个电子管提供一样的输入指令把三根电子管束为一个执行器。

步骤 4 建立线性模型。实验模型已建(见步骤 9)。非线性系统方程包括传导环节(见第 2 章)和热辐射环节(参见 emami-naeini et al. 2003)。非线性系统识别方法可用来求解系统模型。特别地，3 个电子管的电压逐步升高，然后保持恒定，随后逐步降低，记录下输出温度。由系统识别方法[①]导出如下的非线性系统模型，包括辐射环节和传导环节(分别是 $\boldsymbol{A}_r$ 和 $\boldsymbol{A}_{con}$)：

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{A}_r\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{T}_\infty\end{bmatrix}^4+\boldsymbol{A}_{con}\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{T}_\infty\end{bmatrix}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{10-42}$$

此处，$\boldsymbol{T}=[T_1\quad T_2\quad T_3]^T$ 代表温度，T_∞ = 恒定的环境温度($\dot{T}_\infty=0$)，$\boldsymbol{u}=[v_{cmd1}\quad v_{cmd2}\quad v_{cmd3}]^T$ 是控制电压值，系统矩阵为：

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{bmatrix}1.000040 & 0 & 0\\ 0 & 5.557443 & 0\\ 0 & 0 & 13.638218\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_r=\begin{bmatrix}5.4762e-2 & -8.5706e-3 & -8.2961e-4 & -4.5361e-2\\ -8.5706e-3 & 8.5709e-3 & -1.6213e-7 & -8.9134e-8\\ -8.2961e-4 & -1.6213e-7 & 8.2998e-4 & -2.0976e-7\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{con}=\begin{bmatrix}3.5599e-7 & -1.1136e-7 & -1.1976e-7 & -4.7011e-8\\ -1.1136e-7 & 1.1602e-2 & -2.5027e-3 & -9.0992e-3\\ -1.9761e-7 & -2.5027e-3 & 6.3736e-3 & -3.8707e-3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3.4600e-1 & 1.1772e-1 & 2.8380e-2\\ 3.8803e-11 & 8.0249e-2 & 1.8072e-2\\ 8.0041e-9 & 2.7216e-3 & 3.1713e-2\end{bmatrix}$$

通过推导得出的系统线性模型为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{T}}&=\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{T}+\boldsymbol{G}_3\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}&=\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{T}+\boldsymbol{J}_3\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{10-43}$$

其中，$\boldsymbol{y}=[T_{y1}\quad T_{y2}\quad T_{y3}]^T$，且

$$\boldsymbol{F}_3=\begin{bmatrix}-0.0682 & 0.0149 & 0.0000\\ 0.0458 & -0.1181 & 0.0218\\ 0.0000 & 0.04683 & -0.1008\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}_3=\begin{bmatrix}0.3787 & 0.1105 & 0.0229\\ 0.0000 & 0.4490 & 0.0735\\ 0.0000 & 0.0007 & 0.4177\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{J}_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

3 个开环极点可由 MATLAB 算出，分别位于 −0.0527，−0.0863，−0.1482。对于本例的情况，由于将 3 根电子管组合为一个执行器，且仅使用中心温度作为反馈，得到线

① 由 Dr. G van der Linden 推导得出。

性模型，即为

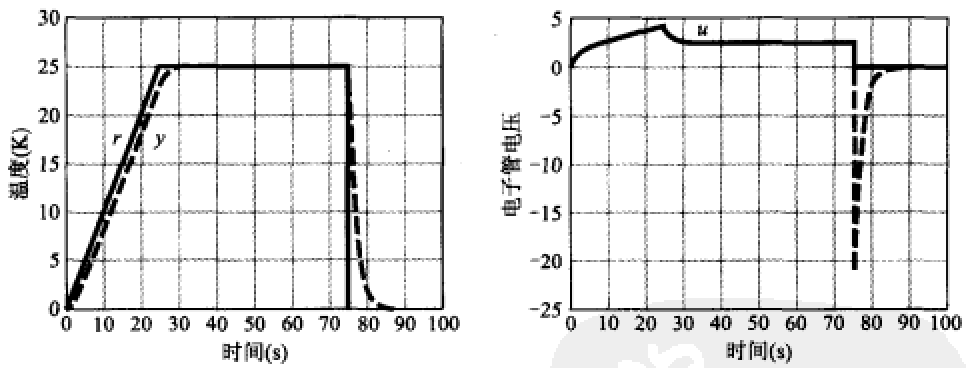
$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-0.0682 & 0.0149 & 0.0000\\ 0.0458 & -0.1181 & 0.0218\\ 0.0000 & 0.04683 & -0.1008\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0.5122\\ 0.5226\\ 0.4185\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}=[0\quad 1\quad 0],\quad \boldsymbol{J}=[0]$$

写成传递函数为

$$G(s)=\frac{T_{\text{gl}}(s)}{V_{\text{cmd}}(s)}=\frac{0.5226(s+0.0876)(s+0.1438)}{(s+0.1482)(s+0.0527)(s+0.0863)}$$

步骤 5　设计超前滞后或者 PID 控制器。我们会尝试形式为：$D_c(s)=\frac{(s+0.0527)}{s}$的简单 PI 控制器来抵消一个慢速极点的作用。系统的线性闭环响应如图 10-67a所示，相关的控制效果如图 10-67b 所示，系统响应以约 2s 的时滞和无超调量跟随控制指令的轨迹曲线。电子管直到 75s 后才具有正常的响应，然后为了跟随温度指令的骤降而极性变负。系统中不可能出现这种状况，因为没有快速的降温方法且电子管低温饱和。注意，这里没有明确的方法控制温度的不均匀性。



(a) 温度跟踪响应　　(b) 控制效果

图 10-67　PI 控制器的线性闭环 RTP 响应

步骤 6　评估/改进受控对象。在执行器和传感器选择讨论中已附带说明这些。

步骤 7　尝试最优设计。使用包括积分控制的误差空间法和第 7 章的线性二次方程的高斯方法。误差系统为：

$$\begin{bmatrix}\dot{e}\\ \dot{\boldsymbol{\xi}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ \boldsymbol{\xi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}J\\ \boldsymbol{G}\end{bmatrix}\mu,\tag{10-44}$$

其中，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}J\\ \boldsymbol{G}\end{bmatrix},$$

$e=y-r$，$\boldsymbol{\xi}=\dot{\boldsymbol{x}}$ 且 $\mu=\dot{u}$ 。为状态反馈设计，使用第 7 章的 LQR 公式，即

$$\mathcal{J}=\int_0^{\infty}\{\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}+\rho\mu^2\}\mathrm{d}t,$$

其中 $z=[e \quad \xi^T]^T$。注意ξ的选择是为了处理跟踪误差 e 和控制信号 u，以及 3 个温度的差别。因此，性能指标要包括下列形式的项

$$10\{(T_1-T_2)^2+(T_1-T_3)^2+(T_2-T_3)^2\}$$

这样就可以降低温度的非均匀性至最小。因数 10 由实验和作为误差状态与对象状态之间的相对权重所决定。状态矩阵和控制权重矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 和 R，分别为：

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 20 & -10 & -10\\ 0 & -10 & 20 & -10\\ 0 & -10 & -10 & 20\end{bmatrix},\quad R=\rho=1$$

以下的 MATLAB 指令用来设计反馈增益：

```
[K] = lqr(A,B,Q,R).
```

MATLAB 算得最终的反馈增益矩阵：

$$\boldsymbol{K}=[K_1 \vdots \boldsymbol{K}_0]$$

其中，

$$K_1=1,\ \boldsymbol{K}_0=[0.1221 \quad 2.0788 \quad -0.2140]$$

得出的内部模型控制器的形式为

$$\begin{aligned}\dot{x}_c&=B_c e\\ u&=C_c x_c-\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{T}\end{aligned} \tag{10-45}$$

其中 x_c 表示控制器其状态，且

$$B_c=-K_1=-1,\quad C_c=1$$

MATLAB 算得的最终状态反馈闭环极点是：$-0.5574\pm0.4584\mathrm{j}$，$-0.1442$ 和 -0.0877。全阶估计器设计时，选取其过程和传感器噪声强度作为估计器的调节器

$$R_w=1,\quad R_v=0.001$$

下面的 MATLAB 指令用来设计估计器

```
[L] = lqe(F,G,H,Rw,Rv).
```

得到最终的估计器增益矩阵是

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}16.1461\\ 16.4710\\ 13.2001\end{bmatrix}$$

估计器误差极点在 -16.5268，-0.1438 和 -0.0876。估计器方程为：

$$\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}=\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{T}}+\boldsymbol{G}u+\boldsymbol{L}(y-\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{T}}) \tag{10-46}$$

加上估计器后，内部模型闭环控制器方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_c&=B_c e\\ u&=C_c x_c-\boldsymbol{K}_0\hat{\boldsymbol{T}}\end{aligned} \tag{10-47}$$

闭环系统方程为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_{cl}&=\boldsymbol{A}_{cl}\boldsymbol{x}_{cl}+\boldsymbol{B}_{cl}r\\ y&=\boldsymbol{C}_{cl}\boldsymbol{x}_{cl}+\boldsymbol{D}_{cl}r\end{aligned} \tag{10-48}$$

其中 r 是参考输入温度曲线，闭环状态向量为 $\boldsymbol{x}_{cl}=[\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \quad x_c^{\mathrm{T}} \quad \hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，系统矩阵为：

$$A_{c1}=\begin{bmatrix} F & GC_c & -GK_0 \\ B_cH & 0 & 0 \\ LH & GC_c & F-GK_0-LH \end{bmatrix},\quad B_{c1}=\begin{bmatrix} 0 \\ -B_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{c1}=[H\quad 0\quad 0],\qquad D_{c1}=[0]$$

系统的闭环极点位于 $-0.5574\pm0.4584j$，-0.1442，-0.0877，-16.5268，-0.1438和-0.0876，与期望极点相同。闭环控制系统的结构如图 10-68 所示。

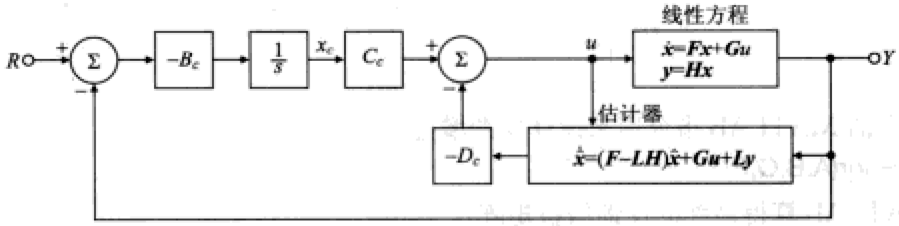


图 10-68 闭环控制结构图

Simulink 画出的闭环控制系统框图如图 10-69 所示。系统的线性闭环响应如图 10-70a 所示，联合控制效果如 10-70b 所示。指令温度曲线 r，是以 1 ℃/s 斜率上升，分布在 0 ℃～25 ℃的斜坡，然后是 50 s 的平稳时间，接着落回 0 ℃。（注意，斜率很小，因为 RTP 实验模型只有 3 个电子管，而实际的系统有上百个，相应地就会有前面提到的快得多的上升率。）系统能够跟随指令温度轨线，尽管对斜坡有约 2 s 的时滞和最大 0.089 ℃的超调量。正如所期待的，系统能近似跟随恒定输入，没有稳态误差。电子管的控制指令如期待的那样上升，以便跟随斜坡输入，在 25 s 时达到最大值，然后在 35 s 左右回落至稳定值。通常，电子管的响应曲线在 0～75 s 之内，接着是由快速冷却所产生的几秒钟的负指令电压。然而，因为系统中没有有效的冷却系统，所以负指令电压（如图中的虚线所示）实际上是不可实现的。因此，在非线性仿真中，受控的电子管电源必须严格限定为非负值（参见步骤 8）。注意，从 75～100 s 的响应是系统的负阶跃响应。

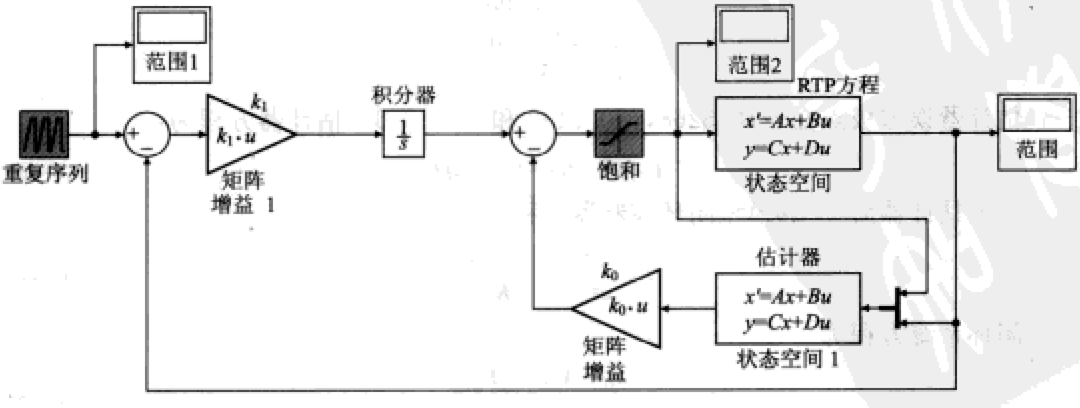
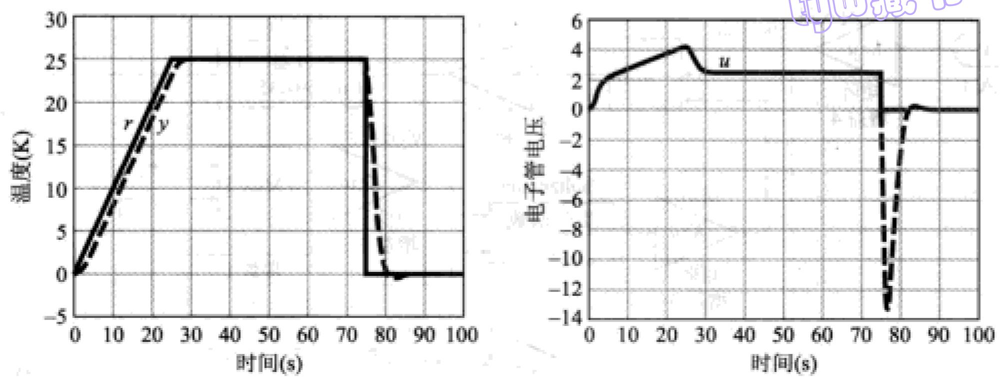


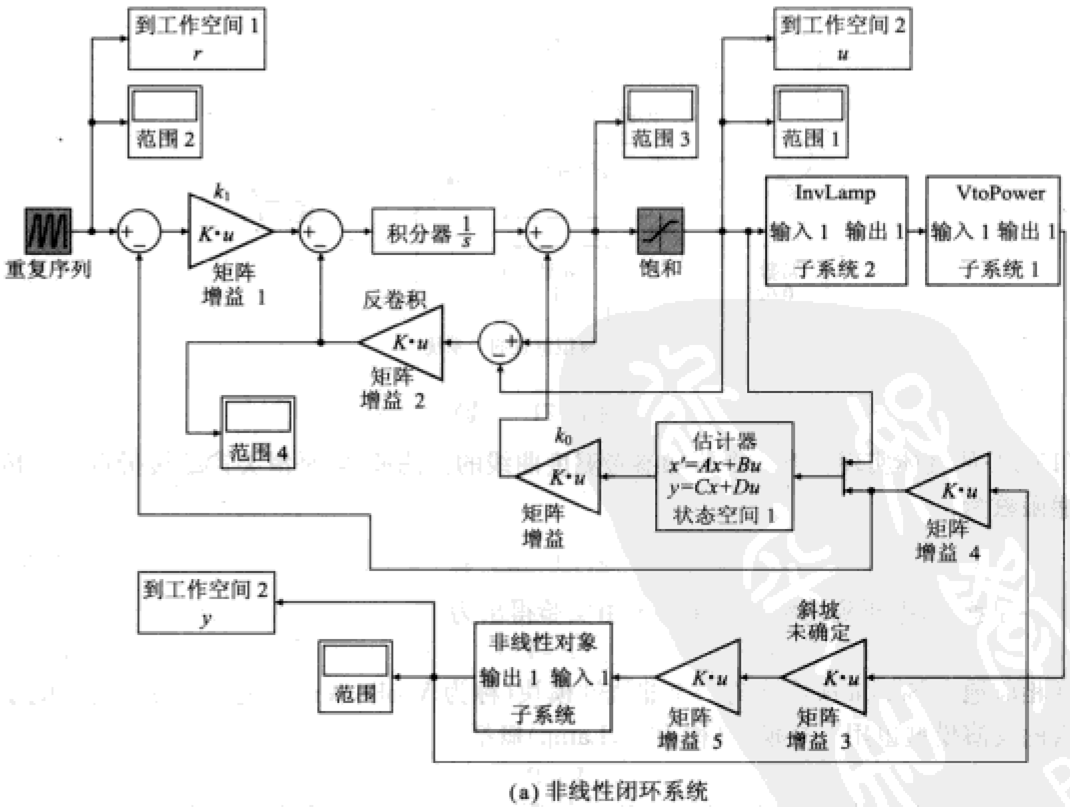
图 10-69 RTP 闭环控制 Simulink 框图



(a) 温度跟随响应 (b) 控制效果

图 10-70 线性闭环 RTP 响应

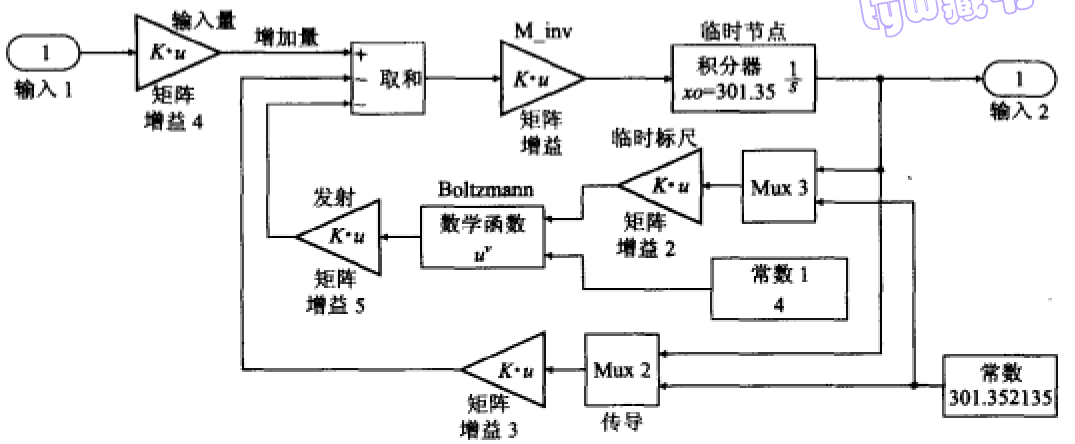
步骤 8 仿真有非线性度的设计方案。用 Simulink 仿真的非线性闭环系统框图如图 10-71 所示。模型以开氏温度为单位，环境温度为 310K①。非线性对象模型是公式



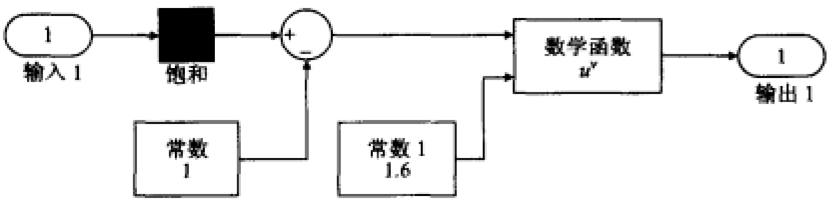
(a) 非线性闭环系统

图 10-71 非线性闭环 RTP 系统的 Simulink 框图

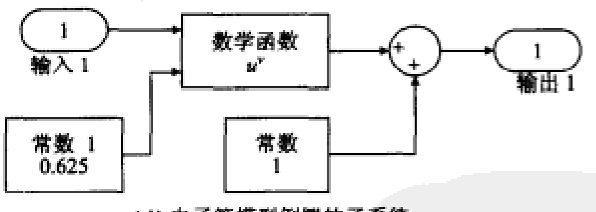
① [K]=[℃]+273。



(b) 非线性对象



(c) 电压转化为功率的子系统



(d) 电子管模型倒置的子系统

图 10-71 （续）

(10-42)的具体实现。有一个跟随参考温度曲线的预滤波器(平滑尖锐的转折点)，其传递函数为：

$$G_{pf}(s)=\frac{0.2}{s+0.2} \tag{10-49}$$

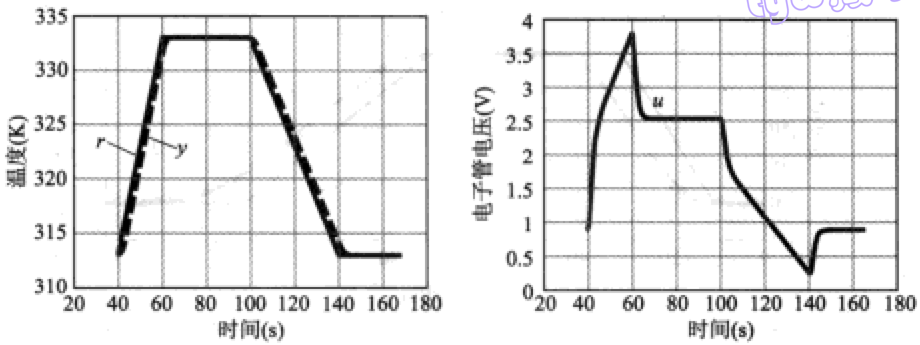
注意，从电压到功率的转化公式由实验得出为

$$P=V^{1.6} \tag{10-50}$$

并相应地在 Simulink 中作为一个非线性模块(称为 VtoPower)实现。静态非线性电子管的反演模型也用一个模块(称为 InvLamp)概括：

$$V=P^{0.625} \tag{10-51}$$

这可用来消除电子管的非线性度。如图所示，系统的电压调节范围在 1～4 V 之间。电子管包含一个饱和非线性单元，如同积分抗漂移逻辑单元，用以处理电子管的饱和。非线性动态响应曲线如图 10-72a 所示，且控制效果如图 10-72b 所示。注意，非线性响应大体上与线性响应相同。



(a) 温度跟踪响应　　(b) 控制效果

图 10-72　非线性闭环响应

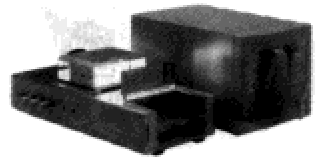


图 10-73　RTP 温度控制实验模型

RTP 实验模型的原形已经建立[①]，并于 1998 年在 Colorado 州 Vail 市举办的 SematechAEC/APC 会议上宣读。图 10-73 给出了该作业系统的图片。该系统在本质上是多元变量的。原形系统使用的三输入三输出多元控制器设计方法与步骤 7 讨论的相同，且在使用实时操作系统的嵌入式控制器平台上使用。

连续控制器(例如，组合型内部模型控制器和估计器)有如下的形式：

$$\dot{x}^c = A^c x^c + B^c e$$
$$u = C^c x^c \tag{10-52}$$

其中 $x^c = [x_c^{\mathrm{T}} \quad \hat{T}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，

$$A^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ GC_c & F - GK_0 - LH \end{bmatrix}, \quad B^c = \begin{bmatrix} B_c \\ L \end{bmatrix} \tag{10-53}$$

并且

$$C^c = [C_c \quad -K_0]$$

对控制器以 $T_s = 0.1$ s 的采样周期离散化(参见第 8 章)，且数字式实现为

$$x_{k+1}^c = \Phi^c x_k^c + \Gamma^c e_k$$
$$u_k = C^c x_k^c \tag{10-54}$$

实际系统对参考温度曲线的响应，以及三个电子管的电压值如图 10-74 所示。这与非线性闭环系统仿真结果(如果考虑噪声)能良好地吻合。

关于建模和控制 RTP 系统的深层次问题，读者可参阅 Emami-Naeini 等人(2003)、Ebert 等人(1995)、de Roover 等人(1998)和 Gyugyi 等人(1993)的著作。

---

① 由 Dr. J. L. Ebert 推导得出。

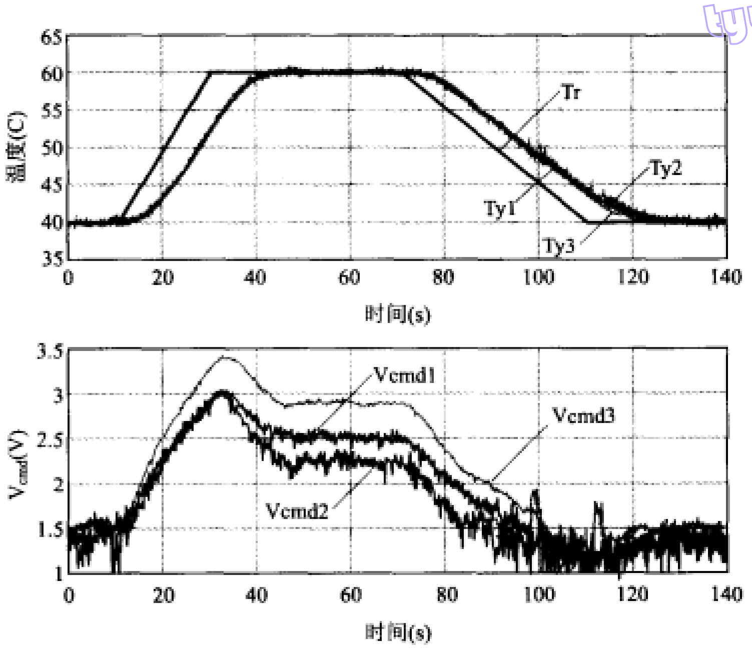


图 10-74　RTP 温度控制实验模型的响应

小结

在这一章，我们列出了控制系统设计的基本纲要，而且将其应用到五个典型研究实例中。

设计纲要需要若干明确的步骤。

(1) 建立系统模型并确定要求的性能指标。这一步的目的是回答这样一个问题——系统是怎样的，目的何在？

(2) 选择传感器。控制的一条基本规律是若不能观测，则不能控制。以下是选择传感器要考虑的要素：

(a) 传感器的数量和安装位置；

(b) 工艺；

(c) 传感器的性能指标，如精确度；

(d) 物理尺寸和重量；

(e) 传感器的品质，如使用寿命、对环境变化的鲁棒性；

(f) 成本。

(3) 选择执行器。执行器必须能驱动系统满足要求的性能指标。传感器选择的要素同样适用于执行器的选择。

(4) 建立线性模型。所有的设计方法都是基于线性模型的。小信号扰动模型和反

馈线性化模型都可应用。

(5) 设计简单的 PID 控制器。用 PID 或者它的同类方法，超前滞后补偿器可能成功满足期望的性能；在任何情况下，这样的工作会体现控制问题的本质。

(6) 评估/改进受控对象。

评估改进装置是否会提高系统的闭环性能；如果能，则回到步骤 1 或者步骤 4。

(7) 尝试最优设计。用于控制规律的选择和基于状态方程的估计器设计，SRL 方法能确保控制系统的稳定性，并能构造 SRL 方法能在减小误差和控制效果之间寻求平衡。相关的另一个方法是任意极点配置，使设计者对动态响应有直接的控制。采用 SRL 法和极点配置法，均会导致设计对参数变化的鲁棒性降低。

(8) 仿真设计与性能验证。此时会用到所有的分析工具，包括根轨迹法、频率响应法、GM 和 PM 度量和暂态响应。可以通过在仿真中改变模型的参数以及观察在使用数字控制时用离散模型近似的补偿器的效果来验证设计的性能。

(9) 建立原形，使用典型输入信号测试系统性能。“要想知道布丁的味道就亲口尝一尝”，直到经过测试的控制设计才是可以真正接受的。没有哪个模型能够包含所有的物理设备特征，因此在将设计安装之前的最后步骤就是，在时间和财力允许的范围内，在物理原形上进行测试。

- ☐ 关于卫星的实例研究说明了欠阻尼谐振系统使用陷波补偿器的效果，也表明了并置执行器和传感器系统比非并置的情况更容易控制。
- ☐ 关于波音 747 飞机的侧面稳定性的实例研究阐明用来协助飞行员的内环反馈作用，而飞行员提供基本的外环控制。
- ☐ 波音 747 飞机的姿态控制说明如何联合内环反馈和外环补偿器以设计一个完整的控制系统。
- ☐ 自动油-气比控制实例说明了设计时滞系统时伯德图的作用。带有非线性传感器的设计仿真验证了极限环的启发式分析，该分析利用等价增益概念，用根轨迹实现。
- ☐ 磁盘驱动实例研究说明在不稳定环境中，带宽是非常重要的。
- ☐ 快速热处理实例研究阐明非线性热系统的建模和控制问题。
- ☐ 在所有情况下，设计者需要能够使用多种工具，包括根轨迹法、频率响应法、状态反馈的极点配置，以及时域响应仿真来得到良好的设计。在本书开始，我们保证了对于这些工具的理解，我们也相信您现在已准备好实践控制工程这门技术。

复习题

1. 为什么对欠阻尼结构，如机械臂，并置的执行器和传感器易于非并置结构?
2. 为什么控制工程师要参与控制过程的设计?
3. 为下列控制问题的执行器和传感器举例。

(a) 地球同步通信卫星姿态控制。
(b) 波音 747 客机的偏移控制。
(c) CD 播放器的磁道跟随器控制。
(d) 点火式汽车引擎的油-气比控制器。
(e) 喷涂汽车的机器人手臂的位置控制。
(f) 轮船的航向控制。
(g) 直升机的姿态控制。

习题

10-1 三种 PID 控制(比例、积分、微分)中，哪一种对减少因常量扰动导致的误差最有效？并解释原因。

10-2 当反馈控制系统中的传感器与执行器在机械结构上非并置时，会不会有更大的不稳定可能性？并解释原因。

10-3 考虑装置 $G(s)=1/s^3$。判断是否可能通过加入超前补偿器使对象稳定。

$$D_c(s)=K\frac{s+a}{s+b},(a<b)$$

(a) 最终反馈系统的最大相位裕度是什么？

(b) 这样的装置，与任意数量的超前补偿器一起，能否使系统条件稳定？解释为什么能或者不能。

10-4 考虑图 10-75 的闭环系统。

(a) 如果 $K=70\ 000$，相位裕度是多少？

(b) 如果 $K=70\ 000$，增益裕度是多少？

(c) K 值多少能够产生～70°的相位裕度？

(d) K 值多少能够产生～0°的相位裕度？

(e) 画出系统对 K 的根轨迹，确定能使系统临界稳定的 K 值。

(f) 如果扰动 ω 是常数且 $K=10\ 000$，使 $y(\infty)$ 保持在 0.1 以下的最大允许 ω 值是多少？

(g) 假设系统特性要求允许 ω 超过(f)中的结果，而又要有相同的误差约束 [$|y(\infty)|<0.1$]。讨论一下应该采取什么步骤解决。

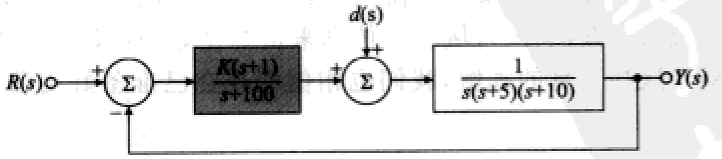


图 10-75 题 10-4 的控制系统

10-5 考虑图 10-76 所示的系统，哪种体现飞机的姿态速率控制。

(a) 设计补偿器，使主导极点位于 $-2\pm2j$。

(b) 画出设计的伯德图简图，选择补偿器式的转折频率至少为 $2\sqrt{2}$ rad/s，PM≥50°。

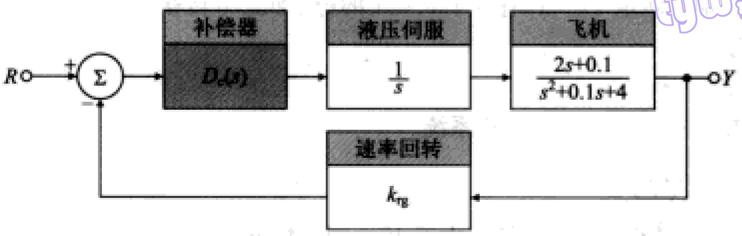


图 10-76　飞机姿态变化率控制框图

(c) 画出设计根轨迹，找出 $\omega_n > 2\sqrt{2}$，$\zeta \geq 0.5$ 的速度常量。

10-6　考虑图 10-77 的伺服系统框图，下列哪些说法是正确的？

(a) 执行器动态特性(极点在 1000 rad/s)必须包括在分析中，用来估计控制系统稳定情况下的可用最大增益。

(b) 为使系统稳定，增益 K 必须为负。

(c) 存在 K 值使得控制系统在 4～6 rad/s 之间振荡。

(d) 系统在 $|K|>10$ 时不稳定。

(e) 如果为了稳定，K 必须为负，控制系统不能抵消掉正扰动。

(f) 正常量扰动将加速负载，从而令 e 的终值为负。

(g) 当只有正常量命令输入 r，误差信号 e 必然有大于 0 的终值。

(h) 对于 $K=-1$，闭环系统稳定，扰动导致的速度误差的稳态幅度小于 5 rad/s。

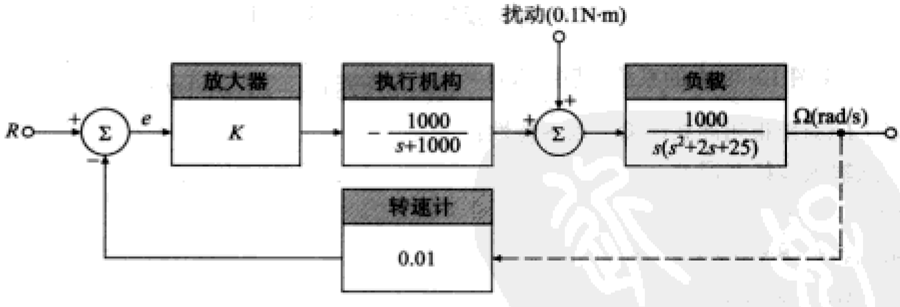


图 10-77　题 10-6 的伺服系统

10-7　杆平衡及其相应控制框图如图 10-78。控制是提供在支点附近的力矩。

(a) 使用根轨迹法，设计补偿器的 $D(s)$ 能够将主导根置于 $s=-5\pm 5j$(对应于 $\omega_n=7$ rad/s，$\zeta=0.707$)。

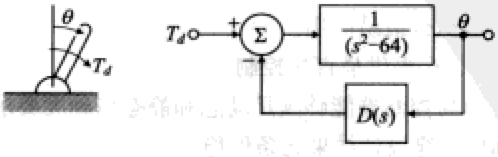


图 10-78　杆平衡

(b) 使用伯德图技术设计补偿器 $D(s)$ 来满足以下特性：

☐ 对于常量输入转矩 $T_D=1$，有少于 0.001 的稳定状态 θ 转移。

☐ 相位裕度≥50°。

☐ 闭环带宽≃7 rad/s。

10-8　考虑图 10-79 的标准的反馈系统。

(a) 设 $G(s)=\dfrac{2500K}{s(s+25)}$

设计超前补偿器使得系统相位裕度大于 45°；斜坡稳态误差应不大于 0.01。

(b) 使用(a)的传递函数，设计超前补偿器使得超调量小于 25%，以及 1% 的稳定时间小于 0.1s。

(c) 设 $G(s)=\dfrac{K}{s(1+0.1s)(1+0.2s)}$

令性能指标为 $K_v=100$ 且 PM≥40°。超前补偿是否对系统有效？找出滞后补偿器，画出被补偿系统的根轨迹。

(d) 使用(c)中的 $G(s)$，设计滞后补偿器使得峰值超调量少于 20% 且 $K_v=100$。

(e) 使用超前滞后补偿系重现(c)。

(f) 找到(e)的补偿系统根轨迹，与(c)中的根轨迹对比。

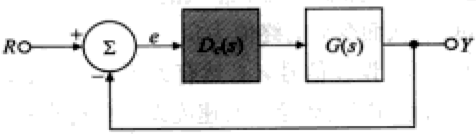


图 10-79　标准反馈控制系统的框图

10-9　考虑图 10-79 中的系统，其中 $G(s)=\dfrac{300}{s(s+0.225)(s+4)(s+180)}$。

补偿器 $D(s)$ 使得闭环系统满足以下特性：

☐ 阶跃输入零稳态误差。

☐ PM=55°，GM≥6db。

☐ 增益转折频率不小于非补偿对象。

(a) 应该用什么补偿种类？为什么？

(b) 设计合适的 $D_c(s)$ 来满足这些特性。

10-10　我们已讨论了三种设计方法：Evans 根轨迹方法、伯德图频率响应法和状态变量极点分配。解释以下说法描述的是哪种方法(如果你感觉某个说法有多于一种方法适合，说明并解释)：

(a) 当对象描述必须从试验数据中得到时使用最为普遍的方法。

(b) 该法对动态响应特性，如上升时间、超调量比率、稳定时间提供直接控制。

(c) 该法对自动(计算机)执行最易应用。

(d) 对稳态误差常量 K_p、K_v 提供最直接控制。

(e) 该法倾向于使得最简易控制器能够满足动态和静态精确度要求。

(f) 该法使得设计者确保最终设计结果无条件稳定。

(g) 该法能够不对包含转移滞后环节一如 $G(s)=\dfrac{e^{-2s}}{(s+3)^2}$ 的对象使用。

10-11　超前滞后网络典型应用在以频率响应法(伯德图)为基础的设计之中。假设一个 I 型

系统，指出这些补偿器网络对于每个列出的性能指标的影响。在每种情况下，指出作为"增长"、"不变"、"减少"的作用。使用二阶对象 $G(s)=K/[s(s+1)]$ 来解释结论。

(a) K_v；

(b) 相位裕度；

(c) 闭环带宽；

(d) 超调量百分比；

(e) 稳定时间。

10-12 热气球的高度控制：美国单人气球驾驶者 steve fossett 乘"自由精神号"于 2002 年 7 月 3 日降落在澳大利亚内陆，成为第一位环球航行的单人气球驾驶者。热气球垂直动作(如图 10-80 所示)方程，垂直平衡线性化后为

$$\delta\dot{T}+\frac{1}{\tau_1}\delta T=\delta q$$

$$\tau_2\ddot{z}+\dot{z}=a\delta T+w$$

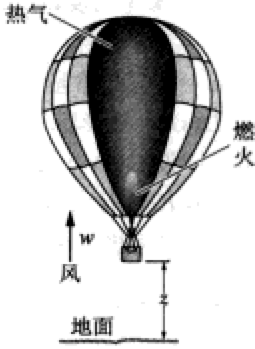


图 10-80 热气球

其中

δT=热气温度与平衡温度的差，此时浮力等于重力；

z=气球高度；

δq=燃烧器的加热率与平衡率(由热气球热容量决定)的差；

w=风速的垂直分量；

τ_1, τ_2, a=方程参数。

高度保持自动导航仪要为参数是 $\tau_1=250$ s，$\tau_2=25$ s，$a=0.3$ m/(s·℃)的气球设计。只有高度信号被感测，所以使用下面的控制律形式：

$$\delta q(s)=D(s)[z_d(s)-z(s)]$$

其中 z_d 是期望(指令)高度。

(a) 画闭环特征值对比例反馈控制器增益 K 的根轨迹草图，$\delta q=-K(z-z_d)$。使用劳斯判据判断增益值和系统临界稳定的相关频率。

(b) 我们的直觉和(a)的结果指示需要大量的超前补偿用来制造满意的自动导航仪。因为 Steve Fossett 是百万富翁，他可以承担更复杂的控制器实现。画闭环特征值对双超前补偿器，$\delta q=D(s)(z_d-z)$ 的根轨迹草图，其中 $D(s)=K\left(\frac{s+0.03}{s+0.12}\right)^2$。

(c) 为比例反馈和超前补偿系统的开环传递函数画伯德图(仅直线渐进)的幅值部分草图。

(d) 选择超前补偿系统的增益 K 来得到 0.06 rad/s 的转折频率。

(e) 使用(d)中的增益，对 1 m/s 的稳定的垂直风速有多大的高度稳态误差？(注意：首先找到从 ω 到误差的闭环传递函数)

(f) 如果(e)中的误差太大，如何调整补偿器以得到更好的低频增益？(只给出定性答案)

10-13 卫星姿态控制系统常使用反应轮来控制角度运动。此系统运动方程为：

卫星：　$I\ddot{\phi}=T_c+T_{ex}$

轮：　$J\dot{r}=-T_c$

测量：　$\dot{Z}=\dot{\phi}-aZ$

控制：　$T_c=-D(s)(Z-Z_d)$

其中

J=轮惯性的力矩；

r=轮速；

T_c=控制转矩；

T_{ex}=扰动转矩；

ϕ=控制角；

Z=传感器测量值；

Z_d=参考角度；

I=卫星惯性(1000 kg/m²)；

a=传感器常量(1 rad/s)；

$D(s)$=补偿器。

(a) 设 $D(s)=K_0$，常数。画出最终闭环系统对 K_0的根轨迹。

(b) K_0在什么范围内闭环系统稳定？

(c) 加入极点在 $s=-1$ 的超前网络，使得闭环系统有带宽 $\omega_{BW}=0.04$ rad/s，阻尼比 $\omega_{BW}=0.04$ rad/s，补偿器为 $D(s)=K_1\frac{s+z}{s+1}$。超前网络零点应怎样置放？画出补偿系统根轨迹，给出 K_1值令其满足要求。

(d) K_1 在什么范围内可使系统稳定？

(e) 对于(c)的设计，对常量扰动力矩 T_{ex}的稳态误差（z 与参考输入 z_d之差）是多少？

(f) 考虑输入 T_{ex}，系统类型是什么？

(g) 采用对(c)的 K_1调整的增益，画出开环根轨迹伯德图渐近线。加入(c)的补偿器，计算闭环系统的相位裕度。

(h) 使用状态变量 $\varphi,\dot{\varphi}$ 和 Z 写出开环系统状态方程。选择状态反馈控制器 $T_c=-K_\varphi\phi-K_{\dot\phi}\dot{\phi}$ 的增益来使闭环极点位于 $s=-0.02\pm0.02\mathrm{j}\sqrt{3}$。

10-14 控制对象传递函数为 $G(s)=1/s(s+1)$的闭环控制系统三种可选设计方案略图如图10-81所示。信号 ω 是噪声受控对象且可作为阶跃分析；信号 v 是传感器噪声受控对象，且在包含很高频率的电源时需要分析。

(a) 计算 K_1,a,K_2,K_T,K_3,d,K_D的参数值使得在每种情况下（设 $\omega=0,v=0$）

$$\frac{Y}{R}=\frac{16}{s^2+4s+16}。$$

注意在系统Ⅲ中，极点位于 $s=-4$。

(b) 完成以下表格，用 A/s^k的形式书写最后一列，来说明 v 的噪声受控对象在高频率处削弱的多快：

System	K_v	$\left.\frac{y}{\omega}\right\|_{s=0}$	$\left.\frac{y}{v}\right\|_{s\to\infty}$
Ⅰ			
Ⅱ			
Ⅲ			

(c) 依下列特性对设计方案排序(最好的为"1",最差的为"3"):

	I	II	III
跟踪			
装置噪声抑制			
传感器噪声抑制			

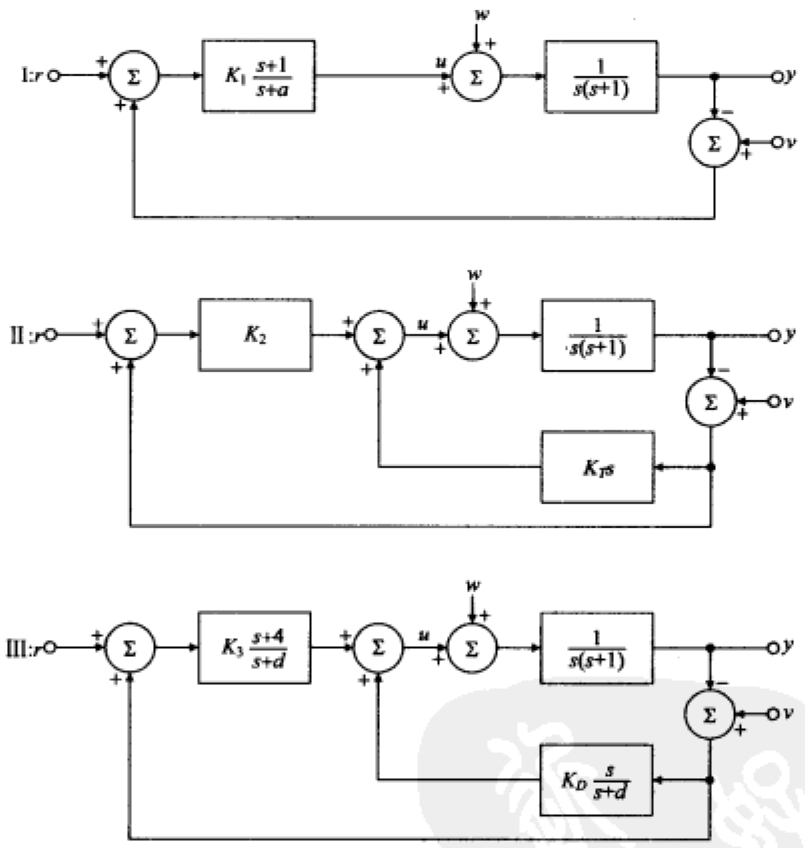


图 10-81

10-15 伴有状态变量——杆角度、杆角速度、车速度的车-杆平衡器运动方程为:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 31.33 & 0 & 0.016\\ -31.33 & 0 & -0.216\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ -0.649\\ 8.649\end{bmatrix}u$$

$$y=[10\quad 0\quad 0]\boldsymbol{x}$$

其中输出是杆角度,控制输入为驱动车轮的发动机电压。

(a) 计算从 u 到 y 的传递函数,确定极点和零点。

(b) 确定能在 $\omega_n=4$ rad/s ,将系统极点移至 -2.832 和 $-0.521\pm1.068j$ 必需的反馈增益 $\boldsymbol{K}$。

(c) 确定能将三个估计器极点置于 -10 的估计器增益 $\boldsymbol{L}$。

(d) 确定由(b)、(c)算得的增益定义的估计-状态-反馈补偿器传递函数。

(e) 设使用极点在 −10 和 −10 的降阶估计器。要求的估计器增益是多少？

(f) 使用降阶估计器重复(d)。

(g) 计算两个补偿器的频率响应。

10-16 一架 282 吨的波音 747 飞机在海平面即将着陆。如果用实例研究(10.3 节)中给出的状态，设速度为 221ft/s(0.198 马赫)，高度方向振动方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot\beta\\ \dot r\\ \dot p\\ \dot\phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0890 & -0.989 & 0.1478 & 0.1441\\ 0.168 & -0.217 & -0.166 & 0\\ -1.33 & 0.327 & -0.975 & 0\\ 0 & 0.149 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ r\\ p\\ \phi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.0148\\ -0.151\\ 0.0636\\ 0\end{bmatrix}\delta r$$

$$y=[0\quad 1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}\beta\\ r\\ p\\ \phi\end{bmatrix}$$

相应的传递函数为 $G(s)=\dfrac{r(s)}{\delta r(s)}=\dfrac{-0.151(s+1.05)(s+0.0328\pm 0.414j)}{(s+1.109)(s+0.0425)(s+0.0646\pm 0.731j)}$。

(a) 画非补偿根轨迹[对 $1+KG(s)$]以及系统频率响应。系统应该使用哪种典型控制器？

(b) 尝试通过画系统对称根轨迹的状态变量设计法。选择系统在 SRL 上的闭环极点为

$$\alpha_c(s)=(s+1.12)(s+0.165)(s+0.162\pm 0.681j),$$

选择快 5 倍以上的估计器极点

$$\alpha_e(s)=(s+5.58)(s+0.825)(s+0.812\pm 3.40j)。$$

(c) 计算 SRL 补偿器的传递函数。

(d) 讨论系统对参数改变和非模型化动态的鲁棒性。

(e) 注意本设计与本章开始时为不同飞行条件而改进的设计之间的相似性。对于在整个操作过程中提供连续(非线性)控制，这点意味着什么？

10-17 (Prof. L. Swindlehurst 献)图 10-82 提出的反馈控制系统为位置控制系统。该系统的关键部分是电枢控制直流电机。输入电位计产生与期望轴位置成比例的电压 E_i，$E_i=K_p\theta_i$。同样地，输出电位计产生与实际轴位置成比例的电压 E_o，$E_o=K_p\theta_o$。注意我们已经假定电位计有相同的比例常数。误差信号 E_i-E_o 驱动补偿器，补偿器相应产生电枢电压驱动发动机。发动机有电枢电阻 R_a，电枢电感 L_a，转矩常量 K_t，反电动势常量 K_e。发动机轴力矩是 J_m，因轴承摩擦导致的旋转阻尼是 B_m。最后，齿轮比是 $N:1$，负载惯性力矩是 J_l，负载阻尼是 B_l。

(a) 写出描述反馈系统运行的微分方程。

(b) 找出联系 $\theta_i(s)$、$\theta_o(s)$ 与通用补偿器 $D_c(s)$ 的传递函数。

(c) 如表 10-2 所示的开环频率响应数据由使用发动机电枢电压 v_a 作为输入电位计电压 E_o 作为输出得到。设发动机线性且最小相位，估计发动机传递函数，

$$G(s)=\frac{\theta_m(s)}{V_a(s)}$$

其中 θ_m 是发动机轴的角位置。

(d) 确定一套适于位置控制系统，且产生良好的效果的性能指标。设计 $D_c(s)$ 以满足要求。

(e) 通过分析和 MATLAB 仿真验证设计方案。

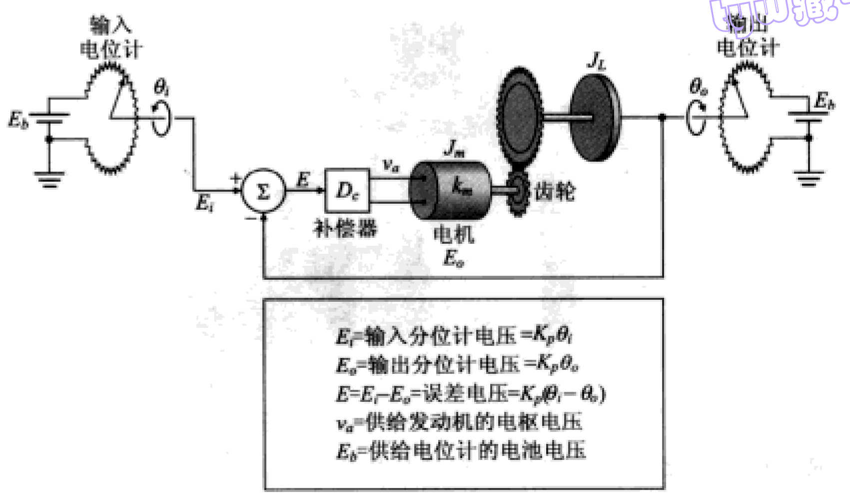


图 10-82　发动机轴承带有齿轮和电位计的伺服系统

表 10-2　问题 10-17 的频率响应数据

频率(rad/s)	$\left\lvert \frac{E_o(s)}{V_a(s)} \right\rvert$ (db)	频率(rad/s)	$\left\lvert \frac{E_o(s)}{V_a(s)} \right\rvert$ (db)
0.1	60.0	10.0	14.0
0.2	54.0	20.0	2.0
0.3	50.0	40.0	−10.0
0.5	46.0	60.0	−20.0
0.8	42.0	65.0	−21.0
1.0	40.0	80.0	−24.0
2.0	34.0	100.0	−30.0
3.0	30.5	200.0	−48.0
4.0	27.0	300.0	−59.0
5.0	23.0	500.0	−72.0
7.0	19.5		

10-18　设计并构造一个装置，使得小球位于自由摆杆的中心。该装置的例子如图 10-83 所示。

把线圈缠在永磁铁上作为执行器来移动横杆，用太阳能电池感应小球的位置，用一个霍尔效应装置感应横杆的位置。研究其他可能执行器和传感器是设计工作的一部分。对比仅靠小球的位置反馈达到的控制效果和对球与横杆的多回路反馈达到的控制效果，哪一个更好。

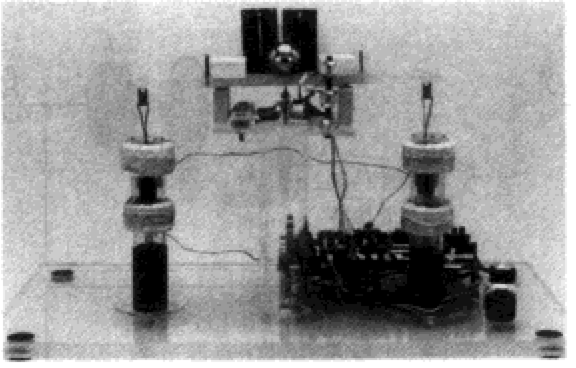


图 10-83　球体平衡器设计实例

10-19　Run-to-Run 控制：考虑如图 10-84 中的快速热处理器系统(RTP)。我们希望加热一块半导体晶片，用卤钨电子管环精确地控制晶片的温度。系统输出是温度 T，形式为 $y=T(t)$。系统参考输入 R 是期望温度阶跃(700℃)，且控制输入是电子管的功率。高温计用来测量晶片的中心温度。系统模型是一阶的，积分控制器如图 10-84 所示。在正常情况下，没有传感偏差($b=0$)。

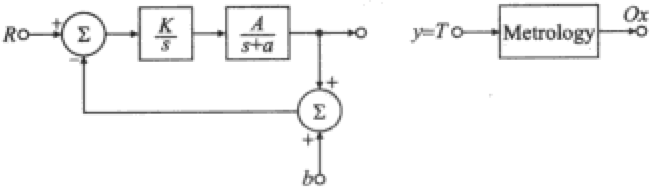


图 10-84　RTP 系统

(a) 假设系统突然出现传感器偏差 $b\neq 0$，b 已知。为保证对温度命令 R 为零稳态跟踪，除传感器偏差的存在外，应如何处理？

(b) 现在设 $b=0$。实际上，我们在尝试控制晶片上氧化膜(O_X)的厚度而不是温度。此时，O_X 不能实时测量。半导体过程工程师必须使用离线设备(称度量器)来测量晶片上增长的氧化膜的厚度。系统输出温度和 O_X 的关系是非线性的关系，且

$$\text{氧化膜厚度}=\int_0^{t_f} p\mathrm{e}^{-\frac{c}{T(t)}}\mathrm{d}t$$

其中 t_f 是过程的持续时间，p 和 c 是已知的常量。设计一个方案，通过使用温度控制器和输出度量，使得晶片的中心氧化厚度 O_X 可以控制在期望值(比如说，$O_X=5000$ Å)。

10-20　为卤钨电子管建立一个非线性模型，并在 Simulink 中仿真。

10-21　为高温计建立一个非线性模型。说明如何通过模型推算出温度。

10-22　通过对 3 个传感器求和得到单信号来控制平均温度，重复 RTP 实例研究设计。确定线性设计的性能，并在非线性 Simulink 仿真中确认。

附录 A 拉普拉斯变换

A.1 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换可以用来研究包括暂态响应在内的反馈系统完全响应特性。这点与以稳态响应为主要方向的傅里叶变换相对应。在许多应用中，定义 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，由 $\mathcal{L}_-\{f(t)\}=F(s)$ 表示，是复变量 $s=\sigma+j\omega$ 的函数，其中

$$F(s)\triangleq\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}dt \tag{A-1}$$

用 0^-（即刚好在 $t=0$ 之前的值）作为积分下限，被称为**单边拉普拉斯变换（unilateral（或者 one-sided）Laplace transform）**。[①]函数 $f(t)$ 如果有指数阶（exponential order），即存在

$$\lim_{t\to\infty}|f(t)e^{-\sigma t}|=0 \tag{A-2}$$

则 $f(t)$ 存在拉普拉斯变换。这个衰减指数环节在有效的被积函数中提供内置的收敛因数。这意味着即使 $f(t)$ 不随 $t\to\infty$ 而趋于 0，如果 f 不以更快的指数率增长，积分将因足够大的 σ 趋于 0。如 ae^{bt} 具有指数阶，而 e^{t^2} 不具有。如果对某一 $s_0=\sigma_0+j\omega_0$ 存在 $F(s)$，那么对所有满足

$$\text{Re}(s)\geqslant\sigma_0 \tag{A-3}$$

的 s 值存在 $F(s)$。

$F(s)$ 存在的最小 σ_0 称为**收敛横坐标**（abscissa of convergence），且 $\text{Re}(s)\geqslant\sigma_0$ 的区域成为**收敛域**（region of convergence）。特别地，双边拉普拉斯变换对特定的区域

$$\alpha<\text{Re}(s)<\beta \tag{A-4}$$

存在拉普拉斯变换，该区域定义收敛带。表 A-2 给出一些拉普拉斯变换对。每个表格条目遵循变换定义的直接应用。

A.1.1 拉普拉斯变换的特性

在这一部分，我们将列出并证明第 3 章所讨论的以及表 A-1 列出的拉普拉斯变换重要特性。另外，我们将通过例子展示这些特性的用法。

---

① **双边拉普拉斯变换（Bilateral（或者 two-sided）Laplace transforms）**，即 $\mathcal{L}_+$ 变换，其中 0^+ 是积分下限值，也在各处增长。

1. 叠加性

拉普拉斯变换的一个相对重要特性在于它是线性的。我们可以如下证明：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\} &= \int_0^{\infty}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]e^{-st}dt \\ &= \alpha\int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st}dt+\beta\int_0^{\infty} f_2(t)e^{-st}dt \\ &= \alpha F_1(s)+\beta F_2(s)\end{aligned} \tag{A-5}$$

比例特征是一种特殊的线性，即

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}=\alpha F(s) \tag{A-6}$$

表 A-1　拉普拉斯变换特性

序　　号	拉普拉斯变换	时间函数	描　　述
—	$F(s)$	$f(t)$	转换对
1	$\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$	$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$	叠加
2	$F(s)e^{-s\lambda}$	$f(t-\lambda)$	时间滞后($\lambda\geqslant 0$)
3	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at)$	时间缩放
4	$F(s+a)$	$e^{-at}f(t)$	频率转换
5	$s^mF(s)-s^{(m-1)}f(0)-s^{m-2}\dot{f}(0)-\cdots-f^{(m-1)}(0)$	$f^{(m)}(t)$	微分
6	$\frac{1}{s}F(s)$	$\int_0^t f(\zeta)d\zeta$	积分
7	$F_1(s)F_2(s)$	$f_1(t)*f_2(t)$	卷积
8	$\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$	$f(0^+)$	初值定理
9	$\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$	终值定理
10	$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1-j\infty}^{\sigma_1+j\infty}F_1(\xi)F_2(s-\xi)d\xi$	$f_1(t)f_2(t)$	时域乘积
11	$\frac{1}{2\pi}\int_{-j\infty}^{+j\infty}Y(-j\omega)U(j\omega)d\omega$	$\int_0^{\infty}y(t)u(t)dt$	Parseval 定理
12	$-\frac{d}{ds}F(s)$	$tf(t)$	与时间相乘

表 A-2　拉普拉斯变换

序　　号	$F(s)$	$f(t),t\geqslant 0$
1	1	$\delta(t)$
2	$1/s$	$1(t)$
3	$1/s^2$	t
4	$2!/s^3$	t^2
5	$3!/s^4$	t^3

（续）

序号	$F(s)$	$f(t), t\geqslant 0$
6	$m!/s^{m+1}$	t^m
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
9	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2!}t^2e^{-at}$
10	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{-at}$
11	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$
12	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(at-1+e^{-at})$
13	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$
14	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
15	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-at}(1+at)$
16	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bt}-ae^{-at}$
17	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
18	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
19	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
20	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin bt$
21	$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1-e^{-at}\left(\cos bt+\frac{a}{b}\sin bt\right)$

例 A.1 正弦信号

求 $f(t)=1+2\sin(\omega t)$ 的拉普拉斯变换。

解： $\sin(\omega t)$ 的拉普拉斯变换是

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

因此，使用公式(A-5)，我们得到

$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{2\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{s^2+2\omega s+\omega^2}{s^3+\omega^2 s}$$

2. 时间滞后

设函数 $f(t)$ 被 $\lambda>0$ 单位时间滞后，其拉普拉斯变换为：

$$F_1(s)=\int_0^{\infty} f(t-\lambda)e^{-st}dt$$

定义 $t'=t-\lambda$，由于 λ 为常数，对 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则 $dt'=dt$。

于是

$$F_1(s)=\int_{-\lambda}^{\infty} f(t')e^{-s(t'+\lambda)}dt'=\int_0^{\infty} f(t')e^{-s(t'+\lambda)}dt'$$

由于 $e^{-s\lambda}$不依赖于时间，可以从积分中提取出来，故

$$F_1(s)=e^{-s\lambda}\int_0^{\infty} f(t')e^{-st'}dt'=e^{-s\lambda}F(s) \tag{A-7}$$

由此可见，时滞 λ 对应于转换与 $e^{-s\lambda}$的乘积。

例 A.2 滞后正弦信号

求 $f(t)=A\sin(t-t_d)$。

解：$\sin(t)$ 的拉普拉斯变换是

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\}=\frac{1}{s^2+1}$$

因此，使用公式(A-7)得到

$$F(s)=\frac{1}{s^2+1}e^{-st_d}$$

3. 时间缩放

如果时间 t 由因数 a 缩放，则时间缩放信号的拉普拉斯变换为

$$F_1(s)=\int_0^{\infty} f(at)e^{-st}dt$$

再设 $t'=at$。如前，$dt'=adt$ 且

$$F_1(s)=\int_0^{\infty} f(t')\frac{e^{-st'/a}}{|a|}dt'=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{A-8}$$

例 A.3 频率为 ω 的正弦

求 $f(t)=A\sin(\omega t)$ 的拉普拉斯变换。

解：$\sin(t)$ 的拉普拉斯变换是

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\}=\frac{1}{s^2+1}$$

于是，用公式(A-8)得到

$$F(s)=\frac{1}{|\omega|}\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1}=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

4. 频率转换

时域中 $f(t)$ 与指数表达式相乘，所对应频率转换为：

$$F_1(s)=\int_0^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t}dt=F(s+a) \tag{A-9}$$

例 A.4 指数衰减正弦

求 $f(t)=A\sin(\omega t)e^{-at}$ 的拉普拉斯变换。

解：$\sin(\omega t)$ 的拉普拉斯变换是

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

因此，使用公式(A-9)，我们得到

$$F(s)=\frac{A\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

5. 微分

信号微分的变换与本身的拉普拉斯变换和初始情况有如下关系：

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\}=\int_0^{\infty}\left(\frac{df}{dt}\right)e^{-st}dt=e^{-st}f(t)\Big|_0^{\infty}+s\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt \tag{A-10}$$

因为假设 $f(t)$有拉普拉斯变换，且 $t\to\infty$ 时，$e^{-st}f(t)\to 0$，

于是

$$\mathcal{L}[\dot{f}]=-f(0^-)+sF(s) \tag{A-11}$$

再次应用式(A-11)，得到：

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}\}=s^2F(s)-sf(0^-)-\dot{f}(0^-) \tag{A-12}$$

重复利用式(A-11)得到：

$$\mathcal{L}\{f^m(t)\}=s^mF(s)-s^{m-1}f(0^-)-s^{m-2}\dot{f}(0^-)-\cdots-f^{(m-1)}(0^-) \tag{A-13}$$

其中 $f^m(t)$ 表示 $f(t)$ 对时间的 m 阶导数。

例 A.5 余弦信号的导数

求 $g(t)=\frac{d}{dt}f(t)$ 的拉普拉斯变换，其中 $f(t)=\cos(\omega t)$。

解：$\cos(\omega t)$ 的拉普拉斯变换是：

$$F(s)=\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

在 $f(0^-)=1$ 的情况下用式(A-11)得到

$$G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}=s\frac{s}{s^2+\omega^2}-1=-\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}$$

6. 积分

假设我们想得出时域函数积分的拉普拉斯变换，即求

$$F_1(s)=\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\xi)d\xi\right\}=\int_0^{\infty}\left[\int_0^t f(\xi)d\xi\right]e^{-st}dt$$

使用分部积分法，即

$$u = \int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

得到

$$F_1(s) = \left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\left(\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}f(t)\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{s}F(s) \tag{A-14}$$

例 A.6　正弦信号的时域积分

求 $f(t) = \int_0^t \sin\omega\tau\mathrm{d}\tau$ 的拉普拉斯变换。

解：$\sin(\omega t)$ 的拉普拉斯变换是

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

因此，使用公式(A-14)，我们得到

$$F(s) = \frac{\omega}{s^3+\omega^2 s}$$

7. 卷积

时域卷积对应频域乘积。设 $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$，$\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$，则

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_0^{\infty} f_1(t)*f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

转换积分次序且改变积分区域得到

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_0^{\infty}\int_{\tau}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$

乘以 $\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{e}^{s\tau}$ 得

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_0^{\infty} f_1(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\left[\int_{\tau}^{\infty} f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-s(t-\tau)}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau$$

如果 $t' \triangleq t-\tau$，则

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_0^{\infty} f_1(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau\int_0^{\infty} f_2(t')\mathrm{e}^{-st'}\mathrm{d}t'$$

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\} = F_1(s)F_2(s)$$

这意味着

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = f_1(t)*f_2(t) \tag{A-15}$$

例 A.7　一阶系统的斜坡响应

求有极点在 $+a$ 的一阶系统的斜坡响应。

解：令 $f_1(t)=t$ 为斜坡输入，且 $f_2(t)=\mathrm{e}^{at}$ 为一阶系统的脉冲响应，则用公式(A-15)得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\,\frac{1}{s-a}\right\} &= f_1(t)*f_2(t)\\ &= \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= \int_0^t \tau\mathrm{e}^{a(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)$$

8. 时域积

时域中的乘积对应频域中的卷积，即

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c_1-j\infty}^{c_1+j\infty} F_1(\xi)F_2(s-\xi)d\xi$$

为证明，考虑关系：

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \int_0^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-st}dt$$

用公式(3-16)替代 $f_1(t)$ 得到

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \int_0^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{c_1-j\infty}^{c_1+j\infty} F_1(\xi)e^{\xi t}d\xi\right]f_2(t)e^{-st}dt$$

改变积分次序得到

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c_1-j\infty}^{c_1+j\infty} F_1(\xi)\int_0^{\infty} f_2(t)e^{-(s-\xi)t}dtd\xi$$

用式(A-9)，得到

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c_1-j\infty}^{c_1+j\infty} F_1(\xi)F_2(s-\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi j}F_1(s) * F_2(s) \tag{A-16}$$

9. Parseval 定理

Parseval 著名定理用来计算信号的能量或者两个信号之间的耦合。它显示提及的数量可以在时域或者频域中计算，若

$$\int_0^{\infty} |y(t)|^2 dt < 1 \quad 且 \quad \int_0^{\infty} |u(t)|^2 dt < 1 \tag{A-17}$$

(如 $y(t)$ 和 $u(t)$ 是平方可积的)，则

$$\int_0^{\infty} y(t)u(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(-j\omega)U(j\omega)d\omega \tag{A-18}$$

Parseval 的结果只涉及时域函数变换的替代和积分交换

$$\int_0^{\infty} y(t)u(t)dt = \int_0^{\infty} y(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]dt \tag{A-19}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)\left[\int_0^{\infty} y(t)e^{j\omega t}dt\right]d\omega \tag{A-20}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)\,Y(-j\omega)d\omega \tag{A-21}$$

10. 与时间相乘

与时间相乘对应频域中的微分

考虑

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} -te^{-st}f(t)dt$$

$$=-\int_0^{\infty} e^{-st}[tf(t)]dt$$
$$=-\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

则

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}=-\frac{d}{ds}F(s) \tag{A-22}$$

这是期望的结果。

例 A.8　正弦信号的时间积

求 $f(t)=t\sin(\omega t)$ 的拉普拉斯变换。

解：$\sin(\omega t)$ 的拉普拉斯变换是

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

于是，使用公式(A-22)得到

$$F(s)=-\frac{d}{ds}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

A.1.2　部分分式扩展法拉式反变换

如第 3 章所见，若 $F(s)$ 是有理的，从 $F(s)$ 求 $f(t)$ 的最简单方法是用部分分式扩展法将 $F(s)$ 扩展为表 A-2 中可见的简单环节和的形式。我们已经在 3.1.5 节简单根的联系中讨论过该方法。在这一部分，我们讨论复数根和重根的部分分式扩展法。

复极点　分母有平方因子的情况下，平方因子的分子选来做一阶元素，如例 A.9 所示。

任何时候都存在一对共轭复极点如

$$F(s)=\frac{C_1}{s-p_1}+\frac{C_2}{s-p_1^*}$$

我们可以证明

$$C_2=C_1^*$$

（见习题 3-1 ）于是

$$f(t)=C_1e^{p_1t}+C_1^*e^{p_1^*t}=2\mathrm{Re}\,(C_1e^{p_1t})$$

设 $p_1=\alpha+j\beta$，用更复杂的方式重写 $f(t)$ 为

$$f(t)=2\mathrm{Re}\,\{C_1e^{p_1t}\}=2\mathrm{Re}\,\{|C_1|e^{j\arg(C_1)}e^{(\alpha+j\beta)t}\} \tag{A-23}$$
$$=2|C_1|e^{\alpha t}\cos[\beta t+\arg(C_1)]$$

例 A.9　部分分式扩展法：离散复根

求拉普拉斯变换为 $F(s)=\frac{1}{s(s^2+s+1)}$ 的函数 $f(t)$。

解：重写 $F(s)$ 为

$$F(s)=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2s+C_3}{s^2+s+1}$$

使用隐藏法，得到

$$C_1 = sF(s)|_{s=0} = 1$$

使 $C_1=1$ ，然后用部分分式扩展关系计算分子，即

$$(s^2+s+1)+(C_2s+C_3)s=1$$

得到 $C_2=-1$ ，$C_3=-1$ 。为使之更适于应用拉普拉斯变换表，重写部分分式为：

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

从表 A-2 中得出，

$$\begin{aligned}f(t)&=\left(1-e^{-t/2}\cos\sqrt{\frac{3}{4}}t-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)1(t)\\&=\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{6}\right)\right)1(t)\end{aligned}$$

还有一种方法，将 $F(s)$ 写成

$$F(s)=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{s-p_1}+\frac{C_2^*}{s-p_1^*} \tag{A-24}$$

其中 $p_1=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。如前，$C_1=1$ ，且

$$C_2=(s-p_1)F(s)|_{s=p_1}=-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$C_2^*=-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

且

$$\begin{aligned}f(t)&=(1+2|C_2|e^{\alpha t}\cos[\beta t+\arg(C_2)])1(t)\\&=\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{5\pi}{6}\right]\right)1(t)\\&=\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{6}\right]\right)1(t)\end{aligned}$$

后一种部分分式扩展法可以直接应用 MATLAB 进行计算。

```
num=1                          %form numerator
den=conv([1 0],[1 1 1]);       %form denominator
[r,p,k]=residue(num,den)       %compute residues
```

产生结果为：

```
r=[-0.5000+0.2887i-0.5000-0.2887i 1.0000]';
p=[-0.5000+0.8660i-0.5000-0.8660i 0]';k=[]
```

与之前手算结果相同。注意，如果使用表格，第一种方法较好，而第二种方法适用于核对 MATLAB 结果。

重复极点　对于 $F(s)$ 有重复极点的情况，计算部分分式扩展的步骤要进行调整。若 p_1 重复三次，部分分式写为：

$$F(s)=\frac{C_1}{s-p_1}+\frac{C_2}{(s-p_1)^2}+\frac{C_3}{(s-p_1)^3}+\frac{C_4}{s-p_4}+\cdots+\frac{C_n}{s-p_n}$$

如之前的方法可求常量 $C_4 \sim C_n$。若将之前的方程两边同乘以 $(s-p_1)^3$，得到

$$(s-p_1)^3F(s)=C_1(s-p_1)^2+C_2(s-p_1)+C_3+\cdots+\frac{C_n(s-p_1)^3}{s-p_n} \quad \text{(A-25)}$$

然后设 $s=p_1$，除 C_3 外，(A-25)右侧所有因数为 0，即

$$C_3=(s-p_1)^3F(s)|_{s=p_1}$$

未得到其他因数，将式(A-25)对拉氏变量 s 求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-p_1)^3F(s)]=2C_1(s-p_1)+C_2+\cdots+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{C_n(s-p_1)^3}{s-p_n}\right] \quad \text{(A-26)}$$

如果再设 $s=p_1$，得到

$$C_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-p_1)^3F(s)]_{s=p_1}$$

相似地，对式(A-25)求导，再次令 $s=p_1$，得到

$$C_1=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[(s-p_1)^3F(s)]_{s=p_1}$$

总之，对于 k 次因子，可以如此计算 C_i：

$$C_{k-i}=\frac{1}{i!}\left\{\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}[(s-p_1)^kF(s)]\right\}_{s=p_1},\quad i=0,\cdots,k-1$$

例 A.10　部分分式扩展法：重复实根

求有拉普拉斯变换 $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$ 的函数 $f(t)$。

解：部分分式写为：

$$F(s)=\frac{C_1}{s+1}+\frac{C_2}{s+2}+\frac{C_3}{(s+2)^2}$$

则

$$C_1=(s+1)F(s)|_{s=-1}=\left.\frac{s+3}{(s+2)^2}\right|_{s=-1}=2$$

$$C_2=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+2)^2F(s)]\right|_{s=-2}=-2$$

$$C_3=(s+2)^2F(s)|_{s=-2}=\left.\frac{s+3}{s+1}\right|_{s=-2}=-1$$

函数 $f(t)$ 为

$$f(t)=(2e^{-t}-2e^{-2t}-te^{-2t})1(t)$$

部分分式计算也可以通过使用 MATLAB 的 residue 函数进行。

```
num=[1 3];                      % form numerator
den=conv([1 1],[1 4 4]);        % form denominator
[r,p,k]=residue(num,den)        % compute residues
```

产生结果：

r=[−2 −1 2]′,p=[−2 −2 −1]′,and k=[];

与手算的结果相符。

A.1.3 初值定理

在第 3 章讨论过终值定理。第二个有价值的拉普拉斯变换定理是**初值定理**(Initial Value

Theorem)，它表明通过拉普拉斯变换得到时域函数 $f(t)$ 的初值通常是可能的。我们也可以如此表述定理：

对于任何的拉普拉斯变换对，有

$$\lim_{s\to\infty} sF(s)=f(0^+) \tag{A-27}$$

如下示例。

使用式(A-11)得到

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right\}=sF(s)-f(0^-)=\int_{0^-}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{A-28}$$

考虑 $s\to\infty$ 的情况，重写积分为

$$\int_{0^-}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_{0^+}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\int_{0^-}^{0^+}\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

在 $s\to\infty$ 下取式(A-28)的极限，得到

$$\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0^-)]=\lim_{s\to\infty}\left[\int_{0^-}^{0^+}\mathrm{e}^{0}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\int_{0^+}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]$$

上个方程右边的第二项随 $s\to\infty$ 而趋近于0，原因是 $\mathrm{e}^{-st}\to 0$ 。于是

$$\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0^-)]=\lim_{s\to\infty}[f(0^+)-f(0^-)]=f(0^+)-f(0^-)$$

或

$$\lim_{s\to\infty} sF(s)=f(0^+)$$

与终值定理不同，初值定理可以应用于任何 $F(s)$ 函数。

例 A.11 初值定理

求例3.10信号的初值。

解：由初值定理得到

$$y(0^+)=\lim_{s\to\infty} sY(s)=\lim_{s\to\infty} s\frac{3}{s(s-2)}=0$$

符合例3.10 $y(t)$ 表达式的计算。

A.2 终值定理

如果 $sY(s)$ 的所有极点都在左半 s 平面，则

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to 0} sY(s) \tag{3-37}$$

终值定理的证明

定理的证明过程如下。

式(3-24)的微分关系为

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}=sY(s)-y(0^-)=\int_{0^-}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

假设对 $s\to 0$ 的情况有兴趣，则

$$\lim_{s\to 0}[sY(s)-y(0)]=\lim_{s\to 0}\left(\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)=\lim_{t\to\infty}[y(t)-y(0)]$$

有

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to 0} sY(s)$$

另一种方法是通过 $Y(s)$ 的部分分式扩展得到相同结果：

$$Y(s)=\frac{C_1}{s-p_1}+\frac{C_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{C_n}{s-p_n}$$

令 $p_1=0$ 以及其他 p_i 位于左半平面，使得 C_1 为 $y(t)$ 的稳态值。使用式(3-36)，可见

$$C_1=\lim_{t\to\infty} y(t)=sY(s)|_{s=0}$$

与之前的结果一致。

若要对拉普拉斯变换进行深入研究并得其总表，可参阅 Churchill(1972)和 Campbell 和 Foster(1948)；若要对双边拉普拉斯变换进行深入研究，参阅 Van der Pol 和 Bremmer(1955)。

附录 B 复变量回顾

这一附录部分是对复变量理论一些结论的简要总结，特别强调在控制理论上需要的方面。对于基本复变量理论的理解性学习请参阅如 Brown 和 Churchill(1996)或 Marsden Hoffman(1998)的标准课本。

B.1 复数定义

复数与纯实数的区别在于它们也存在**虚数算子**(imaginary operator)，以 j 标明。由定义，

$$j^2=-1 \quad 或 \quad j=\sqrt{-1} \tag{B-1}$$

复数可以定义为

$$A=\sigma+j\omega \tag{B-2}$$

其中 σ 是实部，ω 是虚部，分别表示为：

$$\sigma=\mathrm{Re}\,(A),\omega=\mathrm{Im}\,(A) \tag{B-3}$$

注意 A 的虚部本身是实数。

复数 A 可以通过两种画图方式表示。在直角坐标系(图 B-1a)中，A 表示为复平面中的单个点。在极坐标系(图 B-1b)中 A 由长度为 r，角度为 θ 的向量表示。极坐标形式表示的 A 为：

$$A=|A|\cdot\angle\arg A=r\cdot\angle\theta=re^{j\theta},0\leqslant\theta\leqslant2\pi \tag{B-4}$$

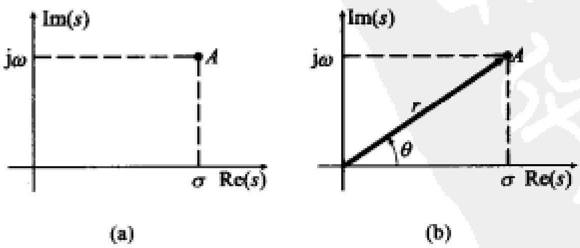


图 B-1 在(a)直角坐标系和(b)极坐标系中表示的复数 A

其中 r——称 A 的**幅值、模值或者绝对值**——是表示 A 的向量的长度，即

$$r=|A|=\sqrt{\sigma^2+\omega^2} \tag{B-5}$$

θ 的求取，可根据下式

$$\tan\theta=\frac{\omega}{\sigma} \tag{B-6}$$

或者

$$\theta=\arg(A)=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \tag{B-7}$$

需要特别注意，计算出正确的角度值，依赖于实部和虚部的符号（如，需要求得复数所在象限）。

A 的共轭是：

$$A^*=\sigma-\mathrm{j}\omega \tag{B-8}$$

于是，

$$(A^*)^*=A \tag{B-9}$$

$$(A_1\pm A_2)^*=A_1^*\pm A_2^* \tag{B-10}$$

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^*=\frac{A_1^*}{A_2^*} \tag{B-11}$$

$$(A_1A_2)^*=A_1^*A_2^* \tag{B-12}$$

$$\mathrm{Re}(A)=\frac{A+A^*}{2},\quad \mathrm{Im}(A)=\frac{A-A^*}{2\mathrm{j}} \tag{B-13}$$

$$AA^*=(|A|)^2 \tag{B-14}$$

B.2 代数运算

复数的加、乘、除运算法则跟我们期望的是一样的。

B.2.1 复数加法

如果令

$$A_1=\sigma_1+\mathrm{j}\omega_1 \quad 且 \quad A_2=\sigma_2+\mathrm{j}\omega_2 \tag{B-15}$$

则

$$A_1+A_2=(\sigma_1+\mathrm{j}\omega_1)+(\sigma_2+\mathrm{j}\omega_2)=(\sigma_1+\sigma_2)+\mathrm{j}(\omega_1+\omega_2) \tag{B-16}$$

由于每个复数可以由从原点开始的向量表示，复数的加减运算可以图像化处理。它们的和可以由向量相加得到。我们可以通过建立一个平行四边形来找出对角线，如图 B -2a 所示。另一方面，可以从一个向量的尾部开始，画另一向量的平行向量，然后把原点和新的箭头部位连接。

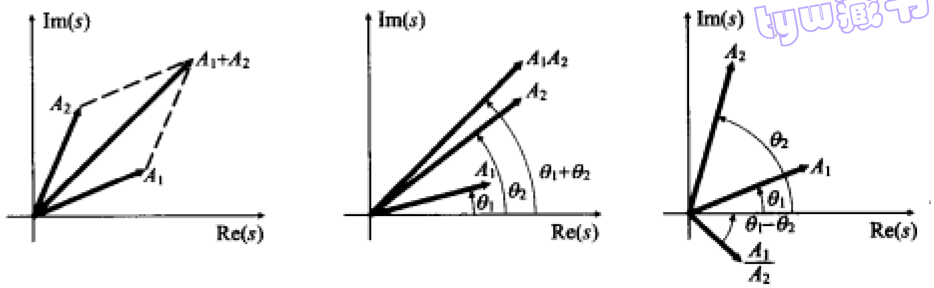
复数减法与复数加法相似。

B.2.2 复数乘法

对于两个如式(B -15)定义的复数，

$$A_1A_2=(\sigma_1+\mathrm{j}\omega_1)(\sigma_2+\mathrm{j}\omega_2)=(\sigma_1\sigma_2-\omega_1\omega_2)+\mathrm{j}(\omega_1\sigma_2+\sigma_1\omega_2) \tag{B-17}$$

两个复数之积可以通过图像法由极坐标表示得到，如图 B -2b 所示。



(a) 加法　　(b) 乘法　　(c) 除法

图 B-2　复数计算

B.2.3　复数除法

两个复数的除法通过有理化(rationalization)进行。这意味着分子和分母同时要乘以分母的共轭复数：

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_1A_2^*}{A_2A_2^*}=\frac{(\sigma_1\sigma_2+\omega_1\omega_2)+\mathrm{j}(\omega_1\sigma_2-\sigma_1\omega_2)}{\sigma_2^2+\omega_2^2} \tag{B-18}$$

由式(B-4)得

$$A^{-1}=\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta},\quad r\neq 0 \tag{B-19}$$

若 $A_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}$，$A_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}$，则

$$A_1A_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)} \tag{B-20}$$

其中 $|A_1A_2|=r_1r_2$ 且 $\arg(A_1A_2)=\theta_1+\theta_2$，

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1-\theta_2)},\quad r_2\neq 0 \tag{B-21}$$

其中 $\left|\frac{A_1}{A_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}$ 且 $\arg\left(\frac{A_1}{A_2}\right)=\theta_1-\theta_2$。复数除法可以在极坐标系中用图像法进行，如图 B-2c 所示。

例 B.1　一阶系统的频率响应

求传递函数 $G(s)=\frac{1}{s+1}$ 的幅值、相位，其中 $s=\mathrm{j}\omega$。

解：代入 $s=\mathrm{j}\omega$ 并有理化，得到

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\sigma+1+\mathrm{j}\omega}\,\frac{\sigma+1-\mathrm{j}\omega}{\sigma+1-\mathrm{j}\omega}$$

$$=\frac{\sigma+1-\mathrm{j}\omega}{(\sigma+1)^2+\omega^2}$$

因此，幅值和相位为

$$|G(\mathrm{j}\omega)|=\frac{\sqrt{(\sigma+1)^2+w^2}}{(\sigma+1)^2+w^2}=\frac{1}{\sqrt{(\sigma+1)^2+\omega^2}}$$

$$\arg(G(\mathrm{j}\omega))=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\,(G(\mathrm{j}\omega))}{\mathrm{Re}\,(G(\mathrm{j}\omega))}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-\omega}{\sigma+1}\right)$$

B.3 幅值相位的图像法估计

考虑传递函数

$$G(s)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} \tag{B-22}$$

正弦信号输入的传递函数值通过 $j\omega$ 取代 s 得到。增益和相位由 $G(j\omega)$ 通过分析或者图像步骤得到。如图 B-3 所示，考虑对此 $G(s)$ 的极零点分布以及位于虚轴的 $s_0=j\omega_0$。再考虑从极点和零点连向 s_0 的向量。传递函数在 $s_0=j\omega_0$ 处幅值估计为零点到其距离和极点到其距离乘积的比值：

$$|G(j\omega_0)|=\frac{r_1}{r_2r_3r_4} \tag{B-23}$$

相位由零点角度之和与极点角度之和相减得到：

$$\arg G(j\omega_0)=\angle G(j\omega_0)=\theta_1-(\theta_2+\theta_3+\theta_4) \tag{B-24}$$

可如下解释。s_0+z_1 项是两个元素的向量和，也可以表示为 $s_0-(-z_1)$，等价为将 $s+z_1$ 平移到 $-z_1$ 开始的地方，如图 B-4 所示。这意味着从零点到 s_0 的向量等价于 s_0+z_1。同样可以对极点作如下解释。把 p_1,p_2,p_3 关于原点对称得到极点位置，则从 $-p_1,-p_2,-p_3$ 到 s_0 的向量与用极坐标表示的分母向量相同。注意该法同样适用在复平面虚轴之外的位置估计 s_0。

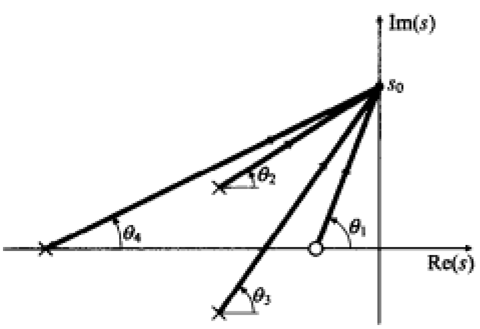


图 B-3 幅值相位的图像表示

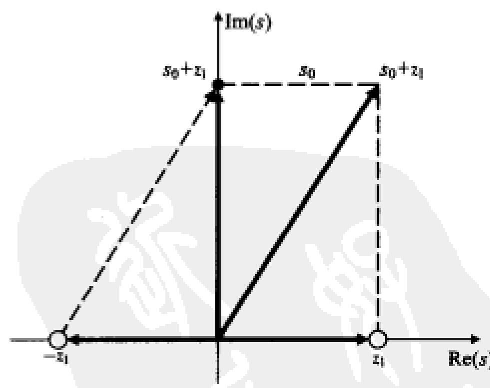


图 B-4 图像计算 $s+z_1$ 的示意

B.4 微分和积分

一般法则适用于复数微分。令 $G(s)$ 对 s 进行微分，s_0 处的微分定义为：

$$G'(s_0)=\lim_{s\to s_0}\frac{G(s)-G(s_0)}{s-s_0} \tag{B-25}$$

假设极限存在。微分存在的条件请参阅 Brown 与 Churchill(1996)。

标准法则也适用于积分，积分常量是复数的情况除外：

$$\int G(s)\mathrm{d}s = \int \mathrm{Re}[G(s)]\mathrm{d}s + \mathrm{j}\int \mathrm{Im}[G(s)]\mathrm{d}s + c \tag{B-26}$$

B.5 欧拉关系

现在介绍一个关于复指数的重要关系。

若定义

$$A = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta \tag{B-27}$$

其中 θ 是弧度，则

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta + \mathrm{j}\cos\theta = \mathrm{j}^2\sin\theta + \mathrm{j}\cos\theta$$
$$= \mathrm{j}(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = \mathrm{j}A \tag{B-28}$$

提取含有 A 的式子得到

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} = \mathrm{j}\mathrm{d}\theta \tag{B-29}$$

式(B-29)两边同时积分，得到

$$\ln A = \mathrm{j}\theta + c \tag{B-30}$$

其中 c 是积分常数。若在式(B-30)中令 $\theta=0$，求得 $c=0$ 或者

$$A = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta \tag{B-31}$$

相似地，

$$A^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = \cos\theta - \mathrm{j}\sin\theta \tag{B-32}$$

从式(B-31)和式(B-32)得出

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{2} \tag{B-33}$$

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{2\mathrm{j}} \tag{B-34}$$

B.6 解析函数

假设 G 是定义在复平面的复值函数。s_0 在 G 的定义域内，G 在以 s_0 为中心的一些区间内取值有限。于是，$G(s)$ 不仅在 s_0 处有定义，而且在 s_0 邻域点上也有定义。如果在 s_0 及其邻域每个点上都存在微分，函数 G 则被称为**解析函数**。

B.7 柯西定理

等值线(contour)是由一定数量的光滑曲线连接而成的分段光滑曲线。**简单闭合等值线**(simple closed contour)不与自身交叉且自身闭合。令 C 为如图 B-5a 的闭合等值线，令 G 在 C 上是解析的。柯西定理表示为：

$$\oint_C G(s)\mathrm{d}s = 0 \tag{B-35}$$

该定理的推论为：如图 B-5b 所示，令 C_1, C_2 为连接 A_1, A_2 两点的两条路径，则

$$\int_{C_1} G(s)\mathrm{d}s = \int_{C_2} G(s)\mathrm{d}s \tag{B-36}$$

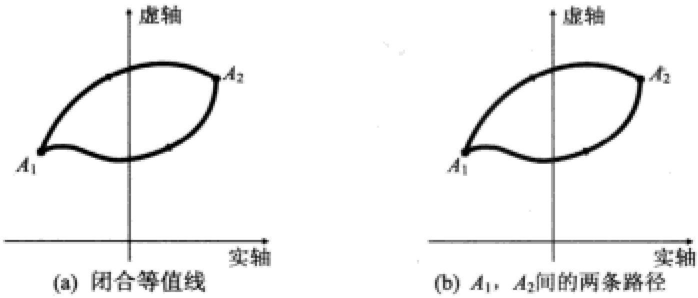


图 B-5　s 平面上的等值线

B.8　奇点和留数

如果函数 $G(s)$ 在 s_0 处不能解析，而在 s_0 每个邻域的某些点上解析，这种情况下称 s_0 为**奇点**(singularity)。如果 $G(s)$ 在不包括 s_0 在内的 s_0 邻域上不能解析，而在其他地方都能解析，该奇点称为**孤立奇点**(isolated singularity)。令 $G(s)$ 为**有理函数**(rational function，即多项式比值)。如果分子分母都解析，则 $G(s)$ 在除极点(分母的根)之外的位置解析，所有有理代数函数的奇点是其极点。

令 $G(s)$ 在除 s_0 以外的位置解析，则可用劳伦特系列展开形式表示 $G(s)$：

$$G(s)=\frac{A_{-n}}{(s-s_0)^n}+\cdots+\frac{A_{-1}}{(s-s_0)}+B_0+B_1(s-s_0)+\cdots \tag{B-37}$$

因数 A_{-1} 称为 $G(s)$ 在 s_0 处的留数，可以由

$$A_{-1} = \mathrm{Res}[G(s);s_0] = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C G(s)\mathrm{d}s \tag{B-38}$$

计算，其中 C 代表位于 s_0 周围不含奇点的解析域内的闭合曲线，如图 B-6 所示。当有 $n=1$ 时 s_0 不重复，则

$$A_{-1}=\mathrm{Res}[G(s);s_0]=(s-s_0)G(s)|_{s=s_0} \tag{B-39}$$

与计算留数的隐藏法相似。

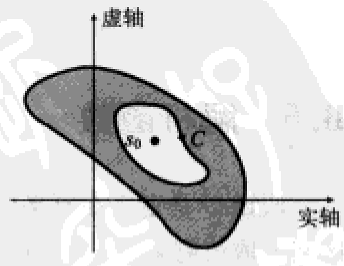


图 B-6　围绕孤立奇点的等值线

B.9　留数定理

如果等值线 C 包含 l 个奇点，则式(B-39)可以整合为**柯西留数定理**(Cauchy's residue theorem)：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint G(s)\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{l} \mathrm{Res}[G(s);s_i] \tag{B-40}$$

B.10 幅角定理

在表述幅角定理之前，需要一个基本结论，从而能够直接推出幅角定理。

极点和零点的数量

令 $G(s)$ 为解析函数，位于闭合等值线 C 以内或者线上，不包括 C 内的有限个极点，则对于顺时针方向的 C，

$$\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{G'(s)}{G(s)}ds = N-P \tag{B-41}$$

或

$$\frac{1}{2\pi j}\oint d(\ln G) = N-P \tag{B-42}$$

其中 N,P 分别表示 G 在 C 内零点和极点的总数。k 重的极点或者零点计入 k 次。

证明：

令 s_0 为 G 的 k 重零点，则在该点的某些邻域内，$G(s)$ 可以写为：

$$G(s)=(s-s_0)^k f(s) \tag{B-43}$$

其中，$f(s)$ 是解析的，且 $f(s_0)\neq 0$。如果将式(B-43)求导，得到：

$$G'(s)=k(s-s_0)^{k-1}f(s)+(s-s_0)^k f'(s) \tag{B-44}$$

式(B-44)可以重写为：

$$\frac{G'(s)}{G(s)}=\frac{k}{s-s_0}+\frac{f'(s)}{f(s)} \tag{B-45}$$

因此，$\dfrac{G'(s)}{G(s)}$ 有极点位于 $s=s_0$，留数为 k。此种分析可以对每个零点重复进行。于是，$\dfrac{G'(s)}{G(s)}$ 留数的和是 C 以内零点的个数。如果 s_0 是 l 重极点，可写出：

$$h(s)=(s-s_0)^l G(s) \tag{B-46}$$

其中 $h(s)$ 是解析的，且 $h(s_0)\neq 0$。于是式(B-46)可重写为：

$$G(s)=\frac{h(s)}{(s-s_0)^l} \tag{B-47}$$

对式(B-47)求导，得到

$$G'(s)=\frac{h'(s)}{(s-s_0)^l}-\frac{lh(s)}{(s-s_0)^{l+1}} \tag{B-48}$$

所以

$$\frac{G'(s)}{G(s)}=\frac{-l}{s-s_0}+\frac{h'(s)}{h(s)} \tag{B-49}$$

此分析可以对每个极点重复进行。$\dfrac{G'(s)}{G(s)}$ 对 $G(s)$ 所有极点留数的和是 $-P$。

幅角定理

使用式(B-38)得到

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C d[\ln G(s)] = N-P \tag{B-50}$$

其中 $\mathrm{d}(\ln G(s))$ 替代 $\dfrac{G'(s)}{G(s)}$ 。如果用极坐标形式写 $G(s)$ ，则

$$\oint_{\Gamma}\mathrm{d}[\ln G(s)]=\oint_{\Gamma}\mathrm{d}\{\ln|G(s)|+\mathrm{j}\arg[\ln G(s)]\}$$
$$=\ln|G(s)|\Big|+\mathrm{j}\arg G(s)\Big| \tag{B-51}$$

由于 Γ 是闭环等值线，第一项为 0，第二项是围绕原点净环数的 2π 倍：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_{\Gamma}\mathrm{d}[\ln G(s)]=N-P \tag{B-52}$$

直观地，幅角定理可以如下表述：令 $G(s)$ 为有理函数，在除有限点之外的区域内是解析的。在 s 平面内选择任意的等值线使得 $G(s)$ 在等值线上每个点都可解析(等值线不通过奇点)。相应的 $G(s)$ 平面映射将围绕原点。该圈数取决于 s 平面等值线围绕零点和极点圈数之差。围圈的方向取决于 N(顺时针)与 P(逆时针)哪个更大。例如，若等值线环绕一个单零点，映射将顺时针环绕原点一圈。相似地，若等支线环绕一个单极点，映射将逆时针环绕原点一圈。若等值线不包围奇点，或者包围等数量的极点和零点，那将没有线路包围原点。被绕奇点之间若有非零差别，$G(s)$ 的等值线估计将会环绕原点。映射也是保角的(conformal)，即幅值以及平滑曲线之间的角度是维持的。第 6 章对幅角定理给出了更详细、更直观的介绍，及其用奈奎斯特稳定性定理形式的反馈控制的应用。

B.11　双线形变换

双线形变换具有形式

$$w=\frac{as+b}{cs+d} \tag{B-53}$$

其中 a,b,c,d 为复数常量，且 $ad-bc\neq0$ 。双线形变换通常把 w 平面中的环路转化为 s 平面内的环路。如多种方法所示。如果要解 s，使用

$$s=\frac{-dw+b}{cw-a} \tag{B-54}$$

w 平面内的环路方程有如下形式

$$\left|\frac{w-\sigma}{w-\rho}\right|=R \tag{B-55}$$

若用式(B-53)中的关系，用 s 替换 w 得到：

$$\left|\frac{s-\sigma'}{s-\rho'}\right|=R' \tag{B-56}$$

其中

$$\sigma'=\frac{\sigma d-b}{a-\sigma c},\quad \rho'=\frac{\rho d-b}{a-\rho c},\quad R'=\left|\frac{a-\rho c}{a-\sigma c}\right|R \tag{B-57}$$

这是 s 平面中的环路方程。其他证明可参阅 Brown 与 Churchill(1996)和 Marsden 与 Hoffman(1998)。

附录 C　矩阵理论概述

在课文中，我们假设读者已经对矩阵理论和线性系统方程有一定程度的熟悉。然而，为了复习的目的，这里列写了矩阵理论并特别强调了在控制理论中特别需要的结论。若要进一步研究，可参阅 Strange(1988)和 Gantmacher(1959)。

C.1　矩阵定义

行列形式置放的数列称为**矩阵**(**matrix**)。如果 $\boldsymbol{A}$ 是 m 行 n 列矩阵，即 $m\times n$ 矩阵，可以表示为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{C-1}$$

其中 a_{ij} 是其元素。若 $m=n$，矩阵为**方阵**(**square**)；否则是**矩形阵**(**rectangular**)。有时矩阵表达简化为 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$。若 $m=1$ 或者 $n=1$，矩阵分别简化为行向量或者列向量。$\boldsymbol{A}$ 的**子矩阵**(**submatrix**)是去掉某些行列得到的矩阵。

C.2　矩阵基本运算

如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是有相同形式的矩阵，它们的和定义为：

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \tag{C-2}$$

其中

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \tag{C-3}$$

即，矩阵加法是各个元素逐次相加。很容易推导出矩阵的如下性质：

$$\text{加法交换律}\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{C-4}$$

$$\text{加法结合律}\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \tag{C-5}$$

两个矩阵若谐调则可相乘。令 $\boldsymbol{A}=m\times n$，$\boldsymbol{B}=n\times p$，那么 $m\times p$ 矩阵

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \tag{C-6}$$

为两个矩阵之积，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \tag{C-7}$$

矩阵乘法满足结合律

乘法结合律 $A(BC)=(AB)C$ (C-8)

但不满足交换律，即

$$AB \neq BA \tag{C-9}$$

C.3 迹

方阵的迹(trace)是对角元素之和：

$$\operatorname{trace} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{C-10}$$

C.4 转置

通过调换 A 的行和列得到的 $n\times m$ 矩阵称为 A **的转置**(transpose of matrix A)：

$$A^{T}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

如果有

$$A^{T}=A \tag{C-11}$$

则称 A 是**对称方阵**(symmetric)容易得出：

$$(AB)^{T}=B^{T}A^{T} \tag{C-12}$$

$$(ABC)^{T}=C^{T}B^{T}A^{T} \tag{C-13}$$

$$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T} \tag{C-14}$$

C.5 行列式和矩阵的逆

方阵的**行列式**(determinant)由拉普拉斯展开式定义：

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_{ij} \quad \text{对任意} \quad i=1,2,\cdots,n \tag{C-15}$$

其中 γ_{ij} 称**代数余子式**(cofactor)，且

$$\gamma_{ij}=(-1)^{i+j}\det M_{ij} \tag{C-16}$$

其中，标量 M_{ij} 的行列式称为**余子式**(minor)。除第 i 行和第 j 列被移出之外，M_{ij} 与 A 相同。注意 M_{ij} 通常是 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵，余子式与代数余子式除可能的符号外是相同的。

将矩阵的代数余子式形成的矩阵的转置得到的新的矩阵称为**伴随矩阵**(adjugate)：

$$\operatorname{adj} A=[\gamma_{ij}]^{T} \tag{C-17}$$

有

$$A\operatorname{adj} A=(\det A)I \tag{C-18}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 称为**单位矩阵**(**identity matrix**)：

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

即，$\boldsymbol{I}$ 在对角线上取值为 1，其余为 0。若 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**逆**(**inverse**)定义为：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\operatorname{adj}\boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}} \tag{C-19}$$

并有特性

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I} \tag{C-20}$$

注意矩阵有逆意味着它是**非奇异阵**(**nonsingular**)——行列式不为 0。

两个矩阵乘积的逆是其各自逆的换位乘积：

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{C-21}$$

且

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{C-22}$$

C.6 行列式的特性

当用到矩阵行列式时，以下基本(行或列)运算很有用：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 的任意行或者列被标量 α 乘，所得矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的行列式

$$\det \bar{\boldsymbol{A}}=\alpha \det\boldsymbol{A} \tag{C-23}$$

于是，

$$\det(\alpha\boldsymbol{A})=\alpha^{n}\det\boldsymbol{A} \tag{C-24}$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行或者列交换得到 $\bar{\boldsymbol{A}}$，则

$$\det(\bar{\boldsymbol{A}})=-\det\boldsymbol{A} \tag{C-25}$$

(3) 如果将 $\boldsymbol{A}$ 的某行或某列的倍数加到另外一行或者列得到 $\bar{\boldsymbol{A}}$，则

$$\det(\bar{\boldsymbol{A}})=\det\boldsymbol{A} \tag{C-26}$$

(4) 容易推得：

$$\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{C-27}$$

且

$$\det\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B} \tag{C-28}$$

把式(C-28)应用到式(C-20)，得到

$$\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{A}^{-1}=1 \tag{C-29}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是方阵，块状三角形矩阵的行列式是对角块行列式的乘积：

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ 0 & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B} \tag{C-30}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵，则

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}=\det\boldsymbol{A}\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) \tag{C-31}$$

利用单位矩阵，标量系统传递函数可以写为紧凑形式：

$$G(s)=\boldsymbol{H}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G}+\boldsymbol{J}=\frac{\det\begin{bmatrix}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}) & \boldsymbol{G}\\ -\boldsymbol{H} & \boldsymbol{J}\end{bmatrix}}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})} \tag{C-32}$$

C.7　块状三角阵的逆

若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix} \tag{C-33}$$

C.8　特殊矩阵

一些矩阵由特殊的结构而得名。我们已经定义了有特殊形式的单位矩阵。**对角矩阵**(**diagonal matrix**)在主对角线(可能)有非零元素，其他位置为0：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & & \boldsymbol{0} & \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & \ddots \\ & \boldsymbol{0} & & & a_{nn}\end{bmatrix} \tag{C-34}$$

若主对角线以下元素全为0，该矩阵被称为**(上)三角矩阵((upper)triangular)**：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & & & \\ \vdots & 0 & & & \vdots\\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{bmatrix} \tag{C-35}$$

对角矩阵或者三角矩阵的行列式是对角元素的乘积。

若一个矩阵具有如下形式：

$$\boldsymbol{A}_c=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & & \cdots & -a_n\\ 1 & 0 & & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \ddots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{C-36}$$

则称为**上伴随矩阵((upper)companion form)**。注意，所有信息都位于第一行。这种形式的变种是下、左或右伴随矩阵。

范德蒙矩阵(Vandermonde matrix)有如下形式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{bmatrix} \tag{C-37}$$

C.9 秩

矩阵的**秩**(rank)是线性无关行或列的数目。若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $(r+1)\times(r+1)$ 子矩阵是奇异的，且至少存在一个 $r\times r$ 子矩阵是非奇异的，且

$$\boldsymbol{A}\text{ 的行秩}=\boldsymbol{A}\text{ 的列秩} \tag{C-38}$$

C.10 特征多项式

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**(characteristic polynomial)定义为：

$$\begin{aligned} a(s) &\triangleq \det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \\ &= s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n \end{aligned} \tag{C-39}$$

多项式的根称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征根**(eigenvalues)，可写为

$$a(s)=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n) \tag{C-40}$$

$\{\lambda_i\}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根。伴随矩阵的特征多项式(如式(C-36))为：

$$\begin{aligned} a(s) &= \det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c) \\ &= s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n \end{aligned} \tag{C-41}$$

C.11 凯莱－汉密尔顿定理

凯莱－汉密尔顿定理表示，每个方阵 A 都满足其特征多项式。这意味着如果 $\boldsymbol{A}$ 是由特征方程 $a(s)$ 的 $n\times n$ 方阵，则

$$a(\boldsymbol{A})\triangleq\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{I}=0 \tag{C-42}$$

C.12 特征值和特征向量

任意的满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v} \tag{C-43}$$

的标量 λ 与非零向量 $\boldsymbol{v}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值以及矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相关(右)**特征向量**((**right**)**eigenvector**)(因在式(C-43)中 $\boldsymbol{v}$ 出现在 $\boldsymbol{A}$ 的右边)。重置式(C-43)得到：

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=0 \tag{C-44}$$

由于 $\boldsymbol{v}$ 为非零向量，所以

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0 \tag{C-45}$$

所以 λ 为式(C-43)定义的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。特征向量的标准化是任意的；即，如果 $\boldsymbol{v}$ 是特征向量，则 $\alpha\boldsymbol{v}$ 也是。特征向量通常标准化为单位长度；即 $\|\boldsymbol{v}\|^2=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=1$。

如果 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}$ 是非零行向量，使得

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \tag{C-46}$$

则 w^T 为 A 的**左特征向量**(**left eigenvector**)(因在式(C-46)中 w^T 出现在 A 的左边)。注意可以写为：

$$A^T w=\lambda w \tag{C-47}$$

故 w 是 A^T 的右特征向量。

C. 13　相似变换

考虑任意非奇异矩阵 T 使得

$$\bar{A}=T^{-1}AT \tag{C-48}$$

式(C-48)所示的运算称为**相似变换**(similarity transformation)。若 A 有满秩数的特征向量，则可选择由特征向量组成的 T，则 $\bar{A}$ 将是对角阵。

考虑状态变量形式的方程组：

$$\dot{x}=Fx+Gu \tag{C-49}$$

若令

$$T\xi=x \tag{C-50}$$

式(C-49)变为

$$T\dot{\xi}=FT\xi+Gu \tag{C-51}$$

两边同乘 T^{-1}，得到

$$\begin{aligned}\dot{\xi}&=T^{-1}FT\xi+T^{-1}Gu\\&=\bar{F}\xi+\bar{G}u\end{aligned} \tag{C-52}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{F}&=T^{-1}FT\\\bar{G}&=T^{-1}G\end{aligned} \tag{C-53}$$

$\bar{F}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned}\det(sI-\bar{F})&=\det(sI-T^{-1}FT)\\&=\det(sT^{-1}T-T^{-1}FT)\\&=\det[T^{-1}(sI-F)T]\\&=\det T^{-1}\det(sI-F)\det T\end{aligned} \tag{C-54}$$

使用式(C-29)，式(C-54)转化为：

$$\det(sI-\bar{F})=\det(sI-F) \tag{C-55}$$

从式(C-55)可见，$\bar{F}$ 和 F 都有相同的特征多项式，从而得出重要的结论——相似变换不改变矩阵特征值。从式(C-50)可见，由原状态的线性组合而成的新状态与原状态具有相同的特征值。

C. 14　特征指数

令 A 为方阵。A 的**矩阵指数**(**matrix exponential**)定义为序列：

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{A^3t^3}{3!}+\cdots \tag{C-56}$$

可见该序列收敛。如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵,则 e^{At} 也是 $n\times n$ 矩阵,且可以求导:

$$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At} \tag{C-57}$$

其他的矩阵指数运算特征为:

$$e^{At_1}e^{At_2}=e^{A(t_1+t_2)} \tag{C-58}$$

且基本上

$$e^{A}e^{B}\neq e^{B}e^{A} \tag{C-59}$$

(除去 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换——即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$—— 的情况外, $e^{A}e^{B}=e^{B}e^{A}$)

C. 15 基本子空间

$\boldsymbol{A}$ 的**列空间**(**range space** 或 **column space**)由 $\Re(\boldsymbol{A})$ 表示,由向量集合

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{C-60}$$

定义, $\boldsymbol{y}$ 是一些向量。

$\boldsymbol{A}$ 的**零空间**(null space)由 $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$ 表示,由向量 $\boldsymbol{x}$ 集合

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{C-61}$$

定义。若 $x\in\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$, $y\in\Re(\boldsymbol{A}^{T})$,则 $\boldsymbol{y}^{T}\boldsymbol{x}=0$;即零空间 $\boldsymbol{A}$ 的每个向量与列空间 $\boldsymbol{A}^{T}$的每个向量正交(**orthogonal**)。

C. 16 奇异值分解(SVD)

奇异值分解(singular-value decomposition,SVD)是线性代数最有用的工具之一,且在过去 20 年中广泛应用于控制理论。令 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,则总存在矩阵 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{V}$,使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^{T} \tag{C-62}$$

成立,其中 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是正交矩阵,即

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{T}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{T}=\boldsymbol{I} \tag{C-63}$$

$\boldsymbol{S}$ 是有奇异值位于对角线的**准对角矩阵**(**quasidiagonal matrix**),即

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{C-64}$$

其中Σ 是非零奇异值降序排列的对角矩阵:

$$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0 \tag{C-65}$$

$\boldsymbol{S}$ 的单一对角元素称为**奇异值**(**singular value**)。最大的奇异值表示为 $\bar{\sigma}(\boldsymbol{A})$,最小的奇异值表示为 $\underline{\sigma}(\boldsymbol{A})$ 。矩阵的秩与非零奇异值的个数相等。$\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 的列

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}&=[u_1\quad u_2\quad\cdots\quad u_m]\\ \boldsymbol{V}&=[v_1\quad v_2\quad\cdots\quad v_n]\end{aligned} \tag{C-66}$$

分别称为左、右**奇异向量**(singular vector)。SVD 通过矩阵

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(\boldsymbol{A}) &= \mathrm{span}[v_{r+1} \quad v_{r+2} \quad \cdots \quad v_n] \\
\Re(\boldsymbol{A}) &= \mathrm{span}[u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_r] \\
\Re(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) &= span[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_r] \\
\mathcal{N}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) &= \mathrm{span}[u_{r+1} \quad u_{r+2} \quad \cdots \quad u_m]
\end{aligned}
\tag{C-67}
$$

为基础子空间提供完整信息。这里 $\Re$ 代表零空间，$\mathcal{N}$ 代表列空间。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**模(norm)**，表示为

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \bar{\sigma}(\boldsymbol{A}) \tag{C-68}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 是 ω 的函数，则 A 的极限标准型 $\|A\|_\infty$，为

$$\|\boldsymbol{A}(\mathrm{j}\omega)\|_\infty = \max_\omega \bar{\sigma}(\boldsymbol{A}) \tag{C-69}$$

C.17　正定矩阵

若对所有 $\boldsymbol{x}$ 有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \tag{C-70}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**半正定的(positive semidefinite)**；若仅在 $\boldsymbol{x}=0$ 的情况下式(C-70)等号成立，则矩阵为**正定的(positive definite)**。当且仅当所有特征值为正时，对称矩阵正定。当且仅当所有特征值非负时，矩阵半正定。

确定矩阵正定与否的另一种方法是检验其矩阵的余子式。若矩阵的所有前主子式为正，则矩阵正定；若均为非负，则矩阵半正定。

C.18　特征同一性

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则

$$\det[\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}] = \det[\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}]$$

其中 $\boldsymbol{I}_n$ 和 $\boldsymbol{I}_m$ 分别是 n 阶、m 阶单位矩阵。

附录 D　能控性和能观性

能控性和能观性是动态系统的重要结构特征。首先由 Kalman(1960)以及后来的 Kalman et al.(1961)定义并研究,这些特性在过去 40 年中一直被检验。我们将仅仅讨论线性定常单输入单输出系统的已知结论。在课文中,我们将这些概念与控制律和估计器设计联系在一起进行讨论。例如,在 7.4 节,我们讲到,若方阵

$$\mathcal{C}=[\boldsymbol{G}\quad \boldsymbol{FG}\quad \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{G}\quad \cdots\quad \boldsymbol{F}^{n-1}\boldsymbol{G}] \tag{D-1}$$

为非奇异,通过状态转换可以把给出的表达式化为能控标准型,然后可以创建能够为闭环系统提供任意特征方程的控制律。

D.1　能控性

我们以四个定义中的第一个定义开始正式探讨能控性:

定义Ⅰ　系统 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$ 是能控的(controllable),如果对于任意给定的 n 次多项式 $\alpha_c(s)$,存在唯一的控制律 $u=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$,使得 $\boldsymbol{F}-\boldsymbol{GK}$ 的特征多项式为 $\alpha_c(s)$。

从阿克曼公式(见附录 E),得出对能控性的以下数学检验:当且仅当 $\mathcal{C}$ 的秩是 n 时,$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$ 是能控的。基于极点置放的定义Ⅰ是频域概念。能控性也可以在时域中等价定义。

定义Ⅱ　系统 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$ 是能控的,如果存在一个控制信号 $u(t)$,能够将系统状态在有限时间内从初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 转化为期望状态 $\boldsymbol{x}_f$。

现在通过这个定义证明当且仅当 $\mathcal{C}$ 满秩,系统是能控的。首先假设一个系统能控但

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{G}\quad \boldsymbol{FG}\quad \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{G}\quad \cdots\quad \boldsymbol{F}^{n-1}\boldsymbol{G}]<n \tag{D-2}$$

则可求得矩阵 $\boldsymbol{v}$,使得

$$\boldsymbol{v}[\boldsymbol{G}\quad \boldsymbol{FG}\quad \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{G}\quad \cdots\quad \boldsymbol{F}^{n-1}\boldsymbol{G}]=0 \tag{D-3}$$

或者

$$\boldsymbol{vG}=\boldsymbol{vFG}=\boldsymbol{vF}^2\boldsymbol{G}=\cdots=\boldsymbol{vF}^{n-1}\boldsymbol{G}=0 \tag{D-4}$$

凯莱—汉密尔顿定理表明,$\boldsymbol{F}$ 满足自身特征方程,即

$$-\boldsymbol{F}^n=a_1\boldsymbol{F}^{n-1}+a_2\boldsymbol{F}^{n-2}+\cdots+a_n\boldsymbol{I} \tag{D-5}$$

因此,

$$-\boldsymbol{vF}^n\boldsymbol{G}=a_1\boldsymbol{vF}^{n-1}\boldsymbol{G}+a_2\boldsymbol{vF}^{n-2}\boldsymbol{G}+\cdots+a_n\boldsymbol{vG}=0 \tag{D-6}$$

由归纳,$\boldsymbol{vF}^{n+k}\boldsymbol{G}=0$($k=0,1,2,\cdots$),或者 $\boldsymbol{vF}^m\boldsymbol{G}=0$($m=0,1,2,\cdots$),于是对于所有

的 t，有

$$v e^{Ft} G = v\left(I + Ft + \frac{1}{2!}F^2 t^2 + \cdots\right)G = 0 \tag{D-7}$$

但是，零状态响应（ $x_0 = 0$）是

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau \\ &= e^{Ft} \int_0^t e^{-F\tau} G u(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{D-8}$$

应用式(D-7)对于所有的 $u(t)$ 以及 $t>0$，式(D-8)化为：

$$v x(t) = \int_0^t v e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau = 0 \tag{D-9}$$

这意味着所有从原点可及的点都与 v 正交。如此限制了可达空间并与能控性定义Ⅱ抵触。因此，若$\mathcal{C}$是奇异的，由定义Ⅱ，(F,G) 不能控。

下一步，假设$\mathcal{C}$是满秩的，但是由定义Ⅱ，(F,G) 不能控。这意味着存在非零向量 v，使得

$$v \int_0^{t_f} e^{F(t_f-\tau)} G u(\tau) d\tau = 0 \tag{D-10}$$

这是因为整个状态空间是不可及的，但是式(D-10)暗示，

$$v e^{F(t_f-\tau)} G = 0, 0 \leqslant \tau \leqslant t_f \tag{D-11}$$

若设 $\tau = t_f$，可见 $vG = 0$。对式(D-11)求导，令 $\tau = t_f$ 得到 $vFG = 0$。继续这一步骤，求得

$$vG = vFG = vF^2 G = \cdots = vF^{n-1} G = 0 \tag{D-12}$$

这与 $\mathcal{C}$ 是满秩的假设矛盾。

现在已经证明，当且仅当 $\mathcal{C}$ 的秩为 n 时，根据定义Ⅱ系统是能控的，与极点配置条件相同。

最终的定义与能控性结构特征接近：

定义 III　若 F 的每个模式都与控制输入相连，系统 (F,G) 是能控的。

由于系统模型结构的整体性，我们只分析 F 可以化为对角线标准型的情况（双积分控制对象不符合）。假设有对角线矩阵 F_d 及其相应的有元素 g_i 的输入矩阵 G_d。此种系统的结构如图 D-1 所示。由定义Ⅲ，对于能控系统，输入必须与每种模式相连使得 g_i 为非零值。

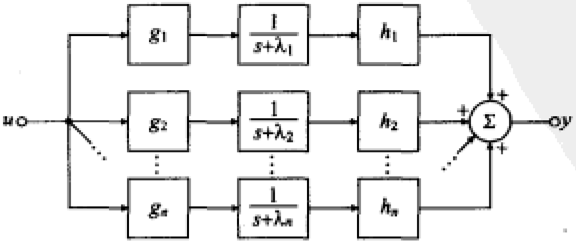


图 D-1　对角线矩阵系统框图

然而，若极点（λ_i）重复，如此便有不足。假设，例如 $\lambda_1=\lambda_2$。开始的两个状态方程即为：

$$\dot{x}_{1d}=\lambda_1 x_{1d}+g_1 u$$
$$\dot{x}_{2d}=\lambda_1 x_{2d}+g_2 u \tag{D-13}$$

若定义新的状态，$\xi=g_2x_{1d}-g_1x_{2d}$，ξ 方程为

$$\dot{\xi}=g_2\dot{x}_{1d}-g_1\dot{x}_{2d}=g_2\lambda_1x_{1d}+g_2g_1u-g_1\lambda_1x_{2d}-g_1g_2u=\lambda_1\xi \tag{D-14}$$

不包含控制 u；因此，ξ 不能控。关键是如果任何两个极点在单输入对角阵 $\boldsymbol{F}_d$ 系统中相等，将有一个不与控制连接的隐藏模式，且系统不能控（图 D-2a）。这是因为两个状态变量一同运动，因此不能独立控制 x_{1d} 和 x_{2d}。因此，即使在这样简单的例子中，能控性也有两个条件：

（1）所有 $\boldsymbol{F}_d$ 的特征值各不相同。

（2）$\boldsymbol{G}_d$ 没有元素为零。

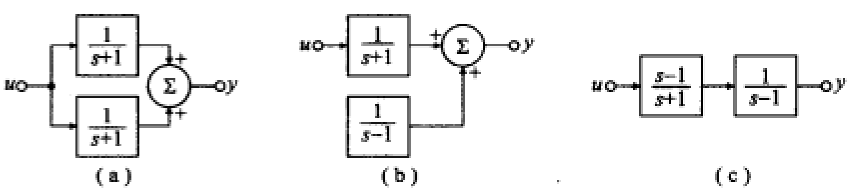


图 D-2　不能控系统

现在思考该对角阵系统的能控性矩阵。由直接计算得：

$$\mathcal{C}=\begin{bmatrix} g_1 & g_1\lambda_1 & \cdots & g_1\lambda_1^{n-1} \\ g_2 & g_2\lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_n & g_n\lambda_n & \cdots & g_n\lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} g_1 & & & \mathbf{0} \\ & g_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & g_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{D-15}$$

注意能控性矩阵 $\mathcal{C}$ 是两个矩阵乘积，当且仅当两个矩阵都可逆时 $\mathcal{C}$ 才为非奇异。第一个矩阵行列式为 g_i 的乘积，第二个矩阵（范德蒙矩阵）当且仅当 λ_i 各不相同时为非奇异。故定义Ⅲ与 $\mathcal{C}$ 非奇异等价。

对能控性课题来说，**Popov-Hautus-Rosenbrock（PHR）检验**（见 Rosenbrock，1970 和 Kailath，1980）非常重要，是检验 $\mathcal{C}$ 的秩（行列式）之外的另一条途径。系统（F,G）是能控的，若有方程

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}\quad \boldsymbol{G}]=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \tag{D-16}$$

只有全零解 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$——即，若**矩阵束（matrix pencil）**

$$\mathrm{rank}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}\quad \boldsymbol{G}]=n \tag{D-17}$$

对于所有的 s 都是满秩，或者没有非零 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 使得[①]

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=s\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \tag{D-18}$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}=0 \tag{D-19}$$

该检验与 $\mathcal{C}$ 的秩检验等价。容易证明如果这种向量 $\boldsymbol{v}$ 存在，$\mathcal{C}$ 是奇异的。因为如果存在非零的 $\boldsymbol{v}$ 使得 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}=0$，则由式(D-18)、式(D-19)得到

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}=s\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}=0 \tag{D-20}$$

乘以 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$，得到

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^2\boldsymbol{G}=s\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}=0 \tag{D-21}$$

等等。于是得出 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ 有非全零解，故 $\mathcal{C}$ 是奇异的，系统不能控。要证明 $\mathcal{C}$ 是奇异的情况下非全零 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 存在需要进一步深入，这里暂不给出(见 Kailath，1980)。

我们已经给出不能控性的两份图像。一种模式与输入物理上不连接(图 D-2b)，另一种是两个平行子系统有相同的特征根(图 D-2a)。控制工程师应当了解第三种简单情况，如图 D-2c 所示，即极**零点相消(pole-zero cancellation)**。这里的问题是，在 $s=1$ 处的模式看起来与输入连接，但是被有零点 $s=1$ 的先行子系统所掩盖；结果成为不能控系统。通过多种途径可以证实。首先看能控性矩阵，系统矩阵为：

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$

因此能控性矩阵

$$\mathcal{C}=[\boldsymbol{G}\quad \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}]=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix} \tag{D-22}$$

明显是奇异的。能控性矩阵可以通过 MATLAB 的 ctrb 命令[cc]=ctrb(F,G).计算。若计算从 u 到 x_2 的传递函数，得到：

$$H(s)=\frac{s-1}{s+1}\left(\frac{1}{s-1}\right)=\frac{1}{s+1} \tag{D-23}$$

因为 $s=1$ 的自然模式在输出—输出的描述中消失，不与输入连接。最后，若考虑 **PHR** 检验，

$$[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}\quad \boldsymbol{G}]=\begin{bmatrix}s+1 & 0 & -2\\ -1 & s-1 & 1\end{bmatrix} \tag{D-24}$$

令 $s=1$，需要检验的秩，明显小于 2。这个结果再次表明系统不能控。

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

定义Ⅳ　渐进稳定系统 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$ 是能控的，若能控性格兰姆矩阵，即对称方阵 $\mathcal{C}_g$，由李雅普诺夫方程

$$\boldsymbol{F}\mathcal{C}_g+\mathcal{C}_g\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0} \tag{D-25}$$

给出的解是非奇异的。能控性格兰姆矩阵也是积分方程

$$\mathcal{C}_g=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\tau\boldsymbol{F}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\tau\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}}\,\mathrm{d}\tau \tag{D-26}$$

---

① $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的左特征向量。

的解。能控性格兰姆矩阵的一种物理理解方法是，若系统输入是高斯白噪声，则 c_g 是状态协方差。能控性格兰姆矩阵（对渐进稳定系统）可以通过下述 MATLAB 命令计算：[cg]=gram(*F*,*G*)。

总之，能控性的四个定义——极点配置（定义Ⅰ）、状态可及（定义Ⅱ）、输入模式配对（定义Ⅲ），以及能控性格兰姆矩阵（定义Ⅳ）——都是等价的。四种特性的任意一个都归结为求能控性或者能控性格兰姆矩阵的秩，或者**矩阵束** $[sI-FG]$ 的秩。若 c 非奇异，即可通过状态反馈任意配置闭环极点，能够在有限时间内将状态转移至状态空间内的任意位置，且每种模式都与控制输入相连①。

D.2 能观性

到目前为止，我们仅仅讨论了能控性。能观性的概念与能控性对等，到目前为止所有讨论到的结论都可以通过调用对偶性特征转化为能观性的状态，见 7.7.2 节。能观性定义与能控性类似，表述如下：

(1) 定义Ⅰ：若对于任意的 n 次多项式 $\alpha_e(s)$，存在估计器增益 $\boldsymbol{L}$ 使得状态估计器误差的特征方程是 $\alpha_e(s)$，则系统 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$ 是**能观的**。

(2) 定义Ⅱ：若对任意的 $\boldsymbol{x}(0)$，存在有限的时间 τ，使得 $\boldsymbol{x}(0)$ 可以唯一地由 $u(t)$ 和 $y(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant\tau$ 内实现，则系统 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$ 是**能观的**。

(3) 定义Ⅲ：若 $\boldsymbol{F}$ 中每个动态模式都通过 $\boldsymbol{H}$ 与输出相连，则系统 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$ 是**能观的**。

(4) 定义Ⅳ：若能观性格兰姆矩阵是非奇异的，则渐进稳定系统 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$ 是**能观的**。

与能控性讨论一样，数学检验也可应用于能观性。若

$$\boldsymbol{\vartheta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{HF}\\ \vdots\\ \boldsymbol{HF}^{n-1}\end{bmatrix}\tag{D-27}$$

是非奇异的，则系统是能观的。若取 $\boldsymbol{\vartheta}$ 的转置并令 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{G}$ 且 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}$，然后求得能控性矩阵 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$，它是对偶性的另一种表现。能观性矩阵 $\boldsymbol{\vartheta}$ 可以通过使用 MATLAB 的 obsv 命令 [oo]=obsv(F,H).）计算得到。

若矩阵束

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{H}\end{bmatrix}=n\tag{D-28}$$

对 s 是满秩的，则系统 $(\boldsymbol{F}、\boldsymbol{H})$ 是能观的，能观性格兰姆矩阵 $\boldsymbol{\vartheta}_g$ 是对称矩阵，积分方程：

$$\boldsymbol{\vartheta}_g=\int_0^\infty e^{\tau\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}e^{\tau\boldsymbol{F}}\mathrm{d}\tau\tag{D-29}$$

以及李雅普诺夫方程：

① 我们仅对对角矩阵 $\boldsymbol{F}$ 证明了后者，但是结论普遍适用。

$$F^{T}\vartheta_{g}+\vartheta_{g}F+H^{T}H=0 \tag{D-30}$$

也可通过使用 MATLAB 的 gram 命令：[og]=gram(F′,H′)计算得到 。能观性格兰姆矩阵可理解为估计过程中的“信息矩阵”。

附录 E　极点配置的阿克曼公式

给出装置和状态变量方程：

$$\dot{x}=Fx+Gu \tag{E-1}$$

目的是求得状态反馈控制规律：

$$u=-Kx \tag{E-2}$$

使得闭环特征多项式是：

$$\alpha_c(s)=\det(sI-F+GK) \tag{E-3}$$

首先，要选择 $\alpha_c(s)$，它决定极点转移到何处；然后要求得 K，使之满足式(E-3)。方法是基于将装置方程转化为能控标准型。

首先思考任意非奇异状态变换：

$$x=T\bar{x} \tag{E-4}$$

其中 $\bar{x}$ 是新的转换状态。新坐标系的运动方程由式(E-4)得出，为：

$$\dot{x}=T\dot{\bar{x}}=Fx+Gu=FT\bar{x}+Gu \tag{E-5}$$

$$\dot{\bar{x}}=T^{-1}FT\bar{x}+T^{-1}Gu=\bar{F}\bar{x}+\bar{G}u \tag{E-6}$$

对初始状态，能控制矩阵

$$\mathcal{C}_x=[G\quad FG\quad F^2G\quad\cdots\quad F^{n-1}G] \tag{E-7}$$

提供一个有用的转换矩阵。我们也可以为转换状态：

$$\mathcal{C}_{\bar{x}}=[\bar{G}\quad \bar{F}\bar{G}\quad \bar{F}^2\bar{G}\quad\cdots\quad \bar{F}^{n-1}\bar{G}] \tag{E-8}$$

定义能控性矩阵。

两个能控性矩阵由

$$\mathcal{C}_{\bar{x}}=[T^{-1}G\quad T^{-1}FTT^{-1}G\cdots\quad]=T^{-1}\mathcal{C}_x \tag{E-9}$$

联系，转移矩阵为：

$$T=\mathcal{C}_x\mathcal{C}_{\bar{x}}^{-1} \tag{E-10}$$

从式(E-9)和式(E-10)可以得出一些重要结论。从式(E-9)，可见若 $\mathcal{C}_x$ 非奇异，然后对任意非奇异 T，$\mathcal{C}_{\bar{x}}$ 也是非奇异的。这意味着状态相似性变换不改变系统的能控性特征。我们也可以用另一种方法看待。假设我们想找出将系统 (F,G) 化为能控标准型的转换矩阵。如下面将看到的，该情况下的 $\mathcal{C}_{\bar{x}}$ 通常是非奇异的。从式(E-9)可得——当且仅当 $\mathcal{C}_x$ 非奇异，非奇异矩阵 T 都会存在。总结为：

当且仅当系统是能控的，(F,G) 总可以转化为能控标准型。

下面以三阶系统为例，对能控标准型进一步研究，然而结论适用于任意 n 阶的情况：

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_c=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & -a_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}_c=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \tag{E-11}$$

由直接计算，得能控性矩阵

$$\mathcal{C}_x=\mathcal{C}_c=\begin{bmatrix}1 & -a_1 & a_1^2-a_2\\ 0 & 1 & -a_1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{E-12}$$

由于矩阵是上三角型，对角线全为 1，故总是可逆的；而且注意到 $\mathcal{C}_x$ 的最后一行除最后一个元素为 1 外，其余元素为 0。下一步中我们将用到这一性质。

如 7.5 节所指出，若运动方程恰是能控标准型，状态变量 $\boldsymbol{x}$ 控制规律的设计是没有必要的。特征方程是

$$s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=0 \tag{E-13}$$

闭环系统的特征方程源于：

$$\boldsymbol{F}_{cl}=\boldsymbol{F}_c-\boldsymbol{G}_c\boldsymbol{K}_c \tag{E-14}$$

且有系数如下：

$$s^3+(a_1+K_{c1})s^2+(a_2+K_{c2})s+(a_3+K_{c3})=0 \tag{E-15}$$

为得到期望闭环极点位置，必须使式(E-15)中 s 的系数符合

$$\alpha_c(s)=s^3+\alpha_1s^2+\alpha_2s+\alpha_3 \tag{E-16}$$

因此，

$$a_1+K_{c1}=\alpha_1,\ a_2+K_{c2}=\alpha_2,\ a_3+K_{c3}=\alpha_3 \tag{E-17}$$

或者，以向量形式表示即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{K}_c=\boldsymbol{\alpha} \tag{E-18}$$

其中 a 和 α 分别是开环、闭环系统特征多项式系数的行向量。

现在需要求的是这些多项式系数和矩阵 $\boldsymbol{F}$ 之间的关系。这一要求由凯莱一汉密尔顿定理——矩阵满足自身的特征多项式来实现。对于 $\boldsymbol{F}_c$，这意味着

$$\boldsymbol{F}_c^n+a_1\boldsymbol{F}_c^{n-1}+a_2\boldsymbol{F}_c^{n-2}+\cdots+a_n\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \tag{E-19}$$

假设建立多项式 $\alpha_c(\boldsymbol{F}_c)$，它是以矩阵 $\boldsymbol{F}$ 代替复变量 s 的闭环特征多项式

$$\alpha_c(\boldsymbol{F}_c)=\boldsymbol{F}_c^n+\alpha_1\boldsymbol{F}_c^{n-1}+\alpha_2\boldsymbol{F}_c^{n-2}+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{I} \tag{E-20}$$

若用式(E-19)解得 $\boldsymbol{F}_c^n$ 并代入式(E-20)，求得：

$$\alpha_c(\boldsymbol{F}_c)=(-a_1+\alpha_1)\boldsymbol{F}_c^{n-1}+(-a_2+\alpha_2)\boldsymbol{F}_c^{n-2}+\cdots+(-a_n+\alpha_n)\boldsymbol{I} \tag{E-21}$$

然而，由于 $\boldsymbol{F}_c$ 有特殊结构，我们得知若使之乘以 n 阶单位向量——$\mathbf{e}_n^{\mathrm{T}}=[0\ \cdots\ 0\ 1]$，得

$$\mathbf{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_c=[0\ \cdots\ 0\ 1\ 0]=\mathbf{e}_{n-1}^{\mathrm{T}} \tag{E-22}$$

如式(E-11)所示。若将此向量再乘以 $\boldsymbol{F}_c$，得：

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_c)\boldsymbol{F}_c&=[0\ \cdots\ 0\ 1\ 0]\boldsymbol{F}_c\\&=[0\ \cdots\ 0\ 1\ 0\ 0]=\mathbf{e}_{n-2}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{E-23}$$

继续下去，整合为最终的单位向量：

$$\mathbf{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_c^{n-1}=[1\ 0\ \cdots\ 0]=\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} \tag{E-24}$$

因此，若以 $\mathbf{e}_n^{\mathrm{T}}$ 乘以式(E-21)得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n^T\alpha_c(\boldsymbol{F}_c) &= (-a_1+\alpha_1)\mathbf{e}_1^T+(-a_2+\alpha_2)\mathbf{e}_2^T+\cdots+(-a_n+\alpha_n)\mathbf{e}_n^T \\ &= [K_{c1} \quad K_{c2} \quad \cdots \quad K_{cn}] = \boldsymbol{K}_c \end{aligned} \tag{E-25}$$

我们使用了联系 $\boldsymbol{K}_c$ 与 a 和 α 的式(E-18)。

现在，系统增益有了能控标准型的集中表达形式，如式(E-25)所示。但是，我们仍然需要初始状态增益 $\boldsymbol{K}$ 的表达式。若 $u=-\boldsymbol{K}_c\boldsymbol{x}$，那么 $u=-\boldsymbol{K}_c\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$，使得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} &= \boldsymbol{K}_c\boldsymbol{T}^{-1} = \mathbf{e}_n^T\alpha_c(\boldsymbol{F}_c)\boldsymbol{T}^{-1} \\ &= \mathbf{e}_n^T\alpha_c(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}^{-1} \\ &= \mathbf{e}_n^T\boldsymbol{T}^{-1}\alpha_c(\boldsymbol{F}) \end{aligned} \tag{E-26}$$

在式(E-26)的最后一步中，我们利用了事实：$(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{T})^k=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{F}^k\boldsymbol{T}$ 且 α_c 是多项式——即 $\boldsymbol{F}_c$ 的指数之和。从式(E-9)可见

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \mathcal{C}_c\,\mathcal{C}_x^{-1} \tag{E-27}$$

利用这一替代，式(E-26)变为

$$\boldsymbol{K} = \mathbf{e}_n^T\,\mathcal{C}_c\,\mathcal{C}_x^{-1}\alpha_c(\boldsymbol{F}) \tag{E-28}$$

现在使用式(E-12)得到的观测结果，$\mathcal{C}_c$ 的最后一行，即 $\mathbf{e}_n^T\,\mathcal{C}_c$，也是 $\mathbf{e}_n^T$。最后得到阿克曼公式：

$$\boldsymbol{K} = \mathbf{e}_n^T\,\mathcal{C}_x^{-1}\alpha_c(\boldsymbol{F}) \tag{E-29}$$

再次注意，求 $\mathcal{C}_x$ 的直接逆矩阵对数值精确度来说不可取。因此我们需要求得 $\boldsymbol{b}^T$ 使得

$$\mathbf{e}_n^T\,\mathcal{C}_x^{-1} = \boldsymbol{b}^T \tag{E-30}$$

求解线性系方程：

$$\boldsymbol{b}^T\,\mathcal{C}_x = \mathbf{e}_n^T \tag{E-31}$$

然后计算

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{b}^T\alpha_c(\boldsymbol{F}) \tag{E-32}$$

阿克曼方程，如式(E-29)所示，虽然好用，但不适用于多状态变量系统。即使要应用，式(E-31)和式(E-32)也要求有更高的数值精度。

附录 F　MATLAB 命令

MATLAB 函数(.m 文件)	描　述	页　码
acker	极点配置的阿克曼公式	360, 366, 376, 379, 480
axis	控制轴比例	263, 265
bode	伯德频率响应	59, 241, 252, 306, 420
c2d	连续到离散转换	144, 281, 393, 401, 459
canon	状态向量空间标准型	348
conv	多项式乘法	68, 153, 369, 370, 615
ctrb	能控性矩阵	637
damp	衰减和自然频率	474
eig	特征值和特征向量	346, 648, 478
feedback	两个系统的反馈连接	76, 209, 474
gram	能控性/能观性格兰姆矩阵	637, 638
impulse	冲激响应	79, 82, 89
initial	初始条件响应	376, 382
inv	矩阵转置	348, 349
loglog	对数一对数图	59, 241, 252, 420
logspace	对数分布频率点	59
lqe	线性二次观测器设计	418
lqr	线性二次校正器设计	371, 372, 591
lsim	线性系统仿真	72, 73
margin	增益和相位裕度	283, 317, 420
max	最大成分	306
nichols	尼克斯图	296
nyquist	奈奎斯特图	261, 262, 265
obsv	能观性矩阵	638
ones	单位队列	72

（续）

MATLAB 函数（. m 文件）	描　述	页　码
pade	时间滞后的 pade 接近	218
parallel	两个系统并行连接	76
place	极点配置	360，379，390，394，410
plot	图像函数	26，70，72，152
poly	从方程的根建立多项式	68
printsys	显示系统传递函数	70
pzmap	极零点图	78
residue	部分分式扩展剩余	65，68，615
rlocfind	计算根轨迹增益	193，317
rlocus	根轨迹	174，317，369，370
rltool	交互式根轨迹工具	227
roots	多项式根	97，188，354，362
semilogx	半对数图像	59，241，420
semilogy	半对数图像	306
series	两系统串联	76，420，474
sqrt	平方根	410
ss2tf	传递函数的状态向量	76，419
ss2zp	极零点变化的状态向量	339
ss	向状态向量转化	335，348，352，354
ssdata	建立状态向量模型	479
step	阶跃响应	20，59，76，79，89，474
tf2ss	传递函数化为状态向量	341
tf2zp	传递函数到极零点的转化	70
tf	化为传递函数	20，76
tzero	传送零点	352，354
zeros	零点队列	72
zp2tf	零极点到传递函数的转化	71

附录G　章末复习题答案

第1章

1. 反馈控制系统的主要组成部件有哪些？

处理器、执行器、传感器和控制器。

2. 传感器的作用是什么？

测量输出变量并通常转化为电压形式。

3. 指出一个好的传感器必须具备的三个重要特性。

一个好的传感器在其输入信号很大的放大范围和频率范围内是线性的（输出与输入成比例），低噪声，无偏移，易校准，低成本。这些特征的重要性随使用情况不同而变化。

4. 执行器的作用是什么？

执行器把输入信号（通常是电子信号），将其转化为可以使处理器的输出结果移动或者改变的信号（如力或者力矩）。

5. 指出一个好的执行器必须具备的三个重要特性。

一个好的执行器需要有快速响应，足够的功率，能量，速度，转矩等等，使得可以令处理器输出满足设计条件，高效，轻质，小型，廉价等等。

6. 控制器的作用是什么？指出控制器的输入和输出。

控制器将传感器的输出（即控制器的输入）输入，计算出控制信号（控制器的输出）输出给执行器。

7. 什么样的物理变量可以用霍尔效应传感器直接测量？

霍尔效应传感器测量磁场的作用力，可以通过最简单的设置来测量两个物体的相互位置或者相关角度。

8. 什么样的物理量可以用测速器测量？

转速计测量旋转的速度或者角速度。

9. 为什么大多数传感器的输出都是电信号，即使被测变量是其他物理量？

电信号最容易操控；因此，多数控制器是模拟或者数字的电子设备。为了给此设备提供输入信号，传感器要输出电信号。

第2章

1. “自由体受力图”是什么？

为了列写连接体系统的运动方程，有必要依次画出其他物体对当前分析物体的作

用力以及力矩。对如上所述孤立体逐个全部描画，称"自由体受力图"。

2. 牛顿定律的两种形式是什么？

移动运动描述为：$F=ma$ 。旋转运动描述为：$M=I\alpha$ 。

3. 对需要控制的结构过程(如机械臂)并置控制和非并置控制的概念是什么？

当执行器和传感器放在同一个刚体上，控制被称为"并置的"；当他们位于不同的物体而由弹簧相连，控制被称为"非并置的"。

4. 描述基尔霍夫电流定律。

流入一个节点或者电路的电流代数和为零。

5. 描述基尔霍夫电压定律。

闭合电路的电压代数和为零。

6. "运算放大器"的命名时间、原因和作者？

在一篇 1947 年的论文，Ragazzini，Randall 和 Russell 将在反馈中使用，用来实现操作性微积分运算的，高增益、宽频带放大器命名为运算放大器。

7. 运算放大器的零输入电流的主要优势是什么？

零输入电流的放大器不必负担输入电路；设备传递函数就与放大器特性无关，而且这样电路分析得到简化。

8. 为什么说电动机的电枢电阻 R_a 要具有小电阻值？

但电枢电流通过时，电枢电阻导致功率损耗，于是降低电动机效率。

9. 电机的电气常数的定义和单位是什么？

旋转电机在电枢中产生电压(后电动势)，并与旋转速度成比例。电气常数 K_e 时电压对速度的比率，所以 $e=K_e\dot{\theta}$。单位是：v・s/rad。

10. 电机的转矩常数的定义和单位是什么？

当电流 i_a 流过电动机电枢，产生与电流成正比例的转矩 τ 。转矩常数 K_t 是比例常数，即 $\tau=K_t i_a$。单位是 N・m/A。

11. 为什么将装置的物理模型(通常是非线性的)近似为线性模型？

线性模型的分析设计比非线性模型容易得多。而且，由李雅普诺夫原理表明，若线性估计稳定，那么非线性模型至少存在一定的稳定区间。

▲12. 给出与下列事件有关的关系：(a)热能流过一个物体；与(b)物体中的热量存储之间的关系。

(a) 热流量为温差与热阻之商；即，$q=\frac{1}{R}(T_1-T_2)$ 。

(b) 热存储的微分方程是 $\dot{T}=\frac{1}{C}q$ ，其中 C 是材料的热容量。

▲13. 给出流体流动的三个物理关系的方程。

连续性：$\dot{m}=w_{in}-w_{out}$

力平衡：$f=pA$

阻力：$w=\frac{1}{R}(p_1-p_2)^{1/\alpha}$

第 3 章

1. 传递函数的定义是什么？

线行时不变系统输出的拉普拉斯变换 $Y(s)$，与输入的变换 $U(s)$ 成比例关系。该比例函数即传递函数 $F(s)$，所以有 $Y(s)=F(s)U(s)$，假设所有初始情况为 0。

2. 可用传递函数来描述其响应的系统具有什么特征？

系统是线性（叠加性）时不变的（参数不随时间变化）。

3. 若 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$，则 $f(t-\lambda)1(t-\lambda)$ 的拉普拉斯变换的结果是什么？

$\mathcal{L}\{f(t-\lambda)1(t-\lambda)\}=e^{-s\lambda}F(s)$

4. 叙述终值定理（FVT）的内容。

如果 $sF(s)$ 的所有极点都在左半平面，$f(t)$ 的终值为 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to 0}sF(s)$。

5. 在控制系统设计中终值定理最常见的应用是什么？

控制系统的标准测试是阶跃响应，终值定理用来得出该输入的稳态误差。

6. 给定一个二阶传递函数，阻尼比为 δ，自然响应频率为 ω_n，估计其阶跃响应的上升时间、超调量和调节时间。

以上结果为 $t_r=1.8/\omega_n$，M_p 由阻尼比决定（见图 3-21 曲线）$t_s\cong 4.6/\sigma$。

7. 左半平面的附加零点对二阶系统阶跃响应的主要影响是什么？

此种零点引发附加超调量，且零点越靠近虚轴，超调量越大。若零点的实部距离大于复极点的实部距离 6 倍以上，其影响可忽略。

8. 右半平面的零点对二阶系统阶跃响应的最明显的影响是什么？

此种零点产生初始下冲响应。

9. 附加实极点对二阶系统阶跃响应的主要影响是什么？

极点减慢响应速度且令上升时间变长。极点与虚轴越近，影响越明显。若极点距离比复极点实部距离大 6 倍以上，影响可忽略。

10. 为什么稳定性是控制系统设计中一个需要重视的问题？

几乎任何有用的动态系统都要确保稳定以实现它的功能。一般情况下稳定的系统反馈可能引入不稳定因素，因此控制设计者必须能够确保设计的稳定。

11. 劳斯判据的主要用途是什么？

用这一方法，能够（象征性地）到可以使系统稳定的参数（如环路增益）的取值范围。

12. 在哪些情况下根据实验数据估算传递函数非常重要？

在许多情况下，运动方程非常复杂或者无从知道。如造纸机类的化学过程即是如此。在这种情况下，若想建立良好的控制，收集瞬时数据或者稳态频率响应数据以及由此推断传递函数是十分有用的。

第 4 章

1. 指出在控制中应用反馈的四个优点。

(a) 反馈可以减少扰下的稳态响应误差。

(b) 反馈可以减少跟踪参考量时的稳态误差。

(c) 反馈可以减少参数改变时的传递函数敏感度。

(d) 反馈可以使不稳定过程稳定下来。

2. 指出控制中应用反馈的两个缺点。

(a) 反馈需要传感器，可能会非常昂贵并会引入额外噪声。

(b) 反馈系统通常比开环系统更难以设计并难以操控。

3. 一个温度控制系统在恒定输入的作用下误差为 0，在随时间线性变化的输入作用下有 0.5℃的误差，上升速率为 40℃/s。该控制系统属于什么系统类型，以及相关误差常数是什么误差常数（K_p或K_v或K_a）?

系统是 1 型，K_v是输入速度和误差的比值，$K_v = 40/0.5 = 80/s$。

4. K_p、K_v和K_a的单位是什么?

K_p无量纲，K_v是 s^{-1}，K_a是 s^{-2}。

5. 关于参考输入的系统类型如何定义?

对于只有 k 次项的参考输入（无扰动），系统类型是稳态误差为常量的 k 的最大值。

6. 关于干扰输入的系统类型如何定义?

对于只有 k 次项的扰动输入（无参考），系统类型是稳态误差为常量的 k 的最大值。

7. 为什么系统类型与外部信号进人系统的位置相关?

因为误差依赖于输入进入的位置，系统类型同样。

8. 引入积分控制的主要目的是什么?

积分控制会使常量输入引起的误差趋于零。它消除过程噪声偏差的影响。不能消除传感器偏差。

9. 加入积分控制的主要目的是什么?

微分控制特别令系统更好地衰减并更稳定。

10. 为什么设计者可能希望将微分项置于反馈回路之中而不是误差回路中?

当参考输入可能包括突然的变化，把它引入微分动作中可能引起不必要的大控制量。

11. 给出三个使用数字控制器而不使用模拟控制器的原因。

(a) 若控制器是数字式，控制律更容易改变。

(b) 相对于模拟控制器，数字控制器更容易实现逻辑和其他的非线性运算。

(c) 在实际的控制设计细节完成之前，就可以确定数字控制器的硬件。

12. 指出两个使用数字控制器的缺点。

(a) 数字控制器的带宽受到采样频率的限制。

(b) 数字控制器在量化过程中引入噪声。

13. 在式(4-87)中，如果积分近似可以用高为 $e(kT_s)$、底为 T_s 的矩形面积代替，请以离散算子 z 表示拉普拉斯算子 s。

$$s=\frac{z-1}{T_s}$$

第5章

1. 给出根轨迹的两种定义。

(a) 根轨迹是 s 平面中 $a(s)+Kb(s)=0$ 有解的点轨迹。

(b) 根轨迹是 s 平面中 $G(s)=b(s)/a(s)$ 为 180° 角度的点轨迹。

2. 定义负根轨迹。

负根轨迹是 $a(s)-Kb(s)=0$ 有解的点轨迹或者 $G(s)=b(s)/a(s)$ 的角度为 0° 的轨迹。

3. 实轴上的哪些部分是(正的)根轨迹的一部分?

实轴上的点是根轨迹的充要条件是在其右侧实轴上的零点数和极点数之和为奇数。

4. 实轴上 $s=-a$ 点上有两个重极点，则根轨迹在该点的出射角是多少? 假设该点右侧没有其他零极点。

根轨迹出射角是 ±90°。

5. 实轴上在 $s=-a$ 上有三重极点，则根轨迹在该点的出射角是多少? 假设该点右侧没有其他零极点。

根轨迹出射角是 ±60° 和 180°。

6. 要使根轨迹经过 r_0 点，对超前补偿零点的位置有什么要求?

从超前零点到能够使轨迹穿过期望的根位置 r_0 的连线角度必须使能够使补偿传递函数在 r_0 的角度为 180°。

7. 补偿增益值为何时能将闭环极点置于 r_0 点?

如果补偿的开环传递函数是 KDG，那么 $K=1/|D(r_o)G(r_o)|$。

8. 超前补偿对根轨迹会产生什么影响?

超前补偿主要引起轨迹向左半平面偏移，将主导根移向更高阻尼的位置。

9. 滞后补偿对接近闭环主导极点的根轨迹有何影响?

滞后补偿一般置于与起点很近的地方使之对闭环主导根值附近的根轨迹的影响可以忽略。

10. 滞后补偿对多项式参考输入的稳态误差有何影响?

滞后补偿一般在 $s=0$ 处提高增益以增加1型系统速度常量并降低多项式输入误差。

11. 为什么靠近虚轴的极点的出射角很重要?

如果轨迹起点指向右半平面，反馈将使系统稳定性降低。另一方面，若轨迹起始

指向左半平面，反馈将使系统更稳定。

12. 定义条件稳定系统。

随着增益减少而变得不稳定的系统被认为是条件稳定的。即稳定性是以增益值至少高于最小值的运行补偿器为条件的。

13. 用根轨迹法来证明有3个极点在原点的系统一定是条件稳定系统。

当有3个极点位于原点，分离角确定两个极点以180°，±60°离开原点，或者，若有极点位于右半平面的实轴，它们会以0°，±120°离开，也就是说至少一个极点以向右半平面移动开始。随着增益从运行水平开始下降，至少一个根因足够低的增益必须穿入右半平面，系统一定是条件稳定的。

第6章

1. 为什么伯德建议将频率响应的幅值绘制在对数—对数坐标上？

在对数—对数坐标上，合理的传递函数图像可以由线形渐近线良好地引导，容易描绘且直观。

2. 如何定义分贝。

若功率比为 P_1/P_2，用分贝表示就是 $10\log(P_1/P_2)$。由于功率与电压平方成比例，且传递函数给出电压的比率，那么传递函数 $G(j\omega)$ 增益用分贝表示为 $G_{db}=20\log|G(j\omega)|$。

3. 如果传递函数的增益定是14 db，那么传递函数的幅值是多少？

因为 $14=20\log M$，故 $M=5.01$。

4. 如何定义增益穿越。

增益转换角频率 ω_{cg} 是增益幅值为1(0 db)处的频率值。

5. 如何定义相位穿越。

相位转换角频率 ω_{cp} 是相位穿越 −180° 处的频率值。

6. 如何定义相位裕度(PM)。

相位裕度PM是奈奎斯特点与稳定点在相位上的距离度量。在典型的例子中，若系统在增益转换处的相位为 ϕ，那么相位裕度为 $180°+\phi$。例如，若 $\phi=-150°$，相位裕度即为30°。

7. 如何定义增益裕度(GM)。

增益裕度是系统仅通过改变增益从不稳定点开始的距离度量。若增益处于相位转换点，该系统相位是180°，增益为 $|G(j\omega_{cp})|$，相位裕度就是 $GM*|G(j\omega_{cp})|=1.0$ 或 $GM=1/|G(j\omega_{cp})|$。

8. 伯德图上什么特征最能体现是闭环阶跃响应的超调量？

相位裕度通过 $\xi_{cl}=PM/100$ 近似对应于闭环衰减比率。而如第3章所示，阶跃响应超调量与衰减比单调相关。

9. 伯德图上什么特征最能体现是闭环阶跃响应的上升时间？

上升时间由闭环自然频率决定，而该频率与增益转折频率足够接近。故上升时间

的最佳指示是 ω_{cg}。

10. 在伯德图的性能度量上,超前补偿的主要作用是什么?

超前补偿器通常用来增加在期望的增益转折频率处的相位裕度。

11. 在伯德图的性能度量上,滞后补偿的主要作用是什么?

滞后补偿器通常用来提升低频增益以减少多项式输入或者低频正弦输入的稳态误差。也可以用来降低转折频率 ω_c,以出现更优相位。

12. 怎样从伯德图上找出1型系统的 K_v?

K_v 由低频渐近线决定,其在1型系统有 -1 的斜率,且由表达式 K_v/ω 得出。常量值可以通过渐近线到达1(0 db)处的频率或者通过渐近线在 $\omega=1$ 的值得到。

13. 为什么我们在从奈奎斯特图上确定稳定性的时候,要预先知道开环不稳定极点的数目?

奈奎斯特图的环数表示零点和极点个数在右半平面 $1+KDG$ 的差别。为了解在此函数中的零点个数(即闭环极点也即闭环不稳定极点),必须知道开环不稳定极点的个数。

14. 在控制设计中,我们查看 $D(j\omega)G(j\omega)$ 的包围点 $-1/k$ 的次数,而不是查看 $KD(j\omega)G(j\omega)$ 的包围点 -1 的次数,其优点是什么?

若仅画出DG图,那么稳定性取决于围绕 $-1/K$ 的圈数。设计者于是可以容易地看出实数 K 的全部范围并且在不增加机电的情况下得出最佳的设计增益值。

15. 定义一个条件稳定的反馈系统。怎样在伯德图上辨认它?

一个条件稳定系统随增益的减小而不稳定。若低频相位落入 $-180°$ 以下,那么在没有相位裕度的情况下,增益降至增益转换点,那么系统几乎就是不稳定的。观察奈奎斯特图来确定是必要的。该情况也能够容易地由根轨迹看出。轨迹将在右半平面有低值增益段。

▲16. 要求某控制系统能跟随正弦波,它的频率范围为 $0\leqslant\omega_l\leqslant450$ rad/s,且幅值是5个单位,要求(正弦的)稳态误差不超过0.01。画出(或描述)对应的性能函数 $W_1(\omega)$。

W_1 的幅值由比率 $|R|/e_b=5/0.01=500$ 得出。那么执行函数将有频率达到450 rad/s时取值为500的增益值。伯德幅值图像要求在这些频率处高于该曲线。

第7章

以下问题基于状态变量形式的系统,矩阵为 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$ 和 J,输入为 u,输出为 y,状态为 x。

1. 为什么把运动方程写为状态变量形式更为方便?

此法提供为任意动态系统描述微分方程的标准途径,使得计算机辅助分析更容易实现。用标准描述矩阵分析线形系统也更方便。

2. 写出该系统的传递函数表达式。

$G(s)=\boldsymbol{H}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G}+J$

3. 写出系统传递函数极点的两种表达形式。

(a) $p = eig(F)$

(b) $p =$ det $[s\mathbf{I}-\mathbf{F}]$的根$=a(s)=0$ 。

4. 写出系统传递函数零点的表达式。

$z=$ det $\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{F} & -\mathrm{G} \\ \mathbf{H} & J \end{bmatrix}$的根$=b(s)=0$ 。

5. 在什么情况下，系统的状态是能控的？

(a) 若向量对$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$是能控的，即如果矩阵 $\mathcal{C}=[\boldsymbol{G} \quad \boldsymbol{FG} \quad \cdots \quad \boldsymbol{F}^{n-1}]$ 是满秩的。

(b) 如果系统可以化为能控标准型。

6. 在什么情况下，系统对输出 y 是能观的？

(a) 如果矩阵$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$是能观的——即，如果矩阵

$$\vartheta=\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{HF} \\ \vdots \\ \boldsymbol{HF}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$ 是满秩的。

(b) 如果系统可以化为能观标准型。

7. 假设状态反馈为 $u=-Kx$ ，给出闭环极点的表达式。

(a) $\mathbf{P}_c=\mathrm{eig}(\mathrm{F}-\mathrm{G}*\mathrm{K})$.

(b) $p_c=$det $(sI-F+GK)$的根$=\alpha_c(s)=0$ 。

8. 在什么情况下可以选择反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$ 使得 $\alpha_c(s)$ 具有任意根？

如果系统是能控的。

9. 用 LQR 或者对称根轨迹设计反馈矩阵 K 的优点是什么？

使用 LQR，闭环系统对参数改变更具鲁棒性，设计者能对闭环系统的控制效果有所调节。

10. 在反馈控制中应用估计器的主要原因是什么？

当状态不可用时（通常是由于把传感器置入每个可用状态太昂贵或者不可行），仅使用输出 y 的估计器可以给出一个估计值用来代替实际值。

11. 设估计器增益为 L，写出基于估计器的闭环极点表达式。

(a) $\mathbf{P}_e=\mathrm{eig}(\mathrm{F}-\mathrm{L}*\mathrm{H})$

(b) $p_e=$det $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{LH})$的根$=\alpha_e(s)=0$ 。

12. 在什么情况下，可以选择估计器增益 $\boldsymbol{L}$ 使得 $\alpha_e(s)=0$ 的根是任意的？

如果系统是能观的。

13. 如果安排参考输入使得估计器的输入跟被控过程的输入一样，则整体的闭环传递函数是什么？

$$\mathcal{T}(s)=N\frac{b(s)}{\alpha_c(s)}$$

14. 如果引入参考输入使得允许零点配置为 $\gamma(s)$ 的根，则整体的闭环传递函数是

什么？

$\mathcal{T}(s)=N\dfrac{\gamma(s)b(s)}{\alpha_e(s)\alpha_c(s)}$，通常 $\gamma(s)=\alpha_e(s)$。

15. 在状态反馈设计方法中引入积分控制的三种标准方法是什么？

(a) 通过扩充执行状态来包含积分状态变量。

(b) 通过内部模型方法。

(c) 通过使用扩展观测器方法。

第8章

1. 什么是奈奎斯特频率？它有什么特点？

奈奎斯特频率是采样频率的一般，即 $=\omega_s/2$。没有高于此的频率可以由采样信号描述。

2. 描述仿真设计过程。

系统的控制器的设计如同模拟控制器一般。最终生成的控制器就由一个数字式的等价物来近似。

3. 若采样速率是 $30\times\omega_{BW}$，试说明如何得到 $D(z)$。

使用离散等价设计方法。该法对此高采样率产生典型的良好效果。但是使用离散等价法后，要用仿真来检查，仿真包括采样的效果或者执行精确的离散线形分析。最好使用能包含所有一种采样效果和系统滞后的仿真。

4. 若系统带宽为 1 rad/s，试说明采用不同的采样速率有何影响。

绝对最小的采样率是 2 rad/s(或 0.32 Hz 及 $T=3$ s)，从 2 rad/s 到 10 或 20 rad/s，在控制中会因明显跳动而不稳定，设计需要仔细进行。在 20～30 rad/s 之间，控制跃动的幅度跃动逐渐变小且设计使用离散等价法效果良好。在 30 rad/s 以上，控制跃动难以观察到且离散等价法可以放心应用。

5. 给出选用数字处理器代替模拟电路实现控制器的两个优势。

(a) 数字控制器的物理规划可以完成在最终设计实现之前，其硬件装配通常会比选择和组装模拟控制器省时很多。

(b) 数字处理器在设计中更灵活，这是因为相对于重设印刷电路或者增加运算放大器，修正软件容易得多。

(c) 数字处理器更容易满足线形条件且整体控制设计中的逻辑设计步骤，例如使之允许自适应控制或者增益进程安排。

(d) 许多基本控制器相同的模型可以仅仅通过使用不同的可编程只读存储器(PROM)而不改变硬件设计进行调整。例如，汽车制造商可能在其整条生产线上有一个引擎控制器硬件设计；而每个引擎/车辆混合体有不同的 PROM。

(e) 与模拟控制器相比，数字控制器对温度变化的敏感度弱。

6. 给出选用数字处理器代替模拟电路实现控制器的两个不利之处。

(a) 模数(A/D)、数模(D/A)转换器有限的采样率和计算机处理器有限的速度限制了控制器带宽在约 1/10 采样频率之中。

(b) 在使用低档控制器时，转换器有限的精确度和位长为控制回路引入噪声和偏差。

(c) 费用。对于简单的控制器，数字设备比模拟设备昂贵得多。

▲7. 若采样速率为 $5\times\omega_{BW}$，试说明如何得到 $D(z)$。

以离散等价方法开始，但进行模拟设计时在控制对象模型中包含近似的滞后效应。然后通过精确的离散分析进行检验，离散分析把控制对象转化为离散形式并融入离散控制器中进行。如果执行效果低于期望值，用离散设计方法调整离散控制器。用包含所有已知采样效果和系统滞后的仿真来收尾。

第9章

1. 为什么用线性模型来近似一个受控对象的物理模型(通常为非线性的)？

线性模型的分析设计比非线性模型简单得多。而且，李雅普诺夫定理表明，如果线性近似是稳定的，非线性模型至少在一些区间稳定。

2. 怎么样将辐射热传递的非线性系统方程 $\dot{T}=T^4+T+u$ 线性化？

$$\delta\dot{T}=(4T_0^3+1)\delta T+\delta u$$

其中 T_0 是额定操作温度。(见第10章RTP实例研究)

3. 作为热源的电灯具有非线性，其实验所得的输出功率与输入电压的关系为 $P=V^{1.6}$。在反馈控制系统的设计中你将如何处理这个非线性问题？

把灯管反非线性化处理，即 $V=P^{0.625}$，如此线性化串联系统(见第10章RTP实例研究)。

4. 什么是积分漂移？

如果设备执行器输出信号饱和，那么误差信号从初始值归零要经历很长时间，此间，积分输出会增长或者比线性系统应有的情况提早结束。特别的“抗漂移”电路用来防止漂移现象。

5. 为什么说抗漂移电路重要？

当控制包括积分运动且受饱和影响，若无抗漂移电路，大额输入会导致大的超调量，并且减慢复原。

6. 用增益为1，上下限为 ±1 的非线性饱和函数，绘制一个有饱和效应的执行器结构框图，其增益为7，上下限为 ±20 。

如果执行器输出为 u_{out}，输入为 u_{in}，控制信号由 $u_{out}=20\ \text{sat}\left(\frac{7u_{in}}{20}\right)$ 得到。

7. 什么是描述函数，它与传递函数有怎样的关系？

描述方程方法的目的是为非线性元素找到近似“传递函数”的关系。描述函数可以被视为频率响应向非线性的延伸。

8. 应用描述函数时有哪些潜在的假设？

基本的假设是被控对象的运行近似低通滤波器，其他假设是非线性时不变，系统中只有一个非线性元素。

9. 什么是非线性系统中的极限环？

在许多非线性系统中，随时间推移，误差和响应达成一个设定振幅的周期性的解法，即极限环。

10. 怎样求出实验室中的非线性系统的描述函数？

可以将正弦信号引入系统，在输出端配置边缘陡峭的低通滤波器来量测输出的基本成分。描述方程由非线性系统得基本输出成分幅度和正弦输入信号振幅比较得到。

11. 什么是有界卫星姿态控制的最短时间控制策略？

棒一棒控制(Bang-bang)。

12. 怎样使用两种李雅普诺夫法？

间接法或者第一法基于运动方程的非线性，通过分析线性近似系统的稳定性得到非线性系统稳定的结论。直接法或者第二法，直接分析非线性方程。

第10章

1. 为什么对欠阻尼结构，如机械臂，并置的执行器和传感器易于非并置结构？

在并置的例子中，执行过程自然地拥有接近欠阻尼极点的零点，该零点使根轨迹位于左半平面。

2. 为什么控制工程师要参与控制过程的设计？

在许多情况下，执行器和传感器的特征值和位置对控制器设计的复杂度和难度产生主要影响。如果控制的要求包含于过程设计中，最终的系统统场更有效率(更好的闭环效应)并且廉价。

3. 为下列控制问题的执行器和传感器举例。

(a) 地球同步通信卫星姿态控制。

执行器：喷气式推进器，动力轮，磁转矩(线圈，转矩杆)，等离子推进器。

传感器：地球传感(滚动，偏移)，数字积分速度集成(DIRA)陀螺仪(速度)，星体追踪仪。

(b) 波音747客机的偏移控制。

执行器：升降舵。

传感器：偏移速度和/或偏移角用陀螺仪或者环形激光陀螺仪。

(c) CD播放器的磁道跟随器控制。

执行器：直流电机移动(两段摇动)机械臂，电磁线圈(两圈)聚焦于磁道。

传感器：光敏二极管序列。

(d) 点火式汽车引擎的油一气比控制器。

执行器：燃料注射器。

传感器：锆氧化物传感器

(e) 喷涂汽车的机器人手臂的位置控制。

执行器：液压执行器或者电机。

传感器：测量臂转数的编码器，压力传感器和力量传感器。

(f) 轮船的航向控制。

执行器:方向舵。

传感器:旋转罗盘。

(g) 直升机的姿态控制。

执行器:移动旋转斜盘(通过直接连接或者伺服系统)转动主要攻角叶片。

传感器:同飞机(空速管,加速计,速度陀螺仪)。

参 考 文 献

Abramovitch, D. and G. F. Franklin, "A Brief History of Disk Drive Control," *IEEE Control System Magazine*, Vol. 22, pp. 28—42, June 2002.

Ackermann, J., "Der Entwurf Linearer Regelungssysteme im Zustandsraum," *Regelungstech. Prozess—Datenverarb.*, Vol. 7, pp. 297—300, 1972.

Airy, G. B., "On the Regulator of the Clock—Work for Effecting Uniform Movement of Equatorials," *Mem. R. Astron. Soc.*, Vol. 11, pp. 249—267, 1840.

Anderson, B. D. O. and J. B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1990.

Anderson, E. *et al.*, *LAPACK User's Guide*, 3d ed. Philadelphia: SIAM, 1999.

Armstrong—Hélouvry, B. *et al.*, "A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction," *Automatica*, Vol. 30, No. 7, pp. 1083—1138, July 1994.

Ashley, H., *Engineering Analysis of Flight Vehicles*. Reading, MA: Addison—Wesley, 1974.

Åström, K. J., "Frequency Domain Properties of Otto Smith Regulators," *Int. J. Control*, Vol. 26, No. 2, pp. 307—314, 1977.

—, *Introduction to Stochastic Control Theory*. NewYork: Academic Press, 1970.

— and T. H? gglund, *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, 2d ed. Research Triangle, NC: International Society for Measurement and Control, 1995.

Athans, M., "ATutorial on the LQG/LTR Method," in *Proc. American Control Conf.*, June 1986, pp. 1289—1296.

Bellman, R., *Dynamic Programming*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.

— and R. Kalaba, eds., *Mathematical Trends in Control Theory*, New York: Dover, 1964.

Bergen, A. R. and R. L. Franks, "Justification of the Describing Function Method," *SIAM Journal on Control*, Vol. 9, pp. 568—589, 1973.

Blakelock, J. H., *Automatic Control of Aircraft and Missiles*, 2d ed. New York: John Wiley, 1991.

Bode, H. W., "Feedback: The History of an Idea," in *Conf. on Circuits and Systems*, New York, 1960; reprinted in Bellman and Kalaba (1964).

—, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. New York: Van Nostrand, 1945.

Boyd, S. P. and C. H. Barratt, *Linear Controller Design: Limits of Performance*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.

Brown, J. W. and R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, 6th ed. New York: McGraw—Hill, 1996.

Bryson, A. E., Jr. and W. F. Denham, "A Steepest—Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems," *J. Appl. Mech.*, June 1962.

Bryson, A. E., Jr. and Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*. Waltham, MA: Blaisdell, 1969.

Bryson, A. E., Jr., *Control of Spacecraft and Aircraft*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.

Buckley, P. S., *Techniques of Process Control*. New York: John Wiley, 1964.

Butterworth, S., "On the Theory of Filter Amplifiers," *Wireless Eng.*, Vol. 7, pp. 536—541, 1930.

Callender, A., D. R. Hartree, and A. Porter, "Time Lag in a Control System," *Philos. Trans. R. Soc. London* A, London: Cambridge University Press, 1936.

Campbell, D. P., *Process Dynamics*, New York: John Wiley, 1958.

Campbell, G. A. and R. N. Foster, *Fourier Integrals for Practical Applications*. New York: Van Nostrand, 1948.

Cannon, R. H., Jr., *Dynamics of Physical Systems*. New York: McGraw—Hill, 1967.

Churchill, R. V., *Operational Mathematics*, 3d ed. New York: McGraw—Hill, 1972.

Clark, R. N., *Introduction toAutomatic Control Systems*, NewYork: JohnWiley, 1962.

Craig, J. J., *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 2d ed. Reading, MA: Addison—Wesley, 1989.

de Roover, D., A. Emami—Naeini, and J. L. Ebert, "Model—Based Control of Fast—Ramp RTP Systems," in *Sixth International Conference on Advanced Thermal Processing of Semiconductors*, Kyoto, Japan, September 1998, pp. 177—186.

Dorato, P., *Analytic Feedback System Design: An Interpolation Approach*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000.

Dorf, R. C. and R. Bishop, *Modern Control Systems*, 10th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2005.

Doyle, J. C., B. A. Francis, and A. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*. New York: Macmillan, 1992.

Doyle, J. C. andG. Stein, "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC—26, No. 1, pp. 4—16, February, 1981.

Doyle, J. C., "Guaranteed Margins for LQG Regulators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC—23, pp. 756—757, 1978.

Doyle, J. C. and G. Stein, "Robustness with Observers," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, Vol. AC—24, pp. 607—611, August 1979.

Ebert, J. L., A. Emami—Naeini, H. Aling, and R. L. Kosut, "Thermal Modeling of

Rapid Thermal Processing Systems," in *Third International Rapid Thermal Processing Conference*, Amsterdam, August 1995, pp. 343—355.

Ebert, J. L., A. Emami—Naeini, and R. L. Kosut, "Thermal Modeling and Control of Rapid Thermal Processing Systems," *Proc. 34th IEEE Conf. Dec. Control*, pp. 1304—1309, December 1995.

Elgerd, O. I., *Electric Energy Systems Theory*, New York: McGraw—Hill, 1982.

—andW. C. Stephens, "Effect of Closed—LoopTransfer Function Pole and Zero Locations on theTransient Response of Linear Control Systems,"*Trans. Am. Inst. Electr. Eng. Part1*, Vol. 42, pp. 121—127, 1959.

Emami—Naeini, A., J. L. Ebert, D. de Roover, R. L. Kosut, M. Dettori, L. Porter, and S. Ghosal, "Modeling and Control of Distributed Thermal Systems," in *Proc. IEEE Trans. Control Systems Technology*, Vol. 11, No. 5, pp. 668—683, September 2003.

Emami—Naeini, A. and G. F. Franklin, "Zero Assignment in the Multivariable Robust Servomechanism," in *Proc. IEEE Conf. Dec. Control*, December 1982, pp. 891—893.

Emami—Naeini, A. and P. van Dooren, "Computation of Zeros of Linear Multivariable Systems," *Automatica*, Vol. 18, No. 4, pp. 415—430, 1982.

—, "On Computation of Transmission Zeros and Transfer Functions," in *Proc. IEEE Conf. Dec. Control*, December 1982, pp. 51—55.

Etkin, B. and L. D. Reid, *Dynamics of Flight: Stability and Control*, 3d ed. New York: John Wiley, 1996.

Evans, W. R., "Graphical Analysis of Control Systems," *Trans. Am. Inst. Electr. Eng.* Vol. 67, pp. 547—551, 1948.

Francis, B. A., "A Course in H∞ Control Theory," in *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 88. Berlin: Springer—Verlag, 1987.

—and W. M. Wonham, "The Internal Model Principle of Control Theory,"*Automatica*, Vol. 12, pp. 457—465, 1976.

Francis, J. G. F., "The QR Transformation: A Unitary Analogue to the LR Transformation, Parts I and II," *Comput. J.*, Vol. 4, pp. 265—272 and 332—345, 1961.

Franklin, G. F. and A. Emami—Naeini, "ANewFormulation of the Multivariable Robust Servomechanism Problem," internal report, Information Systems Laboratory, Stanford University, Stanford, CA, July 1983.

Franklin, G. F. and A. Emami—Naeini, "Robust Servomechanism Design Applied to Control of Reel—to—Reel Digital Tape Transports," in *Proc. Asilomar Conf.*, Asilomar, CA, 1981, pp. 108—113.

Franklin, G. F., J. D. Powell, and M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, 3d ed. Reading, MA: Addison—Wesley, 1998.

Freudenberg, J. S. and D. P. Looze, "Right Half Plane Zeros and Design Tradeoffs in Feedback Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC—30, pp. 555—561, June 1985.

Fuller, A. T., "The Early Development of Control Theory," *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, Vol. 98, pp. 109—118 and 224—235, 1976.

Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices*, Vols. I and II. New York: Chelsea Publishing, 1959.

Gardner, M. F. and J. L. Barnes, *Transients in Linear Systems*, New York: John Wiley, 1942.

Goodwin, G. C., S. F. Graebe, and M. E. Salgado, *Control System Design*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.

Gopinath, B., "On the Control of Linear Multiple Input—Output Systems," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 50, pp. 1063—1081, March 1971.

Graham, D. and R. C. Lathrop, "The Synthesis of Optimum Response: Criteria and Standard Forms," *Trans. Am. Inst. Electr. Eng.*, Vol. 72, Pt. 1, pp. 273—288, 1953.

Gunckel, T. L., III and G. F. Franklin, "A General Solution for Linear Sampled Data Control," *J. Basic Eng.*, Vol. 85—D, pp. 197—201, 1963.

Gyugyi, P., Y. Cho, G. F. Franklin, and T. Kailath, "Control of Rapid Thermal Processing: ASystem Theoretic Approach," in *Proc. IFACWorld Congress*, 1993.

Halliday, D., R. Resnick, and J. Walker, *Fundamentals of Physics*, 6th ed. New York: John Wiley, 2001.

Hang, C. C., K. J. Åström, andW. K. Ho, "Refinements of the Ziegler—Nichols Tuning Formula," Rep. CI—90—1, National University of Singapore, Dept. of Electrical Engineering, April 1990.

Hanselman, D. C. and B. C. Littlefield, *Mastering MATLAB 7*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2005.

Heffley, R. K. andW. F. Jewell, *Aircraft Handling Qualities*. Tech. Rep. 1004—1, System Hawthorne, CA: Technology, Inc., May 1972.

Higham, D. J. and N. J. Higham, *MATLAB Guide*, 2d ed. Philadelphia: SIAM, 2005.

Ho, M.—T., A. Datta, and S. P. Bhattacharyya, "An Elementary Derivation of the Routh—Hurwitz Criterion," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, pp. 405—409, 1998.

Huang, J.—J. and D. B. DeBra, "Automatic Tuning of Smith—Predictor Design Using Optimal Parameter Mismatch," in *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, December 2000, pp. 3307—3312.

Hubbard, M., Jr. and J. D. Powell, "Closed—Loop Control of Internal Combustion Engine Exhaust Emissions," SUDAAR No. 473, Dept. of Aero/Astro, Stanford University, Stanford, CA, February 1974.

Hurewicz, W., "Filters and Servo Systems with Pulsed Data," in James *et al.*, *Theory of Servomechanisms*, Radiation Lab. Series 25, Chapter 5, NewYork: McGraw—Hill, 1947.

James, H. M., N. B. Nichols, and R. S. Phillips, *Theory of Servomechanisms*, Radiation Lab. Series 25. New York: McGraw—Hill, 1947.

Johnson, R. C., Jr., A. S. Foss, G. F. Franklin, R. V. Monopoli, and G. Stein, "Toward Development of a Practical Benchmark Example for Adaptive Control," *IEEE Control Syst. Mag.*, Vol. 1, No. 4, pp. 25—28, December 1981.

Kailath, T., *Linear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1980.

Kalman, R. E., "ANewApproach to Linear Filtering and Prediction Problems, *J. Basic Eng.*, Vol. 85, pp. 34—45, 1960.

—,"Onthe GeneralTheory of Control Systems," in *Proc.* 1st Int. Congr. Autom *Control*, Moscow, Russia, pp. 481—493, 1960.

— and J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov. II. Discrete Systems," *J. Basic Eng.*, Vol. 82, pp. 394—400, 1960.

—, Y. C. Ho, and K. S. Narendra, "Controllability of Linear Dynamical Systems," in *Contributions to Differential Equations*, Vol. 1. New York: John Wiley, 1962.

Kane, T. R. andD. A. Levinson, *Dynamics: Theory and Application*. NewYork: McGraw—Hill, 1985.

Kautsky, J., N. K. Nichols, and P. van Dooren, "Robust Pole Assignment in Linear State Feedback," *Int. J. Control*, Vol. 41, No. 5, pp. 1129—1155, 1985.

Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, 3d ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall,2002.

Kochenburger, R. J., "A Frequency Response Method for Analyzing and Synthesizing Contactor Servomechanisms," *Trans. Am. Inst. Electr. Eng.*, Vol. 69, pp. 270—283, 1950.

Kuo, B. C. and F. Golnaraghi, *Automatic Control Systems*, 8th ed. New York: John Wiley, 2002.

Kuo, B. C., ed. *Incremental Motion Control, Vol. 2: Step Motors and Control Systems*. Champaign, IL: SRL Publishing, 1980.

—, *Proc. Symp. Incremental Motion Control Systems and Devices, Pt. 1: Step Motors and Controls*, Champaign—Urbana, IL: University of Illinois, 1972.

Lanchester, F. W., *Aerodonetics*. London: Archibald Constable, 1908.

LaSalle, L. P. and S. Lefschetz, *Stability by Lyapunov's Direct Method*. New York: Academic Press, 1961.

Laub, A. J., A. Linnemann, and M. Wette, "Algorithms and Software for Pole Assignment by State Feedback," in *Proc. Second Symp. CACSD*, March 1985.

León de la Barra, B. A., A. Emami—Naeini, and E. R. Chinchón, "Linear Multivariable Servomechanisms Revisited: System Type and Accuracy Tradeoffs," *Automatica*, Vol. 34, No. 11, pp. 1449—1452, 1998.

Leonard, N. E. and W. S. Levine, *Using MATLAB to Analyze and Design Control System*, 2d ed. Redwood City, CA: Benjamin Cummings, 1995.

Lyapunov, A. M., "Problème général de la stabilité du mouvement," *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, Vol. 9, pp. 203—474, 1907; original paper published in 1892 in *Commun. Soc. Math. Kharkow*, 1892; reprinted as Vol. 17 in *Annals of Math Studies*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1949.

Ljüng, L., *System Identification: Theory for the User*, 2d ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.

— and T. Söderström, *Theory and Practice of Recursive Identification*. Cambridge, MA: MIT Press, 1983.

Luenberger, D. G., "Observing the State of a Linear System," *IEEE Trans. Mil. Electon.*, Vol. MIL—8, pp. 74—80, 1964.

McRuer, D. T., I. Askenas, and D. Graham, *Aircraft Dynamics and Automatic Control*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1973.

Maciejowski, J. M., *Multivariable Feedback Design*. Reading, MA: Addison— Wesley, 1989.

Marsden, J. E. and M. J. Hoffman, *Basic Complex Analysis*, 3d ed. New York: Freeman, 1998.

Mason, S. J., "Feedback Theory: Some Properties of Signal Flow Graphs," *Proc. IRE*, Vol. 41, pp. 1144—1156, 1953.

—, "Feedback Theory: Further Properties of Signal Flow Graphs," *Proc. IRE*, Vol. 44, pp. 920—926, 1956.

Maxwell, J. C., "On Governors," *Proc. R. Soc. London*, Vol. 16, pp. 270—283, 1868.

Mayr, O., *The Origins of Feedback Control*. Cambridge, MA: MIT Press, 1970.

Mees, A. I., *Dynamics of Feedback Systems*. New York: John Wiley, 1981.

Messner, W. C. and D. M. Tilburry, Control *Tutorials for MATLAB andSimulink: A Web—Based Approach*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.

Minimis, G. S. and C. C. Paige, "An Algorithm for Pole Assignment of Time Invariant Systems," *Int. J. Control*, Vol. 35, No. 2, pp. 341—354, 1982.

Misra, P. and R. V. Patel, "Numerical Algorithms for Eigenvalue Assignment by Constant and Dynamic Output Feedback," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC—34, No. 6, pp. 577—588, 1989.

Moler, C. B. and C. van Loan, "Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix," *SIAM Rev.*, Vol. 20, No. 4, pp. 801—836, 1978.

—, "Nineteen DubiousWays to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty— Five Years Later," *SIAM Rev.*, Vol. 45, No. 1, pp. 3—49, 2003.

Moler, C. B., *Numerical Computing withMATLAB*. Philadelphia: SIAM, 2004.

Norman, S. A., "Wafer Temperature Control in Rapid Thermal Processing," Ph. D. Dissertation, Stanford University, Stanford, CA, 1992.

Nyquist, H., "Regeneration Theory," *Bell Sys. Technol. J.*, Vol. 11, pp. 126—147, 1932.

Ogata, K., *Modern Control Engineering*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

Oswald, R. K., "Design of a Disk File Head Positioning Servo," *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 18, pp. 506—512, November 1974.

Panagopoulous, H., K. J. Åström, and T. H? gglund, "Design of PID Controllers-

Based on Non—Convex Optimization," in *Proceedings of the American Control Conference*, San Diego, CA, June 1999, pp. 3858—3862.

Parks, P., "Lyapunov Redesign of Model Reference Adapive Control Systems," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. AC—11, No. 3, 1966.

Perkins, W. R., P. V. Kokotovic, T. Boureret, and J. L. Schiano, "Sensitivity Function Methods in Control System Education," in *IFAC Conf. on Control Educ.*, June 1991.

Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: John Wiley, 1962.

Ragazzini, J. R., R. H. Randall, and F. A. Russell, "Analysis of Problems in Dynamics by Electronic Circuits," *Proc. IRE*, Vol. 35, No. 5, pp. 442—452, May 1947.

Ragazzini, J. R. and G. F. Franklin, *Sampled—Data Control Systems*. New York: McGraw—Hill, 1958.

Reliance Motion Control Corp., *DC Motor Speed Controls Servo Systems*, 5th ed. Eden Prairie, MN: Reliance Motion Control Corp., 1980.

Rosenbrock, H. H., *State Space and Multivariable Theory*. New York: John Wiley, 1970.

Routh, E. J., *Dynamics of a System of Rigid Bodies*. London: MacMillan, 1905.

Saberi, A., B. M. Chen, and P. Sannuti, *Loop Transfer Recovery: Analysis and Design*. New York: Springer—Verlag, 1993.

Safonov, M. G. and G. Wyetzner, "Computer—Aided Stability Analysis Renders Popov Criterion Obsolete," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC—32, pp. 1128—1131, 1987.

Sandberg, I. W., "A Frequency Domain Condition for Stability of Feedback Systems Containing a SingleTimeVarying Nonlinear Element," *Bell Systems Tech. J.*, Vol. 43, pp. 1581—1599, 1964.

Sastry, S. S., *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*. New York: Springer—Verlag, 1999.

Schmitz, E., "Robotic Arm Control," Ph. D. Dissertation, Stanford University, Stanford, CA, 1985.

Sedra, A. S. and K. C. Smith, *Microelectronic Circuits*, 3rd ed. NewYork: Oxford University Press, 1991.

Shampine, L. F. and M. K. Gordon, *Computer Solution of Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem*. New York: W. H. Freeman, 1975.

Sinha, N. K. and B. Kuszta, *Modeling and Identification of Dynamic Systems*. New York: Van Nostrand, 1983.

Smith, O. J. M., *Feedback Control Systems*. New York: McGraw—Hill, 1958.

Smith, R. J., *Electronics: Circuits and Devices*, 4th ed. New York: John Wiley, 1987.

Stein, G. and M. Athans, "The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design," *IEEE Trans. Automat Contr.*, Vol. AC—32, pp. 105— 114, Febru-

ary 1987.

Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*, 3d ed. New York: Harcourt Brace, 1988.

Swift, J., *On Poetry: A Rhapsody*, 1973, in J. Bartlett, ed., *Familiar Quotations*, 15th ed. Boston: Little Brown, 1980.

Sze, S. M., ed., VLSI *Technology*, 2d ed. New York: McGraw—Hill, 1988.

Thomson, W. T. and M. D. Dahleh, *Theory of Vibration with Applications*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.

Trankle, T. L., "Development of WMEC Tampa Maneuvering Model from Sea Trial Data," Rep. MA—RD—760—87201. Palo Alto, CA: Systems Control Technology, March 1987.

Truxal, J. G., *Control System Synthesis*. New York: McGraw—Hill, 1955.

van der Linden, G., J. L. Ebert, A. Emami—Naeini, and R. L. Kosut, "RTP Robust Control Design: Part II: Controller Synthesis," in *Fourth International Rapid Thermal Processing Conference*, September 1996, pp. 263—271.

Van der Pol, B. and H. Bremmer, *Operational Calculus*. New York: Cambridge University Press, 1955.

van Dooren, P., A. Emami—Naeini, and L. Silverman, "Stable Extraction of the Kronecker Structure of Pencils," in *Proc. IEEE Conf. Dec. Control*, San Diego, CA: December 1978, pp. 521—524.

Vidyasagar, M., *Nonlinear Systems Analysis*, 2d ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1993.

Wiener, N., *The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of StationaryTime Series*. New York: John Wiley, 1949.

—, "Generalized Harmonic Analysis," *Acta Math.*, Vol. 55, pp. 117, 1930.

Woodson, H. H., and J. R. Melcher, *Electromechanical Dynamics, Part I: Discrete Systems*. New York: John Wiley, 1968.

Workman, M. L., "Adaptive Proximate Time—Optimal Servomechanisms," Ph. D. Dissertation, Stanford University, Stanford, CA, 1987.

Zames, G., "On the Input—Output Stability of Time—Varying Nonlinear Feedback Systems—Part I: Conditions Derived Using Concepts of Loop Gain, Conicity and Positivity," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC—11, pp. 465—476, 1966.

—, "On the Input—Output Stability of Time—Varying Nonlinear Feedback Systems—Part II: Conditions Involving Circles in the Frequency Plane and Sector Nonlinearities," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC—11, pp. 228—238, 1966.

Zhou, K. and J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.

Ziegler, J. G., andN. B. Nichols, "Optimum Settings forAutomatic Controllers," *Trans. ASME*, Vol. 64, pp. 759—768, 1942.

—, "Process Lags inAutomatic Control Circuits," *Trans. ASME*, Vol. 65, No. 5, pp. 433—444, July 1943.